Definíció: A

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

valószínűségi változók összeséget mintának nevezzük, ha azonos eloszlásúak.

A statisztikai minta jellemzői

Átlag (mintaközép):

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \tag{5.5}$$

A minta elemeit sorba rendezzük. ξ_1^* jelölje a legkisebbet. A rendezett minta:

$$\xi_1^* \leq \xi_2^* \leq \ldots \leq \xi_n^*. \tag{5.6}$$

A medián tapasztalati megfelelője $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ esetén.

$$med\{\xi_i\} = \begin{cases} \xi_{m+1}^*, & \text{ha } n = 2m+1, \\ \dfrac{\xi_m^* + \xi_{m+1}^*}{2}, & \text{ha } n = 2m. \end{cases}$$

Medián abszolút eltérés:

$$MAD\{\xi_i\} = med\{|\xi_i - med\{\xi_i\}|\}.$$

Mintaterjedelem: $\xi_n^* - \xi_1^*$.

Tapasztalati momentumok: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k}{n}$.

Tapasztalati szórásnégyzet és korrigáltja:

$$s_n{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi}\,)^2}{n}, \qquad s_n^*{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi}\,)^2}{n-1}.$$

Szórási együttható: $\dfrac{s_n}{\overline{\xi}}$

órás nagysága az értékekhez képest, $\xi > 0$).

Tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le \xi_1^*, \\ \dfrac{k}{n} & \text{, ha } \xi_k^* < x \le \xi_{k+1}^* \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 1 & \text{, ha } \xi_n^* < x. \end{cases}$$

BECSLESELMÉLET

Definíció: Legyen adott a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \vartheta)$ sűrűségfüggvénnyel. A $\hat{\vartheta}_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (röviden $\hat{\vartheta}_n$) a ϑ paraméter *torzítatlan* becslése, ha

$$E(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta. \tag{6.15}$$

$\hat{\vartheta}_n$ a ϑ paraméter *aszimptotikusan torzítatlan* becslése, ha

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta. \tag{6.16}$$

Megjegyzés: 1. Az átlag a várható érték torzítatlan becslése.

Definíció: Legyen adott a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \vartheta)$ sűrűségfüggvénnyel. A minta *likelihood függvénye*:

$$L(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \vartheta). \tag{6.19}$$

A minta *loglikelihood függvénye*:

$$l(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = -\ln(L(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)). \tag{6.20}$$

Definíció: Legyen adott a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta f sűrűségfüggvénnyel. A $\hat{\vartheta}_n$ *maximum likelihood becslés* a ϑ paraméterre, ha

$$\max_{\vartheta} L(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = L(\hat{\vartheta}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{6.25}$$

Megjegyzés: 1. Ezzel ekvivalens, hogy

$$\min_{\vartheta} l(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = l(\hat{\vartheta}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{6.26}$$

Ha a minta független, akkor

$$L(\vartheta; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \vartheta) = f(\xi_1; \vartheta) \cdots f(\xi_n; \vartheta), \tag{6.27}$$

$$\max_{\vartheta} \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; \hat{\vartheta}_n), \tag{6.28}$$

$$\min_{\vartheta} -\sum_{i=1}^{n} \ln(f(\xi_i; \vartheta)) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(f(\xi_i; \hat{\vartheta}_n)). \tag{6.29}$$

Legyen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma_0^2), \tag{6.57}$$

független minta. Készítsünk $P(x_a < \mu < x_b) = 1 - \alpha$ konfidenciaintervallumot a várható értékre, ha a σ_0 szórás ismert!

Ez alapján (standard esetben) a legrövidebb intervallum, akkor adódik, ha a 0-ra szimmetrikus.

$$P\left(\bar{\xi} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{\xi} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha, \tag{6.61}$$

ahol a σ_0 ismert és $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. □

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma^2), \tag{6.63}$$

független minta. Készítsünk $P(x_a < \mu < x_b) = 1 - \alpha$ konfidenciaintervallumot a várható értékre, ha a σ szórás nem ismert!

