Integrál

Határozatlan Integrál

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \left(F(x)+C\right)' = f(x) \qquad C \in \mathbb{R} \text{ konstans}$$

I. $$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ és } \alpha \neq -1$$

Pl.: $\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$ $\qquad \int x^{2011}\,dx = \frac{x^{2011+1}}{2011+1} + C = \frac{x^{2012}}{2012} + C$

$\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$ $\qquad \int 1\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$

$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$ $\qquad \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$\int \frac{1}{x^{199}}\,dx = \frac{x^{-199+1}}{-199+1} + C = \frac{x^{-198}}{-198} + C$ $\qquad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$\int \sqrt[9]{x^4}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{9}+1}}{\frac{4}{9}+1} + C = \frac{x^{\frac{13}{9}}}{\frac{13}{9}} + C$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

$$\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{6}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = \frac{6x^{\frac{11}{6}}}{11} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[7]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{7}}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}\,dx = \int x^{\frac{35+21+15}{105}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{71}{105}}\,dx = \frac{x^{\frac{71}{105}+1}}{\frac{71}{105}+1} + C = \frac{105\cdot x^{\frac{176}{105}}}{176} + C$$

$$\int \frac{x^7}{x^3}\,dx = \int x^{7-3}\,dx = \int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int \frac{x^3}{x^7}\,dx = \int x^{3-7}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{3x^3} + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}-3}\,dx = \int x^{-\frac{8}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{8}{3}+1} + C = \frac{3x^{-\frac{5}{3}}}{-5} + C$$

$$\int \sqrt{\sqrt[3]{x^7}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{14}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{14}+1}}{\frac{3}{14}+1} + C = \frac{14\,x^{\frac{17}{14}}}{17} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x\sqrt[11]{x\sqrt[6]{x^{15}}}}\,dx=\int\left(x\left(x\left(x^{\frac{15}{6}}\right)\right)^{\frac{1}{11}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(x\left(x\cdot x^{\frac{15}{6}}\right)^{\frac{1}{11}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int\left(x\left(x^{1+\frac{15}{6}}\right)^{\frac{1}{11}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(x\left(x^{\frac{21}{6}}\right)^{\frac{1}{11}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(x\cdot\left(x^{\frac{21}{66}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int\left(x^{1+\frac{21}{66}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left(x^{\frac{87}{66}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int x^{\frac{87}{198}}\,dx=\frac{x^{\frac{87}{198}+1}}{\frac{87}{198}+1}+C$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)$ vagy $(-\infty,0)$

Pl.: $$\int\frac{x}{x^2}\,dx=\int x^{1-2}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\,dx=\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

$$\text{III.}\quad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\qquad a\in\mathbb{R},\ a>0 \text{ és } a\neq 1$$

Pl.: $$\int 3^x\,dx=\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

$$\int e^x\,dx=\frac{e^x}{\ln e}+C=\frac{e^x}{1}+C=e^x+C$$

$$\int 1^x\,dx=\int 1\,dx=x+C\quad !$$

$$\int 2^x e^x\,dx=\int(2e)^x\,dx=\frac{(2e)^x}{\ln 2e}+C=\frac{(2e)^x}{\ln e+\ln 2}+C=\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}+C$$

$$\int\frac{5^{3x}\cdot 2^{7x}}{11^{2x}}\,dx=\int\frac{(5^3)^x(2^7)^x}{(11^2)^x}\,dx=\int\left(\frac{5^3\cdot 2^7}{11^2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{5^3\cdot 2^7}{11^2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5^3\cdot 2^7}{11^2}\right)}+C$$

$$\text{IV. } \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$/\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x/$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2 \cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}} dx = \underline{-\operatorname{ctg} x - 2x + C}$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2 \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \underline{2x - \operatorname{tg} x + C}$$

$$\int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x - \cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-\operatorname{ctg} x) + C = \underline{\frac{-\operatorname{ctg} x}{2} + C}$$

