

Adottak a következő állítások:

P_1 : Azok az autótulajok, akiknek BMW-jük van, csúnya pillantásokat kapnak a többiektől.

P_2 : Van olyan autótulajdonos, aki jóindulatú.

P_3 : Mindenki, aki csúnya pillantásokat kap vagy gyorsshajtásért büntetik, rosszindulatú lesz.

C : Egyeseknek se BMW-jük nincs, se a gyorsshajtásért nem büntették.

1. Formalizáld az állításokat!
2. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy P_1, P_2, P_3 logikai következménye a C !

Megoldás:

1. $A(x)$: x autótulaj
 $B(x)$: x -nek BMW-je van
 $Cs(x)$: x csúnya pillantásokat kap
 $J(x)$: x jóindulatú
 $Gy(x)$: x -et gyorsshajtásért büntetik

P_1 : $\forall x (A(x) \wedge B(x) \Rightarrow Cs(x))$

P_2 : $\exists x (A(x) \wedge J(x))$

P_3 : $\forall x (Cs(x) \vee Gy(x) \Rightarrow \neg J(x))$

C : $\exists x (\neg B(x) \wedge \neg Gy(x))$

2. KNF:

P_1 : $\forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee Cs(x))$

P_2 : $A(c) \wedge J(c)$

P_3 : $\forall x (\neg Cs(x) \vee \neg J(x)) \wedge \forall x (\neg Gy(x) \vee \neg J(x))$

$\neg C$: $\forall x (B(x) \vee Gy(x))$

Rezolúcióban ($G(x)=A(x)$, $J(x)=B(x)$, $A(x)=Cs(x)$, $B(x)=\neg J(x)$, $L(x)=Gy(x)$)

3. Rezolúció:

1 :	$\neg G(x) \vee \neg J(x) \vee A(x)$
2 :	$G(c)$
3 :	$\neg B(c)$
4 :	$\neg A(x) \vee B(x)$
5 :	$\neg L(x) \vee B(x)$
6 :	$J(x) \vee L(x)$
7 (3, 4) :	$\neg A(c)$
8 (1, 7) :	$\neg G(c) \vee \neg J(c)$
9 (2, 8) :	$\neg J(c)$
10 (6, 9) :	$L(c)$
11 (5, 10) :	$B(c)$
12 (3, 11) :	$\square$

Adottak a következő állítások:

P1 : Akinek melege van, az részeg vagy melegen van felöltözve.

P2 : Bárki, aki melegen van öltözve, prémes ruhadarabot is hord.

P3 : Minden informatikusnak van robotkosztüme.

P4 : Egyik robotkosztüm sem prémes. (Azaz aki robotkosztümöt hord, az nem hord prémes dolgot.)

C : Ha egy informatikusnak melege van, akkor nyilvánvalóan részeg.

1. Formalizáld az állításokat!

2. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy P1....P4 logikai következménye a C!

Adottak a következő elsőrendű állítások:

P_1 : Bárki, aki macskát tart, de nem szereti a dorombolást, bezárja a hálósobája ajtaját.

P_2 : Aki szereti a dorombolást, az nem szereti a death metalt.

P_3 : Van olyan, aki a hálósobája ajtaját nyitva tartja.

C : Nincs olyan macskatartó, aki szeretné a death metalt.

1. Formalizáld az állításokat!

2. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy P_1, P_2, P_3 logikai következménye a C !

Megoldás:

$M(x)$: x macskát tart

$D(x)$: x szereti a dorombolást

$A(x)$: x bezárja a hálósobája ajtaját

$DM(x)$: x szereti a death metalt

P_1 : $\forall x(M(x) \wedge \neg D(x) \Rightarrow A(x))$

P_2 : $\forall x(D(x) \Rightarrow \neg DM(x))$

P_3 : $\exists x \neg A(x)$

C : $\neg \exists x(M(x) \wedge DM(x))$

KNF:

P_1 : $\forall x(\neg M(x) \vee D(x) \vee A(x))$

P_2 : $\forall x(\neg D(x) \vee \neg DM(x))$

P_3 : $\neg A(c)$

$\neg C$: $M(c)$

$DM(c)$

Rezolúció:

- 1 : $\neg M(x) \vee D(x) \vee A(x)$
- 2 : $\neg D(x) \vee \neg DM(x)$
- 3 : $\neg A(c)$
- 4 : $M(c)$
- 5 : $DM(c)$
- 6 (1, 4) : $D(c) \vee A(c)$
- 7 (3, 6) : $D(c)$
- 8 (2, 7) : $\neg DM(c)$
- 9 (5, 8) : $\square$

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^1, g^2
- Predikátumok: P^1, Q^2

Az alábbi karaktersorozatok közül melyek formulái ennek a nyelvnek? Ha valamilyik nem formula, írd alá indoklást!

a. $P(c) \vee \neg \forall x Q(y, x)$

b. $Q(x, f(x)) \Rightarrow \exists y g(y, c)$

c. $\forall z \left(Q(g(z, z), z) \wedge \exists c \neg P(f(c)) \right)$

d. $\exists x \forall y P(f(g(y, x)))$

Megoldás:

- a. IGEN
- b. NEM (a g függvény nem (feltétlenül) logikai típusú)
- c. NEM (kvantor változót köthet csak, konstans nem)
- d. IGEN

Adott a következő formula az előző feladatban megadott nyelven:

$$(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(c, y)) \Rightarrow \forall x (\neg \forall y Q(x, y) \vee P(x))$$

1. Rajzold be a kvantorok hatáskörét és a kötési viszonyokat!
2. Határozd meg a formula paramétereinek halmazát!
3. Hozd a formulát KNF-re!

Megoldás:

2. $Par = \emptyset$

3.

$$\begin{aligned} & (\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(c, y)) \Rightarrow \forall z (\neg \forall w Q(z, w) \vee P(z)) \\ & \neg (\neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(c, y)) \vee \forall z (\exists w \neg Q(z, w) \vee P(z)) \\ & (\forall x P(x) \wedge \forall y \neg Q(c, y)) \vee \forall z (\exists w \neg Q(z, w) \vee P(z)) \\ & \forall x \forall y \forall z \exists w \left((P(x) \wedge \neg Q(c, y)) \vee \neg Q(z, w) \vee P(z) \right) \\ & \forall x \forall y \forall z \left((P(x) \wedge \neg Q(c, y)) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z) \right) \\ & \forall x \forall y \forall z \left(P(x) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z) \right) \wedge \forall x \forall y \forall z \left(\neg Q(c, y) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z) \right) \end{aligned}$$

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^1, g^2, h^3
- Predikátumok: P^1, Q^3

Az alábbi karaktersorozatok közül melyek formulái ennek a nyelvnek? Ha valamelyik nem formula, írd alá indoklást!

- a. $Q(x, f(y), h(y, z, z))$ b. $Q(P(x), f(y), f(z))$
- c. $f(h(x, y, z))$ d. $(P(x) \Rightarrow \forall y (Q(x, y, z) \wedge P(g(x, y))))$
- e. $\forall c Q(c, x, c)$ f. $\neg P(x \vee y)$

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^2, g^1
- Predikátumok: A^1, B^2, D^1

Az alábbi karaktersorozatok közül melyek formulái ennek a nyelvnek? Ha valamelyik nem formula, írd alá indoklást!

- a. $\exists c D(f(x, c)) \Leftrightarrow \forall y B(g(y), y)$ b. $\neg \exists z (A(f(z, c)) \wedge B(z, c))$
- c. $\forall x \forall y D(f(y, g(x)))$ d. $D(c) \Rightarrow \forall y (A(y) \vee \neg B(g(y)))$

Megoldás:

- a. c nem változó
b. OK
c. OK
d. B 2-paraméteres

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^2, g^1
- Predikátumok: A^1, B^2, D^1

Ezen a nyelven adott a következő formula:

$$\neg \exists x (A(x) \Rightarrow B(x, c)) \vee \neg \forall y (D(g(y)) \Rightarrow \neg \exists x A(f(x, y)))$$

1. Rajzold be a kvantorok hatáskörét és a kötési viszonyokat!
2. Határozd meg a formula paramétereinek halmazát!
3. Hozd a formulát KNF-re!