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^\star}\sqrt{n} \sim t_{n-1}. \tag{6.64}$$

Hasonólan az előzőhöz

$$P\left(\bar{\xi} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n^\star}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{\xi} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n^\star}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha, \tag{6.65}$$

ahol az $F_{n-1}(t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. □

6.5. FELADAT: Legyen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma^2), \tag{6.66}$$

független minta. Készítsünk $P(x_a < \sigma^2 < x_b) = 1 - \alpha$ konfidenciaintervallumot a szórásnégyzetre!

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{6.67}$$

Ez alapján meghatározunk egy intervallumot, de ez általában nem a legrövidebb, hiszen a χ^2-eloszlások nem szimmetrikusak (a legrövidebb nehéz feladat).

$$P\left(\frac{ns_n^2}{b} \le \sigma^2 \le \frac{ns_n^2}{a}\right) = 1 - \alpha,$$

ahol a $\chi^2_{n-1}(a) = \dfrac{\alpha}{2}$ és $\chi^2_{n-1}(b) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. □

HIPOTEZISVIZSGÁLAT

Tekintsünk egy véletlen jelenséget, amelyet jellemez az $F(.;\vartheta)$ eloszlásfüggvény, ahol ϑ (skalár vagy vektor) a paramétertérhez tartozik. A hipotézis egy egyszerű álllítás, hogy $F(.,\vartheta)$ jellemzi-e a véletlen jelenséget. Az állításnak a következő kétféle típusa van:

1. Ismert az $F(.,\vartheta)$ alakja a ϑ kivételével.
2. Az F alakja ismeretlen.

Definíció: Az $F(.,\vartheta)$ egy eloszlásösszesség a mintatéren, ahol a $\vartheta \in \Theta$ paraméter. A

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \vartheta \in \Theta_0, \qquad \textit{alaphipotézis}, \\ H_1 &: \quad \vartheta \in \Theta_1, \qquad \textit{ellenhipotézis} \text{ (alternatív).} \end{aligned} \tag{7.17}$$

ahol $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Megjegyzés: A hipotézis aszerint egyszerű vagy összetett, hogy Θ_i $(i = 1, 2)$ egy vagy több elemű.

Definíció: Legyen $\xi \in \mathcal{X}$, ahol $\mathcal{X}$ a mintatér és $C \subset \mathcal{X}$. A C halmazt *kritikus tartomány*nak nevezzük, ha teljesül rá, hogy

1. Ha $\xi \in C$, akkor elvetjük a H_0 alaphipotézist és elfogadjuk a H_1 ellenhipotézis.
2. Ha $\xi \notin C$, akkor elfogadjuk a H_0 alaphipotézist.

Definíció: Ha adott C kritikus tartomány esetén elfogadjuk vagy elvetjük a hipotézist a paramťerre vagy az F alakjára azt *statisztikai próbá*nak nevezzük.

Definíció: Egy próbát α-szintűnek *(szignifikancia szint)* nevezünk, ha

$$P(\xi \in C|H_0) \leq \alpha. \tag{7.18}$$

A $P(\xi \in C|H_0)$ valószínűséget *elsőfajú hibá*nak nevezzük, a $P(\xi \notin C|H_1)$ valószínűséget pedig *másodfajú hibá*nak.

1. **Egymintás u-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $(\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2))$, független minta és σ^2 ismert.

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \mu = \mu_0, \\ H_1 : \quad & \mu \neq \mu_0. \end{aligned} \tag{7.43}$$

$$L_\xi(H_0, H_1) = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} n(\bar{\xi} - \mu_0)^2\right), \tag{7.44}$$

azaz elutasítjuk H_0-t, ha $(\bar{\xi} - \mu_0)^2$ nagy. Ez nem meglepetés, hiszen

$$u = \frac{\bar{\xi} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1). \tag{7.45}$$

2. **Kétmintás u-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, $(\xi_i \sim N(\mu_1, \sigma^2))$, és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, $(\eta_i \sim N(\mu_2, \sigma^2))$, független minta és σ^2 ismert.

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \mu_1 = \mu_2, \\ H_1 : \quad & \mu_1 \neq \mu_2. \end{aligned} \tag{7.46}$$

$$L_\xi(H_0, H_1) = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} \frac{mn}{m+n} (\bar{\xi} - \bar{\eta})^2\right), \tag{7.47}$$

azaz elutasítjuk H_0-t, ha $(\bar{\xi} - \bar{\eta})^2$ nagy. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0, 1). \tag{7.48}$$

A kritikus tartomány ugyanúgy készíthető, mint az egymintás esetben.