V $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\int f(x) = F(x) + C$

Pl.: $\int \cos(2x+1)\,dx = \frac{\sin(2x+1)}{2} + C$

$\int \sin(5x-7)\,dx = \frac{-\cos(5x-7)}{5} + C$

$\int \cos(4-9x)\,dx = \frac{\sin(4-9x)}{-9} + C$

$\int \sin(20x)\,dx = \frac{-\cos(20x)}{20} + C$

$\int \sqrt{5+x}\,dx = \int (5+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\frac{(5+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}}{1} + C$

$\int \sqrt[4]{-3x-4}\,dx = \int (-3x-4)^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{\frac{(-3x-4)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}}{-3} + C$

$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

VI. $\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

$\int 7\cos x + 5^x\,dx = \int 7\cos x\,dx + \int 5^x\,dx = 7\int \cos x\,dx + \int 5^x\,dx =$

$= 7(+\sin x) + \frac{5^x}{\ln 5} + C = -7\sin x + \frac{5^x}{\ln 5} + C$

VII $$\int f^{n}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$$

Pl.:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\int (x^2+10)^{30} \cdot 2x\, dx = \frac{(x^2+10)^{31}}{31} + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\; x\, dx = \frac{1}{2}\int \underset{f'}{2x}\, \underset{f^n}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int y^2 \sqrt[5]{6-y^3}\, dy = \frac{-1}{3}\int -3y^2 \sqrt[5]{6-y^3}\, dy = \frac{-1}{3}\cdot \frac{(6-y^3)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C$$

$$\int \frac{\log_5 x}{x}\, dx = \ln 5 \int \log_5 x \,\frac{1}{x\ln 5}\, dx = \ln 5\, \frac{(\log_5 x)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}\, dx = \int \underset{f}{(\ln x)^5} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}}\, dx = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}\, dx = \int \cos x \cdot (\sin x)^{-\frac{3}{5}}\, dx = \frac{(\sin x)^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + C$$

$$(\sin^2(x))^2$$

$$\underline{\text{VIII.}} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\overset{f'}{\cos x}}{\underset{f}{\sin x}}\,dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{x^4}{7+x^5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{7+x^5}\,dx = \frac{1}{5}\ln|7+x^5| + C$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| + C$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}\,\cancel{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C$$

$\underline{\text{IX.}}$ Parciális int.

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = x & v' = 1 \end{matrix}\right| = e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int x\cdot\sin 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = \sin 2x & u = \frac{-\cos 2x}{2} \\ v = x & v' = 1 \end{matrix}\right| = \frac{-\cos 2x}{2}\cdot x - \int \frac{-\cos 2x}{2}\cdot 1\,dx =$$

$$= \frac{-\cos 2x}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

Rac. tört fv

$$\int \frac{1}{2x+3} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x+3| + C$$

$$\int \frac{x+2}{x+1} \, dx = \int \frac{(x+1)+1}{x+1} \, dx = \int 1 + \frac{1}{x+1} \, dx = x + \ln |x+1| + C$$

$$\int \frac{x}{x+1} \, dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{x+1} \, dx = x - \ln |x+1| + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} \, dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} \, dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} \rightarrow \quad / \cdot x(x+1)$$

$$1 = (x+1) \cdot A + x \cdot B = Ax + A + Bx$$

$$\left. \begin{array}{l} x^1: \; A + B = 0 \\ x^0: \; A = 1 \end{array} \right\} \rightarrow A = 1, \; B = -1$$

$$\int \frac{3x-59}{(x+11)(2x-1)} \, dx = \int \frac{4}{x+11} + \frac{-5}{2x-1} \, dx = 4 \ln |x+11| - \frac{5}{2} \ln |2x-1| + C$$

$$\frac{3x-59}{(x+11)(2x-1)} = \frac{A}{(x+11)} + \frac{B}{(2x-1)} \quad / \cdot (x+11)(2x-1)$$

$$3x - 59 = A(2x-1) + B(x+11) = 2Ax - A + Bx + 11B$$

$$x: \; 3 = 2A + B \qquad x^0: \; -59 = -A + 11B \implies A = 4 \quad B = -5$$

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

Zárthelyi do

II A

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat: int.