Megoldás:

2. $Par = \emptyset$

3.

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (A(x) \Rightarrow B(x, c)) \vee \neg \forall y (D(g(y)) \Rightarrow \neg \exists x A(f(x, y))) \\ & \forall x \neg (A(x) \Rightarrow B(x, c)) \vee \exists y \neg (D(g(y)) \Rightarrow \neg \exists x A(f(x, y))) \\ & \quad \forall x (A(x) \wedge \neg B(x, c)) \vee \exists y (D(g(y)) \wedge \exists x A(f(x, y))) \\ & \quad \forall x \exists y \exists z \left((A(x) \wedge \neg B(x, c)) \vee (D(g(y)) \wedge A(f(z, y))) \right) \\ & \quad \forall x \left((A(x) \wedge \neg B(x, c)) \vee (D(g(h(x))) \wedge A(f(i(x), h(x)))) \right) \\ & \quad \forall x (A(x) \vee D(g(h(x)))) \wedge \forall x (A(x) \vee A(f(i(x), h(x)))) \wedge \\ & \quad \forall x (\neg B(x, c) \vee D(g(h(x)))) \wedge \forall x (\neg B(x, c) \vee A(f(i(x), h(x)))) \end{aligned}$$

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^1
- Predikátumok: P^3, Q^1

Adott a következő formula:

$$P(x, c, f(x)) \vee \neg(\forall z Q(z) \oplus \forall y P(x, y, c))$$

1. Rajzold be a kvantorok hatáskörét és a kötési viszonyokat!
2. Határozd meg a formula paramétereinek halmazát!
3. Hozd a formulát KNF-re!

Megoldás:

2. $Par = \{x\}$

3.

$$\begin{aligned}
 & P(x, c, f(x)) \vee (\forall z Q(z) \Leftrightarrow \forall y P(x, y, c)) \\
 & P(x, c, f(x)) \vee \left((\forall z Q(z) \Rightarrow \forall y P(x, y, c)) \wedge (\forall y P(x, y, c) \Rightarrow \forall z Q(z)) \right) \\
 & P(x, c, f(x)) \vee \left((\forall z Q(z) \Rightarrow \forall y P(x, y, c)) \wedge (\forall u P(x, u, c) \Rightarrow \forall v Q(v)) \right) \\
 & P(x, c, f(x)) \vee \left((\neg \forall z Q(z) \vee \forall y P(x, y, c)) \wedge (\neg \forall u P(x, u, c) \vee \forall v Q(v)) \right) \\
 & P(x, c, f(x)) \vee \left((\exists z \neg Q(z) \vee \forall y P(x, y, c)) \wedge (\exists u \neg P(x, u, c) \vee \forall v Q(v)) \right) \\
 & \exists z \forall y \exists u \forall v \left[P(x, c, f(x)) \vee \left((\neg Q(z) \vee P(x, y, c)) \wedge (\neg P(x, u, c) \vee Q(v)) \right) \right] \\
 & \forall y \forall v \left[P(x, c, f(x)) \vee \left((\neg Q(d) \vee P(x, y, c)) \wedge (\neg P(x, h(y), c) \vee Q(v)) \right) \right] \\
 & \forall y \forall v \left[(P(x, c, f(x)) \vee \neg Q(d) \vee P(x, y, c)) \wedge (P(x, c, f(x)) \vee \neg P(x, h(y), c) \vee Q(v)) \right]
 \end{aligned}$$

2.1. FELADAT. Legyenek x, y, z π típusú változók és $f_{(\pi \rightarrow \pi)}$, $g_{(\pi, \pi \rightarrow \pi)}$, $h_{(\pi, \pi, \pi \rightarrow \pi)}$ pedig függvényszimbólumok egy nyelvben. Termek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

- a) $f(g(x, y))$
- b) $f(g(x), h(x, y, z))$
- c) $g(f(z), h(x, x, x))$
- d) $\exists g(f(x), y)$
- e) $f(x) \wedge g(x, y)$

