Minta zh

ME Analízis Tanszék

Miskolc, 2016. november

Név :

NEPTUN-kód:

Zárthelyi dolgozat a Gazdaságtudományi Kar
I. éves levelező hallgatói részére

1. Adott az $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ függvény. Adja meg a függvény értelmezési tartományát, zérus helyét. Van-e szélsőértéke f(x)-nek? Hol növekvő/csökkenő és konvex/konkáv a függvény? Vázolja a függvény grafikonját! (15 pont)

1 1 1

$D_f: x \in \mathbb{R}$, Z.h.: $f(x)=0=(x-1)^2(x+2) \Rightarrow x_1 = 1$ és $x_2 = -2$ 2

$f'(x) = 2(x-1)^1 \cdot (x+2) + (x-1)^2(1+0) = (x-1)\big(2(x+2)+(x-1)\big) = (x-1)(3x+3)$

$f''(x) = \big(3(x^2-1)\big)' = 3(2x-0) = 6x$ 1

<u>Monotonitás</u> $f'(x)=0=(x-1)(3x+3)$

$x=1$ 1 $x=-1$ 1

-1 $+1$

x	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,+1)$	$x=+1$	$(+1,+\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	max.	↘	min.	↗

3 vagy

$P_{max} = (-1, f(-1)) = \underline{(-1, 4)}$ 1

$P_{min} = (+1, f(+1)) = \underline{(1, 0)}$ 1

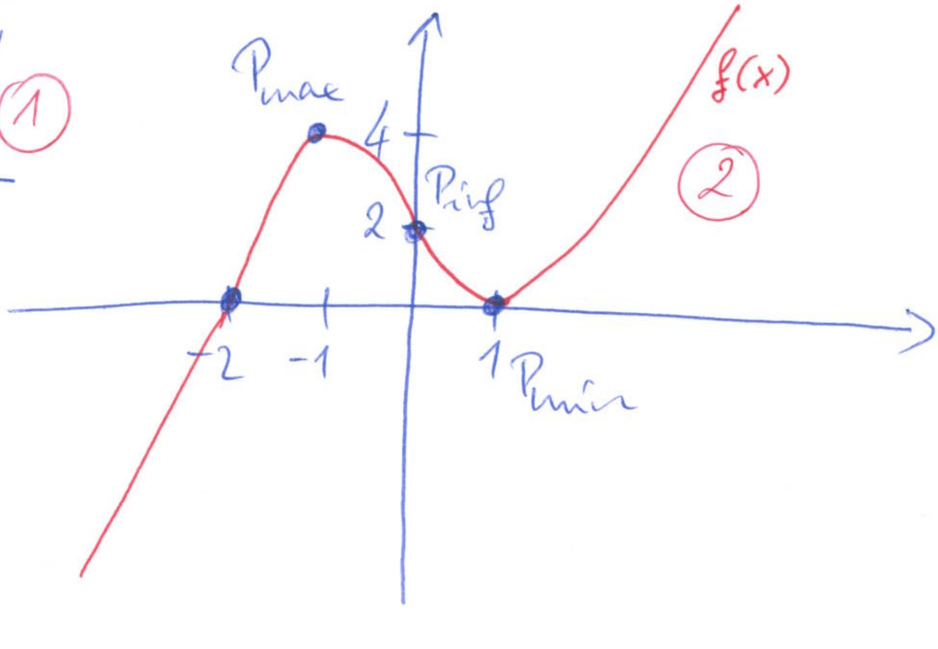
$P_{inf} = (0, f(0)) = \underline{(0, 2)}$ 1

<u>Konvexitás</u> $f''(x)=0=6x \Rightarrow x=0$ 1

0

x	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0,+\infty)$
f''	−	0	+
f	⌒	inf.	⌣

1



2. Számítsa ki a következő integrálokat :

a) $\int x\cos x^2 dx$, b) $\int \frac{x\sqrt[3]{x^7}+3}{2x}dx$, c) $\int \frac{4x^3+4x+5}{x^4+2x^2+5x}dx$