$$\int_1^2 \frac{1-t^3}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2t^{1/2} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_1^2 \quad 2+2$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}-12}{7} \quad 2$$

$$\int_0^{\pi} 2\sin t\sqrt[4]{\cos t+2}\,dt = \left[-\frac{8}{5}(\cos t+2)^{\frac{5}{4}}\right]_0^{\pi} \quad 3$$

$$= \frac{8}{5}\left(3^{5/4}-1\right) \quad 2$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{2e^t+e}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(2e^t+e\right)\Big]_0^1 \quad 3$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3e}{e+2} \quad 2$$

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

Zárthelyi do

II B

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}+t^3}{\sqrt[3]{\sqrt{t}}}\,dt = \left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{23}t^{\frac{23}{6}}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}2^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{23}2^{\frac{23}{6}} - \frac{93}{92}$$

$$\int_0^1 e^t\sqrt[3]{e^t+2}\,dt = \left[\frac{3}{4}\left(e^t+2\right)^{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left[(e+2)^{\frac{4}{3}} - 3^{\frac{4}{3}}\right]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2\sin t+1}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(2\sin t+1)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

Zárthelyi dol

II C

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int_1^2 \frac{1-\sqrt[4]{t^3}}{t^3}\,dt = \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{4}{5}t^{-\frac{5}{4}}\right]_1^2$$

$$= \frac{16-17\sqrt[4]{2}}{40\sqrt[4]{2}}$$

$$\int_0^1 t^2\sqrt[3]{t^3+3}\,dt = \left[\frac{1}{3}\left(t^3+3\right)^{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{4^4} - \sqrt[3]{3^4}\right)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos t}{3\sin t+1}\,dt = \left[\frac{2}{3}\ln|3\sin t+1|\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 4$$

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

Zárthelyi dolgozat

II D

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int_1^2 \frac{2t+t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{64\sqrt{2}-32}{15}$$

$$\int_0^1 t\sqrt[4]{e-t^2}\,dt = \left[-\frac{2}{5}\left(e-t^2\right)^{\frac{5}{4}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{5}\left[(e-1)^{5/4} - e^{5/4}\right]$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt[4]{3+2\cos t}}\,dt = \left[-\frac{2}{3}\left(3+2\cos t\right)^{\frac{3}{4}}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(1-5^{3/4}\right)$$

A

3

2. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következőképpen adott:

$$f(t)=\begin{cases} c\,t(1-t^2), & \text{ha } 0<t<1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

i.) Vázolja az $f(t)$ függvény grafikonját

ii.) Határozza meg a C paraméter értékét

iii.) Határozza meg az eloszlás függvényt

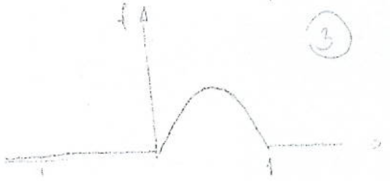
iv.) Vázolja az eloszlás függvényt

v.) Számítsa ki a következő valószínűségeket: $P(\xi<1/2)$, $P(\xi>1)$, $P(1/2<\xi<1)$

(26 pont)

(2+3) (2) (1)

$$1=c\int_0^1 (t-t^3)\,dt = c\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = c\,\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad c=4$$ (1)



(3)

(3)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2x^2-x^4, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

(1) (3) (1)

$P(\xi<\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ (2)

$P(\xi>1)=0$ (2)

$P(\frac{1}{2}<\xi<1) = 1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$ (2)

2. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következőképpen adott:

$$f(t)=\begin{cases} c\,t\,(1-t)(2+t), & \text{ha } 0<t<1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

i.) Vázolja az $f(t)$ függvény grafikonját

ii.) Határozza meg a C paraméter értékét

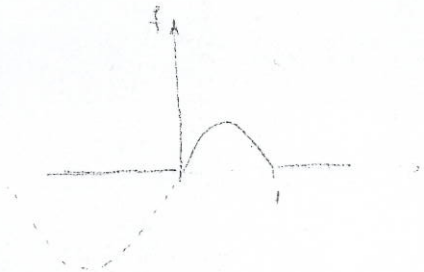
iii.) Határozza meg az eloszlás függvényt