MEGOLDÁS: a) igen, b) nem, c) igen, d) nem, e) nem

2.4. FELADAT. Legyenek x, y, z π típusú változók, c π típusú konstans, $f_{(\pi \rightarrow \pi)}$, $g_{(\pi, \pi \rightarrow \pi)}$, $h_{(\pi, \pi, \pi \rightarrow \pi)}$ függvényszimbólumok és $P_{(\pi)}$, $Q_{(\pi, \pi, \pi)}$ predikátumszimbólumok egy nyelvben. Formulák-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

- a) $Q(x, f(y), h(y, z, z))$
- b) $(P(c) \supset \forall y(Q(x, y, z) \wedge P(g(x, y))))$
- c) $Q(P(x), f(y), f(z))$
- d) $f(h(x, y, z))$
- e) $QxP(h(x, y, f(c)))$
- f) $Q(g(x, y), f(y, z), h(x, y, z))$
- g) $\exists! xP(h(x, y, z))$
- h) $P(x) \vee \forall xyQ(x, x, y)$
- i) $\forall x(\exists y(P(x) \wedge Q(x, y, x)))$
- j) $Q(x, f(x), f(f(x))) \supset \exists y : Q(f(x), f(f(x)), y)$
- k) $\neg P(x) \supset \forall cP(g(c, x))$

MEGOLDÁS: Az a), b), i) jelsorozatok formulák a fenti nyelvben, míg a c), d), e), f), g), h), j), k) szimbólumsorozatok nem.

2.8. FELADAT. Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

- a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \supset P(x))$
- b) $\forall x(P(x) \vee \neg \exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$
- c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$
- d) $\exists x \forall x P(x) \vee \neg P(x)$

MEGOLDÁS:

- a) $\forall x(\boxed{\exists y Q(f(x), h(y, x, z))} \supset P(x))$
- b) $\boxed{\forall x(P(x) \vee \neg \exists x Q(x, g(x, x)))} \wedge \boxed{\exists x P(f(f(x)))}$
- c) $\boxed{\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))}$
- d) $\boxed{\exists x \forall x P(x)} \vee \neg P(x)$

2.9. FELADAT. Legyenek x, y, z egy elsőrendű nyelv változói, míg c egy konstans, és tegyük fel, hogy az alábbi jelsorozatok a nyelv formulái. Jelöljük be a kötöttségi viszonyokat, és határozzuk meg a paraméterek halmazát!

- a) $\exists x \forall y Q(x, y) \vee P(x)$
- b) $\forall x(P(x, y) \supset \forall y Q(y))$
- c) $(\forall x P(x, y) \supset \forall y R(x, y)) \wedge P(c)$
- d) $(\neg \exists z Q(z, z) \wedge R(f(y, z)))$
- e) $\forall x(\forall y P(x, y, z) \supset Q(x, y))$
- f) $\forall y \exists z(P(x, y, z) \supset \exists x \forall x Q(z, x))$
- g) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x, y)$

MEGOLDÁS:

- a) $\exists x \underbrace{\forall y Q(x, y)}_{\uparrow} \vee P(x) \quad \text{Par} = \{x\}$
- b) $\forall x(\underbrace{P(x, y)}_{\uparrow} \supset \forall y Q(y)) \quad \text{Par} = \{y\}$
- c) $(\forall x \underbrace{P(x, y)}_{\uparrow} \supset \forall y \underbrace{R(x, y)}_{\uparrow}) \wedge P(c) \quad \text{Par} = \{x, y\} \quad (c \text{ nem paraméter!})$
- d) $(\neg \exists z \underbrace{Q(z, z)}_{\uparrow} \wedge R(f(y, \underbrace{z}_{\uparrow}))) \quad \text{Par} = \{y, z\}$
- e) $\forall x(\underbrace{\forall y P(x, y, z)}_{\uparrow} \supset Q(x, \underbrace{y}_{\uparrow})) \quad \text{Par} = \{y, z\}$
- f) $\forall y \exists z(\underbrace{P(c, y, z)}_{\uparrow} \supset \exists x \forall x \underbrace{Q(z, x)}_{\uparrow}) \quad \text{Par} = \emptyset$
- g) $\exists x \forall y(\underbrace{P(x) \vee Q(x, f(y))}_{\uparrow}) \supset \forall y \underbrace{Q(x, y)}_{\uparrow} \quad \text{Par} = \{x\}$