3. **Egymintás t-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ($\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2)$), független minta és σ^2 ismeretlen.

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = \mu_0, \\ H_1: &\quad \mu \neq \mu_0. \end{aligned} \tag{7.49}$$

$$L_\xi(H_0, H_1) = \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\dfrac{n}{2}}, \tag{7.50}$$

ahol

$$t = \frac{\bar{\xi} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}, \tag{7.51}$$

azaz elutasítjuk H_0-t, ha t^2 nagy. Ekkor

$$t = \frac{\bar{\xi} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n} \sim t_{n-1}. \tag{7.52}$$

4. **Kétmintás t-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, ($\xi_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$), és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ($\eta_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$), független minta és σ^2 ismeretlen.

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu_1 = \mu_2, \\ H_1: &\quad \mu_1 \neq \mu_2. \end{aligned} \tag{7.53}$$

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\dfrac{(m-1){s_m^*}^2 + (n-1){s_n^*}^2}{m+n-2}}}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2}. \tag{7.54}$$

A kritikus tartomány ugyanúgy készíthető, mint az egymintás esetben.

Megjegyzés: 1. Ha $\sigma_1 \neq \sigma_2$, de $m = n$, akkor alkalmazható az egyesített t-próba, hiszen

$$\xi_i - \eta_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2). \tag{7.55}$$

5. χ^2**-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ($\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2)$), független minta és σ^2 ismeretlen.

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma = \sigma_0, \\ H_1 &: \quad \sigma \neq \sigma_0. \end{aligned} \tag{7.59}$$

$$L_\xi(H_0, H_1) = \left(\frac{Y}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{Y-n}{2}\right), \tag{7.60}$$

ahol

$$Y = \frac{n s_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{7.61}$$

A kritikus tartomány ugyanúgy készíthető, mint a konfidenciaintervallum.

6. F**-próba.**

Adott a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, ($\xi_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$), és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ($\eta_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$), független minták (egyástól is).

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma_1 = \sigma_2, \\ H_1 &: \quad \sigma_1 \neq \sigma_2. \end{aligned} \tag{7.62}$$

$$L_\xi(H_0, H_1) = \frac{m^{m/2} n^{n/2}}{(m+n)^{(m+n)/2}} \frac{\left(1 + \frac{m-1}{n-1} F\right)^{(m+n)/2}}{\left(\frac{m-1}{n-1} F\right)^{m/2}}, \tag{7.63}$$

ahol

$$F = \frac{{s_m^*}^2}{{s_n^*}^2} \sim F_{m-1,n-1}, \tag{7.64}$$

Általánosabban: legyen $A_1, A_2, \dots, A_r$ teljes eseményrendszer (olyan események, amik közül pontosan az egyik következik be, azaz uniójuk a teljes eseménytér, páronkénti metszetük üres), $p_1, p_2, \dots, p_r$ pedig olyan nemnegatív számok, melyek összege 1.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \dots, r$-re.

$H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq p_k$ valamelyik $k = 1, 2, \dots, r$-re.

Ezekben a feladatokban χ^2**-próbát, azon belül illeszkedésvizsgálatot** végezhetünk.

- n független megfigyelést végzünk.
- N_k: hányszor következett be A_k, vagyis az A_k gyakorisága.
- Ha van k, hogy $N_k < 5$: néhány osztályt össze kell vonnunk, hogy a próbát alkalmazhassuk (vagyis A_j és A_k helyett $A_j \cup A_k$-t és $p_j + p_k$-t tekintjük, és ezután végezzük el a tesztet).
- Próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

2.4. Függetlenségvizsgálat

Ez az eljárás annak eldöntésére szolgál, hogy két szempont szerinti osztályba sorolás független-e egymástól. Például: egy véletlenszerűen választott embert iskolai végzettség és jövedelmi kategória szerint osztályokba sorolva független-e a két szempont.

Két szempont szerint soroljuk osztályokba a megfigyeléseket.