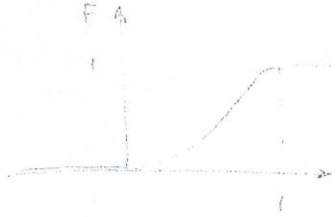
iv.) Vázolja az eloszlás függvényt

v.) Számítsa ki a következő valószínűségeket: $P(\xi<1/2)$, $P(\xi>1)$, $P(1/2<\xi<1)$

(26 pont)

$$1=c\int_0^1 (2t-t^2-t^3)\,dt = c\,\frac{5}{12} \quad\rightarrow\quad c=\frac{12}{5}=2{,}4$$





$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{5}(12x^2-4x^3-3x^4), & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$P(\xi<\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{37}{80}$

$P(\xi>1) = 0$

$P(\frac{1}{2}<\xi<1) = 1-\frac{37}{80}=\frac{43}{80}$

A

3. Egy dobozban 9 golyó van, amelyek között 5 kék a többi fehér. Találomra egymás után visszatevéssel 3 golyót kiveszünk .
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között lesz kék?
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között legfeljebb egy kék lesz?

(8 pont)

$N=9$
$s=5$ 2
$N-s=4$
$n=3$
k

$p_k = P(\xi=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{N}\right)^k\left(\frac{N-s}{N}\right)^{n-k}$ 2

$p_1+p_2+p_3$ 2

p_0+p_1 2

B

3. Egy dobozban 5 kék és 4 barna golyó van. Találomra egyszerre 3 golyót kiveszünk.
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy kék lesz?
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között legalább egy kék lesz?

(8 pont)

$N=9$
$s=5$ kék 2
$N-s=4$
$n=3$
k

$p_k = P(\xi=k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ 2

$P(\xi=1)=p_1=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}$

$P(\xi\ge 1)=p_1+p_2+p_3=1-p_0=1-\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$

3. Egy dobozban 9 golyó van, amelyek között 5 fekete a többi fehér. Találomra egymás után visszatevés nélkül 3 golyót kiveszünk .
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között nem lesz fehér?
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között legfeljebb két fekete lesz?

(8 pont)

$N=9$
$s=5$ fekete
$N-s=4$
$n=3$
k

$p_k = P(\xi=k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$P(\xi=3)=p_3$

$P(\xi\le 2)=p_0+p_1+p_2=1-p_3$

D

3. Egy dobozban 9 golyó van, ebből 4 barna a többi zöld. Találomra kiveszünk 3 golyót viszatevéssel.

Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között nem lesz két zöld?
Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között legalább két zöld lesz?

(8 pont)

$N=9$
$s=5$ 2
$N-s=4$
$n=3$
$k=$

$p_k = P(\xi=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{N}\right)^k\left(\frac{N-s}{N}\right)^{n-k}$ 2

$P(\xi\ne 2)=1-P(\xi=2)=1-p_2$

$P(\xi\ge 2)=p_2+p_3$

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t \le -1 \\ \frac{t+1}{2}, & -1 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

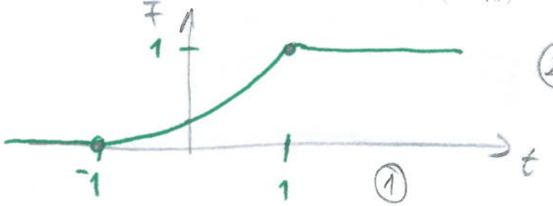
3. Egy ξ valószínűségi változó eloszlás függvénye: $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{ha } t \le -1, \\ \frac{(t+1)^2}{4}, & \text{ha } -1 < t \le 1, \\ 1, & \text{ha } t > 1. \end{cases}$

$P(0 \le \xi < 2)$

Vázolja az eloszlás függvényt! Számítsa ki $P\left(\cancel{\xi <} \frac{1}{10}\right)$ értékét és az eloszlás várható értékét és szórását!