2.10. FELADAT. Változó-tiszták-e az alábbi formulák? Ha nem, hozzuk olyan alakra!

- a) $\forall xP(x) \vee \forall xP(f(x)) \vee \forall xP(f(f(x))) \vee P(x)$
- b) $\forall x(\forall yP(x, y, z) \supset Q(x, y))$
- c) $\exists x\forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \supset \forall yQ(x, y)$
- d) $\forall x\exists y(P(x) \vee \forall yQ(g(x, y), y) \vee P(y))$
- e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x, y)) \vee P(y)$
- f) $\neg\forall x(P(g(x, x)) \supset \exists xP(x) \vee \forall xQ(x, x)) \wedge P(x)$
- g) $\exists xR(x, y, z) \supset \forall x\forall y(P(y) \wedge R(x, y, z))$

MEGOLDÁS:

- a) A formula nincs változó-tiszta alakban, ugyanis különböző kvantorok ugyanazt a változó-nevet kötik, sőt a kötött illetve szabad változó-nevek halmazának metszete sem üres.

$$\forall xP(x) \vee \forall xP(f(x)) \vee \forall xP(f(f(x))) \vee P(x) \quad (\text{kötöttségek bejelölése})$$

$$\forall \underline{P(\quad)} \vee \forall \underline{P(f(\quad))} \vee \forall \underline{P(f(f(\quad)))} \vee P(x) \quad (\text{váz meghatározása})$$

$$\forall yP(y) \vee \forall zP(f(z)) \vee \forall vP(f(f(v))) \vee P(x) \quad (\text{új változó-nevek beírása})$$

- b) $\forall x(\forall vP(x, v, z) \supset Q(x, y))$
- c) $\exists z\forall y(P(z) \vee Q(z, f(y))) \supset \forall vQ(x, v)$
- d) $\forall x\exists y(P(x) \vee \forall zQ(g(x, z), z) \vee P(y))$
- e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x, y)) \vee P(y)$
(az y paraméter két helyen is szerepel, de ettől még a formula változó-tiszta)
- f) $\neg\forall y(P(g(y, y)) \supset \exists zP(z) \vee \forall vQ(v, v)) \wedge P(x)$
- g) $\exists xR(x, y, z) \supset \forall v\forall w(P(w) \wedge R(v, w, z))$

2.11. FELADAT. Döntsük el a formulákról, hogy melyek egymás variánsai, azaz melyek kongruensek!

2.11.1. RÉSZFELADAT.

- a) $\exists x(\forall yQ(z, x, y) \supset \exists zP(z, x))$
- b) $\exists z(\forall xQ(z, z, x) \supset \exists xP(x, z))$
- c) $\exists y(\forall xQ(z, y, x) \supset \exists xP(x, y))$
- d) $\exists z(\forall xQ(y, z, x) \supset \exists vP(v, z))$
- e) $\exists y(\forall xQ(z, y, x) \supset \exists zP(z, x))$
- f) $\exists y(\forall xQ(z, y, x) \supset \exists zP(z, y))$

MEGOLDÁS: Két formula akkor és csak akkor egymás variánsa, ha vázuk megegyezik.

- a) $\exists \underbrace{(\forall \overset{\uparrow}{Q}(z, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, _)}_{\underbrace{\quad}}$
- b) $\exists \underbrace{(\forall Q(_, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, _)}_{\underbrace{\quad}}$
- c) $\exists \underbrace{(\forall \overset{\uparrow}{Q}(z, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, _)}_{\underbrace{\quad}}$
- d) $\exists \underbrace{(\forall \overset{\uparrow}{Q}(y, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, _)}_{\underbrace{\quad}}$
- e) $\exists \underbrace{(\forall \overset{\uparrow}{Q}(z, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, \overset{\uparrow}{x})}_{\underbrace{\quad}}$
- f) $\exists \underbrace{(\forall \overset{\uparrow}{Q}(z, _, _))}_{\underbrace{\quad}} \supset \exists \underbrace{P(_, _)}_{\underbrace{\quad}}$

Tehát csak az a), c) és f) formulák egymás variánsai.