(15 pont)

a.) $\frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\cos x^2}_{f(g(x))} dx = \frac{1}{2}\sin(x^2)+C$ 2 2 1

b.) $\int \frac{x \cdot x^{\frac{7}{3}}+3}{2x}dx = \frac{1}{2}\int x^{\frac{10}{3}-1} + 3\underbrace{x^{-1}}_{\frac{1}{x}} dx =$ 2

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + 3 \cdot \ln|x|\right) + C$ 2 1

c.) $\int \frac{\overbrace{4x^3+4x+5}^{f'}}{\underbrace{x^4+2x^2+5x}} dx = \ln|x^4+2x^2+5x| + C$ 2 1

$f = x^4+2x^2+5x$ 1

$f' = 4x^3+2 \cdot 2x+5$ 1

Minta zh

3. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(t)=\begin{cases} At^{-3}, & \text{ha } 1<t<2, \\ 0, & \textit{egyébként}.. \end{cases}$

Határozza meg A értékét és számítsa ki a $P(\xi<1{,}5)$ valószínűséget!

(15 pont)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \quad (2) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,dt}_{0} + \int_{1}^{2} A\cdot t^{-3}\,dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} 0\,dt}_{0} = \quad (3)$$

$$= \int_{1}^{2} A\cdot t^{-3}\,dt$$

$$1 = \int_{1}^{2} A\cdot t^{-3}\,dt \quad (1) = A\cdot\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2 \quad (1) = A\cdot\left[\frac{2^{-2}-1^{-2}}{-2}\right] \quad (1) \Rightarrow$$

$$1 = A\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-1}{-2}\right) = A\cdot\frac{-\frac{3}{4}}{-2} \Rightarrow A = \frac{-2}{-\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \quad (1)$$

$$P(\xi<1{,}5) = \int_{-\infty}^{1{,}5} f(t)\,dt \quad (1) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{1{,}5} \frac{8}{3}\cdot t^{-3}\,dt = \quad (2)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^{1{,}5} \quad (1) = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{-2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 1^{-2}\right) \quad (1) =$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1} - 1\right) = -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right) = \underline{\underline{\frac{20}{27}}} \quad (1)$$

4. Egy 52 lapos francia kártyacsomagból a kártyalapok visszatevésével kihúzunk egymás után 6 lapot.
a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan két király lesz a kihúzott lapok között?
b. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem lesz dáma a kihúzott lapok között?
c. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább két ász lesz a kihúzott lapok között?

(15 pont)

2

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad ; \quad p = \frac{s}{N} \; ; \quad q = 1 - p$$ 1 1

$N = 52$ $\quad n = 6$ $\quad s = 4$ (király lapok) $\quad k = ?$ 1

a.) $P(k=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{4}{52}\right)^2 \left(\frac{48}{52}\right)^4 =$ 1 1 1

b.) $s = 4$ (dáma)

$P(k=0) = \binom{6}{0} \left(\frac{4}{52}\right)^0 \left(\frac{48}{52}\right)^6 =$ 1 1 1

c.) $s = 4$ (ász lapok)

$P(k \geq 2) = P(k=2) + P(k=3) + P(k=4) + P(k=5) + P(k=6)$ 1 1

$P(\text{összes}) = P(0 \leq k \leq 6) = 1 \Rightarrow P(k \geq 2) = 1 - P(k=0) - P(k=1)$ 1

$P(k=1) = \binom{6}{1} \left(\frac{4}{52}\right)^1 \left(\frac{48}{52}\right)^5$

$P(k=0) = \binom{6}{0} \left(\frac{4}{52}\right)^0 \left(\frac{48}{52}\right)^6$

$P(k \geq 2) = 1 - \ldots$ 1

Minta zh

ME Analízis Tanszék | Miskolc, 2016. november

Név :

NEPTUN kód:

Zárthelyi dolgozat a Gazdaságtudományi Kar
I. éves levelező hallgatói részére

1. Határozza meg az alábbi határértékeket: (~~12~~ 15 pont)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+x^2}{2x^2-3x+2}+\left(\frac{5}{x}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}+\left(\frac{5}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}+\left(\frac{5}{\infty}\right)^2 = \frac{1}{2}+0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x}\right)^x\right)^4 = \left(e^6\right)^4 = \underline{\underline{e^{24}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin 5x} = \frac{\cos 0-1}{\sin 0} = \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos(5x)\cdot 5} =$$

$$= \frac{-\sin 0}{\cos(0)\cdot 5} = \frac{0}{1\cdot 5} = \underline{\underline{0}}$$

25
(~~22~~ pont)

2. Adott az $f(x) = x\ln x$ függvény. $D_f: x > 0$

Állapítsa meg a függvény zérushelyét:

$f(x)=0 \Rightarrow x\cdot\ln x = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow \underline{x=1}$

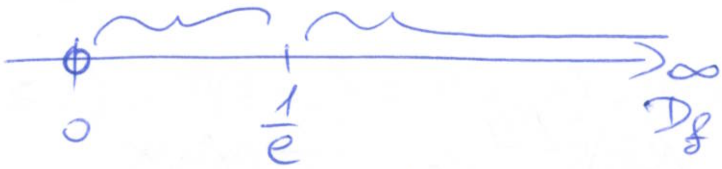
Számítsa ki az *f* függvény deriváltjait:

$f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} + 0$

Állapítsa meg, hogy hol és milyen szélsőértéke van az *f* függvénynek!

$f'(x)=0 \rightarrow \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow \underline{x = e^{-1}}$



$P_{min} = \left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}\right) = \underline{\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)}$

x	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$x=\frac{1}{e}=e^{-1}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	min. hely	↗

pl.: $x=e^{-2} \rightarrow f'(e^{-2}) = \underbrace{\ln e^{-2}}_{-2} + 1 = -2+1 = -1$

pl.: $x=1 \rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 = 0+1 = +1$

Minta zh

Számítsa ki az *f* függvény határértékeit az alábbi helyeken: $+\infty$, ~~$-\infty$~~ $0+0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln x = \infty\cdot\infty = \underline{\underline{\infty}}$$

