

Többváltozós függvények integrálja

Definíció:

Legyen $A, A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^m$, $P = (A_1, \dots, A_n)$ halmaz n -est az A halmaz egy beosztásának nevezzük, ha



$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A,$$

- Az $A_1, \dots, A_n$ halmazok páronként egymásba nem nyúlóak.

A P beosztás finomsága a legnagyobb átmérőjű halmaz átmérője.

Jele: $\|P\|$

Az A halmaz egy (P_n) beosztássorozatát normális beosztássorozatnak nevezzük, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0.$$

Definíció:

Legyen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, P egy beosztása az A halmaznak. Legyen $\xi_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$) alappontok rendszere. Az f függvény P beosztáshoz és $\xi := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ alappontokhoz tartozó integrálközelítő összege

$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) m(A_i)$$

szám, ahol $m(A_i)$ az A_i halmaz mértéke.

Speciálisan:

$m=2$ esetén $m(A)$ az A halmaz területe,

$m=3$ esetén $m(A)$ az A halmaz térfogata.

Definíció:

Legyen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Az f függvényt Riemann-integrálhatónak nevezzük az A halmazon, ha az A halmaz minden (P_n) normális beosztássorozata és a hozzá tartozó ξ alappontrendszer esetén a $(\sigma(f, P_n, \xi))$ (integrálközelítő összeg) sorozat konvergens.

Az integrálközelítő összeg sorozatok közös határértékét f függvény Riemann-integráljának (vagy határozott integráljának) nevezzük az A halmazon.

Jelölés:

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \int_A f$$

Definíció:

A $T := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ halmazt m -dimenziós téglának nevezzük

Tétel:

Legyen T egy m -dimenziós tégl. Ha az $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos és Riemann-integrálható függvény a T halmazon, akkor

$$\int_T f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \left(\int_{a_m}^{b_m} f(\underline{x}) dx_m \right) \dots dx_1.$$