(14 pont)

2



1

1

$$P(0 \le \xi < 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^2 + t\, dt = \frac{1}{3}$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^3 + t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

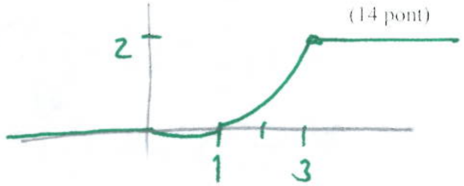
$$D(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. Egy ξ valószínűségi változó eloszlás függvénye: $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ \frac{(t-1)^2}{4}, & \text{ha } 0 < t \le 3, \\ 1, & \text{ha } t > 3. \end{cases}$

Vázolja az eloszlás függvényt! Számítsa ki $P\left(0 \le \xi < \frac{3}{2}\right)$ értékét és az eloszlás várható értékét és szórását!

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{t-1}{2}, & 0 < t \le 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

(14 pont)



$$E(\xi) = \frac{9}{4}$$

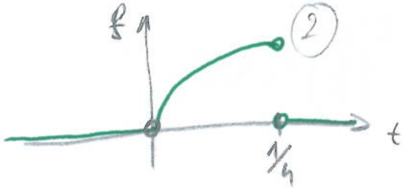
$$E(\xi^2) = \frac{45}{8}$$

$$D^2(\xi) = \frac{9}{16} \rightarrow D(\xi) = \frac{3}{4}$$

$$P\left(0 \le \xi < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{16}$$

3. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & \text{ha } 0<t<\dfrac{1}{4},\\ 0, & \text{ha } t>\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Vázolja a sűrűségfüggvényt! Számítsa ki $P\left(\xi<\frac{1}{10}\right)$ értékét és az eloszlás várható értékét és szórását! (14 pont)



$$P\left(\xi<\frac{1}{10}\right)=\int_{-\infty}^{1/10} f(t)dt=\int_0^{1/10} t^{-\frac{1}{2}}=2\left[t^{\frac{1}{2}}\right]_0^{1/10}=\frac{2}{\sqrt{10}}$$ 3

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot f(t)dt=\int_0^{1/4}\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1/4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$ 3

$$E(\xi^2)=\int_0^{1/4} t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{1/4} t^{3/2}dt=\frac{2}{5}\left[t^{\frac{5}{2}}\right]_0^{1/4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{80}$$ 3

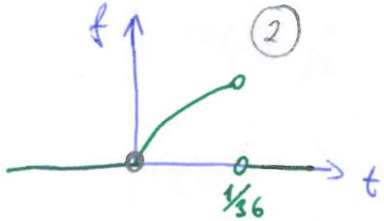
$$D^2(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\frac{1}{80}-\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{2^4\cdot 5}-\frac{1}{2^4\cdot 3^2}=\frac{9-5}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{4}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}$$

$$D^2(\xi)=\frac{1}{4\cdot 9\cdot 5}$$ 2

$$D(\xi)=\frac{1}{6\sqrt{5}}$$ 1

3. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } t<0,\\ \dfrac{3}{\sqrt{t}}, & \text{ha } 0<t<\dfrac{1}{36},\\ 0, & \text{ha } t>\dfrac{1}{36}.\end{cases}$

Vázolja a sűrűségfüggvényt! Számítsa ki $P\left(\xi<\frac{1}{10}\right)$ értékét és az eloszlás várható értékét és szórását! (14 pont)



$$P\left(\xi<\frac{1}{10}\right)=\int_{-\infty}^{1/10} f(t)dt=\int_0^{1/36}\frac{3}{\sqrt{t}}dt=6\left[\sqrt{t}\right]_0^{1/36}=1$$ 3

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot f(t)\,dt \qquad E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\cdot f(t)\,dt$$

$$D^2(\xi)=Var.^2(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)$$

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{0} t\cdot 0\,dt+\int_0^{1/36} t\cdot\frac{3}{\sqrt{t}}dt+\int_{1/36}^{+\infty} t\cdot 0\,dt=3\int_0^{1/36}\frac{t}{\sqrt{t}}dt=3\int_0^{1/36}\sqrt{t}\,dt=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1/36}=\frac{2}{6^3}$$ 3

$$E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{0} t^2\cdot 0\,dt+\int_0^{1/36} t^2\cdot\frac{3}{\sqrt{t}}dt+\int_{1/36}^{+\infty} t^2\cdot 0\,dt=3\cdot\int_0^{1/36} t^{\frac{3}{2}}dt=3\cdot\frac{2}{5}\left[t^{\frac{5}{2}}\right]_0^{1/36}=\frac{6}{5\cdot 6^5}$$ 3