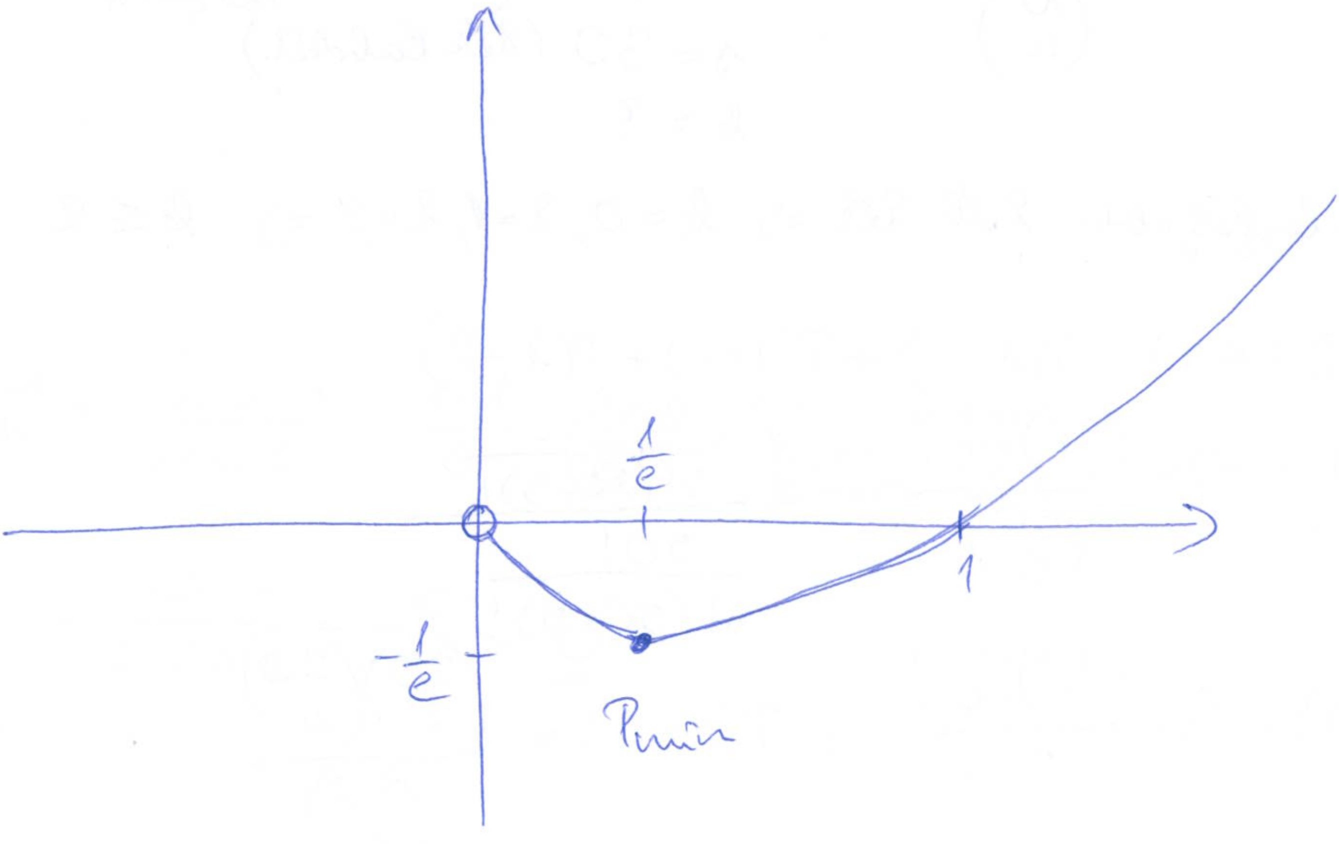
$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{-1} = 0^-$$

Hol és milyen szakadási helye van a függvénynek?

$D_f: x>0 \to$ nincs szakadása D_f-en

Vázolja a függvény grafikonját!



3. Számítsa ki az alábbi integrálokat: (~~7~~ 10 pont)

$$\int x^2 + e^x - \cos x\,dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + e^x - \sin x + C}}$$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 1\cdot \ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \rightarrow v = \int v'dx = x \end{array} \right| =$$

$$= \left[\ln(x)\cdot x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,dx = \ln(2)\,2 - \ln(1)\,1 - \left[x\right]_1^2 =$$

$$= 2\cdot\ln 2 - 0 - (2-1) = \underline{\underline{2\cdot \ln 2 - 1}}$$

4. Egy dobozban 20 piros és 30 kék kislabda található, visszatevés nélkül kihúzunk 5 db-ot, mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott labdák között legfeljebb 2 db kék lesz! (~~9~~ 10 pont)

$$P(k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$N = 20 + 30$

$n = 5$

$s = 30$ (kék labdák)

$k = ?$

legfeljebb 2 db kék $\Rightarrow k = 0,\ k = 1,\ k = 2 \Rightarrow k \leq 2$

$$P(k \leq 2) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2)$$

$$P(k=0) = \frac{\binom{30}{0}\binom{20}{5}}{\binom{50}{5}} = \frac{1\cdot \frac{20!}{5!(20-5)!}}{\frac{50!}{5!(50-5)!}}$$

$$P(k=1) = \frac{\binom{30}{1}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}} \quad ; \quad P(k=2) = \frac{\binom{30}{2}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}}$$

$$P(k \leq 2) = \ldots + \ldots + \ldots = \underline{\underline{\quad}}$$