Első szempont: $A_1, \ldots, A_r$ (teljes eseményrendszer, pontosan az egyik következik be, például: iskolai végzettség szerinti kategóriák).

Második szempont: $B_1, \ldots, B_s$ (ez egy másik teljes eseményrendszer, például: jövedelmi kategóriák).

H_0**: a két szempont független** egymástól, azaz $\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$ minden i, j-re.

H_1: a nullhipotézis nem igaz, a két szempont között **összefüggés** van.

N_{ij}: hány olyan megfigyelés van, melyre A_i és B_j teljesül.

$N_{i.} = \sum_{j=1}^{s} N_{ij}$ (azaz az A_i gyakorisága); $N_{.j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$ (azaz B_j gyakorisága); n pedig az összes megfigyelés száma. Ekkor a próbastatisztika, mely H_0 mellett $f = (r-1)(s-1)$ szabadsági fokú χ^2-eloszláshoz tart:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i.}N_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i.}N_{.j}}{n}}.$$

Ha a függetlenség teljesül, akkor a $\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$ egyenletben a valószínűségeket a relatív gyakoriságokkal helyettesítve:

$$\frac{N_{ij}}{n} \approx \frac{N_{i.}}{n} \cdot \frac{N_{.j}}{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad N_{ij} \approx \frac{N_{i.}N_{.j}}{n}.$$

Ebből adódik, hogy a χ^2 számlálója a nullhipotézistől való eltérést méri.

A szabadsági fok $f = (r-1)(s-1)$.

c_{krit}: az f szabadsági fokú χ^2-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

- $\chi^2 < c_{\text{krit}}$ (azaz a $p \geq \alpha$): elfogadjuk H_0-t, **nem találtunk szignifikáns összefüggést** a szempontok között.
- $\chi^2 > c_{\text{krit}}$ (azaz a $p < \alpha$): elutasítjuk H_0-t, az adatok **szignifikáns összefüggést** mutatnak.

Ha $r = s = 2$, a próbastatisztika az alábbi egyszerűbb alakra hozható:

$$\chi^2 = \frac{n\left(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}\right)^2}{N_{1.}N_{2.}N_{.1}N_{.2}}.$$

Regressziós egyenesek összehasonlítása

A regressziós egyenes meghatározása: Adott (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Keressük azt az egyenest,

$$y = bx + a, \tag{7.84}$$

amelyre

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)^2 \tag{7.85}$$

minimális.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \tag{7.86}$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2, \quad Q_y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2, \quad Q_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}. \tag{7.87}$$

Ekkor a regressziós egyenes együtthatói

$$b_{yx} = \frac{Q_{xy}}{Q_x}, \quad a_{yx} = \bar{y} - b_{yx}\bar{x}. \tag{7.88}$$

Táblázatok

Standard normális eloszlás értékek.

’ x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9924	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9986	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.4	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996
3.5	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998

χ^2-eloszlás értékek.

n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.950	0.975	0.990	0.995
1	.39e-4	.16e-3	.98e-3	.39e-2	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	5.991	7.377	9.210	10.597
3	.0717	.1148	.2158	.3518	7.814	9.348	11.345	12.838
4	.2069	.2971	.4844	.7107	9.487	11.143	13.277	14.860
5	.4117	.5543	.8312	1.1455	11.070	12.833	15.086	16.750
6	.67573	.87209	1.2373	1.6354	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.98926	1.2390	1.6899	2.1673	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.0337	8.8972	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.6427	9.5425	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.2604	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.8862	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.43	104.21
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.34	129.56	135.81	140.17

t-eloszlás értékek.

n	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707

n	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
41	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
51	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
61	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
71	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
81	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
91	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
101	1.2900	1.6601	1.9837	2.3638	2.6254
201	1.2858	1.6525	1.9718	2.3450	2.6005
301	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923
401	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5881
501	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
601	1.2830	1.6474	1.9639	2.3326	2.5840
701	1.2828	1.6470	1.9634	2.3317	2.5829
801	1.2826	1.6468	1.9629	2.3310	2.5820
901	1.2825	1.6465	1.9626	2.3305	2.5813
1001	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5807
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

F-eloszlás értékek.

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077