$$D^2(\xi)=\frac{6}{5\cdot 6^5}-\left(\frac{2}{6^3}\right)^2=\frac{16}{5\cdot 6^6}=\frac{1}{5\cdot 3^4\cdot 6^2}$$ 2

$$D(\xi)=\frac{1}{54\sqrt{5}}$$ 1

4. Egy dobozban 9db hibátlan és 3 db selejtes alkatrész van. Kiveszünk visszatevéssel 5 db-ot. Mi a valószínűsége annak, hogy
a. a mintában nincs selejtes,
b. a minta selejtes,
c. a mintában legfeljebb 2 selejtes van.
d. az első három db selejtes alkatrész lesz.

(11 pont)

d.) $P(A)=\left(\frac{3}{9}\right)^3$ – visszatevéssel

N: 12
n: 5
s: 3 (selejtesek száma)
k: ?

$$P(k)=\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$p=\frac{s}{N}\ ;\ q=1-p$$

a.) $P(k=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{3}{12}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{12}\right)^5$

b.) $P(k=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{3}{12}\right)^5\cdot\left(\frac{9}{12}\right)^0$

c.) $P(k\leq 2)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)$

Mj.:
$P(\text{összes eset})=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)+P(k=3)+P(k=4)+P(k=5)=1$

$P(\text{összes eset})=P(0\leq k\leq 5)=1$

pl.: $P(k\geq 4)=P(k=4)+P(k=5)$

$P(k\leq 4)=P(0\leq k\leq 4)=1-P(k=4)-P(k=5)$

4. Egy dobozban 10db hibátlan és 4 db selejtes alkatrész van. Kiveszünk visszatevés nélkül 5 db-ot. Mi a valószínűsége annak, hogy
a. a mintában nincs selejtes,
b. a minta selejtes,
c. a mintában legfeljebb 1 selejtes van,
d. az első három db selejtes alkatrész lesz.

(11 pont)

d.) $P(A)=\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}$ visszatevés nélkül

$$P(k)=\frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N: 14 = 10+4
n: 5
s: 4 (selejtek száma)
k: ?

a.) $P(k=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{10}{5}}{\binom{14}{5}}=\frac{\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot\frac{10!}{5!(10-5)!}}{\frac{14!}{5!(14-5)!}}$

b.) $P(k=5)=0$, mert csak 4 db selejtes alkatrészünk van és visszatevés nélkül húzunk, így nem tudunk 5 db selejtest kiválasztani

c.) $P(k\leq 1)=P(k=0)+P(k=1)$

4. Egy dobozban 8db hibátlan és 6 db selejtes alkatrész van. Kiveszünk visszatevés nélkül 5 db-ot. Mi a valószínűsége annak, hogy
a. a mintában nincs selejtes,
b. a minta selejtes,
c. a mintában legfeljebb 1 selejtes van,
d. az első három db selejtes alkatrész lesz.

(11 pont)

d.) $P(A)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{7}{12}$

$N=8+6$
$n=5$
$s=6$
$k=?$

$$P(k)=\frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

a.) $$P(k=0)=\frac{\binom{6}{0}\binom{8}{5}}{\binom{14}{5}}$$

b.) $$P(k=5)=\frac{\binom{6}{5}\binom{8}{0}}{\binom{14}{5}}$$

c.) $P(k\le 1)=P(k=0)+P(k=1)$

4. Egy dobozban 10db hibátlan és 5 db selejtes alkatrész van. Kiveszünk visszatevéssel 5 db-ot. Mi a valószínűsége annak, hogy
a. a mintában nincs selejtes,
b. a minta selejtes,
c. a mintában legfeljebb 2 selejtes van,
d. az első három db selejtes alkatrész lesz.

(11 pont)

d.) $P(A)=\left(\frac{5}{15}\right)^3$

$N=10+5$
$n=5$
$s=5$
$k=?$

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$p=\frac{s}{N}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

$q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

a.) $P(k=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5$

b.) $P(k=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0$

c.) $P(k\le 2)=P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)$