ME, Matematikai Intézet

2019. 02. 27.

Versenyfelkészítő

Egyenlőtlenségek

1. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a, b > 0$ valós szám esetén:
$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}!$$

2. Bizonyítsa be, hogy bármely három pozitív a, b és c valós számra érvényes az
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$
egyenlőtlenség!

3. Bizonyítsa be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az
$$a + 2b + 3c \geq 14$$
egyenlőtlenség, akkor érvényes az
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$$
egyenlőtlenség is! Mikor áll fenn egyenlőség?

4. Bizonyítsa be, hogy ha $a + b + c = 1$, akkor érvényes a következő egyenlőtlenség!
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

5. Bizonyítsa be, hogy minden olyan pozitív a és b számra, amelyek összege 1, érvényes a következő egyenlőtlenség!
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$
Az a, b számok mely értékeinél áll fenn az egyenlőség?

6. Bizonyítsa be, hogy

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 2,$$

ha $n > 1$ pozitív egész szám!

7. Bizonyítsa be, hogy

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

teljesül minden $n > 1$ pozitív egész szám esetén!

8. Bizonyítsa be, hogy, ha $x > 0$ és $p > q$, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség!

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{p}{q} \cdot x$$

9. Bizonyítsa be, hogy minden 1-nél nagyobb n egészre teljesül a következő egyenlőtlenség!

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

10. Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész számra

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

egyenlőtlenség teljesül!