2.13. FELADAT. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

- a) $\forall xP(x) \supset \neg\exists xP(x) \vee Q(x, c)$
- b) $\exists x\forall yQ(x, y) \vee \exists x\forall yQ(x, y)$
- c) $\exists x\forall yQ(f(x), y) \supset \exists x\forall yQ(x, y)$
- d) $\exists x(P(x) \vee \forall xP(x) \supset \forall yQ(x, y))$
- e) $\exists x(\forall yQ(x, y) \vee \exists zP(z)) \supset \exists xP(x)$
- f) $\forall x(\exists yQ(x, y) \supset \forall xP(x)) \supset \neg\forall x\exists yQ(x, y)$
- g) $\neg\exists x(\exists yQ(x, y) \supset P(y)) \supset \forall x(P(x) \vee \exists xQ(x, y))$
- h) $\forall x(\exists yQ(x, y) \supset \forall xP(x)) \supset \neg(\forall xP(x) \vee \forall xR(x))$

MEGOLDÁS:

- a) $\forall xP(x) \supset \neg\exists xP(x) \vee Q(x, c)$
 $\forall yP(y) \supset \neg\exists zP(z) \vee Q(x, c)$ (változótiszta alak)
 $\exists y(P(y) \supset \neg\exists zP(z) \vee Q(x, c))$
 $\exists y(P(y) \supset \forall z\neg P(z) \vee Q(x, c))$
 $\exists y(P(y) \supset \forall z(\neg P(z) \vee Q(x, c)))$
 $\exists y\forall z(P(y) \supset \neg P(z) \vee Q(x, c))$ (prenex alak)
- b) $\exists x\forall y\exists z\forall u(Q(x, y) \vee Q(z, u))$
- c) $\forall x\exists y\exists z\forall u(Q(f(x), y) \supset Q(z, u))$
- d) $\exists x\exists z\forall y(P(x) \vee P(z) \supset Q(x, y))$
- e) $\forall x\exists y\forall z\exists u((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(u))$
- f) $\exists x\exists y\exists z\exists u\forall w((Q(x, y) \supset P(z)) \supset \neg Q(u, w))$
- g) $\exists x\forall z\forall u\exists w(\neg(Q(x, z) \supset P(y)) \supset (P(u) \vee Q(w, y)))$
- h) $\exists x\exists y\exists z\exists u\exists w((Q(x, y) \supset P(z)) \supset \neg(P(u) \vee R(w)))$

1. feladat Adottak a következő állítások:

P1 : Azok a gyerekek, aki jól viselkedtek, kapnak ajándékot a Mikulástól.

P2 : Van olyan gyerek, aki nem boldog.

P3 : Mindenki, aki ajándékot kapott vagy sikerült a Logika ZH-ja, boldog.

C : Egyesek se jók nem voltak, se a Logika ZH-juk nem sikerült.

a. Formalizáld az állításokat!

b. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy P1, . . . , P3 logikai következménye a C!

Megoldás:

$G(x)$: x gyerek

$J(x)$: x jó volt

$A(x)$: x kap ajándékot

$B(x)$: x boldog

$L(x)$: x-nek sikerül a Logika ZH-ja

$P1 : \forall x G(x) \wedge J(x) \Rightarrow A(x)$

$P2 : \exists x G(x) \wedge \neg B(x)$

$P3 : \forall x A(x) \vee L(x) \Rightarrow B(x)$

$C : \exists x (\neg J(x) \wedge \neg L(x))$

KNF:

$P1 : \forall x \neg G(x) \vee \neg J(x) \vee A(x)$

$P2 : G(c) \wedge \neg B(c)$

$P3 : \forall x \neg A(x) \vee B(x) \wedge \forall x \neg L(x) \vee B(x)$

$\neg C : \forall x J(x) \vee L(x)$

Rezolúció:

1 : $\neg G(x) \vee \neg J(x) \vee A(x)$

2 : $G(c)$

3 : $\neg B(c)$

4 : $\neg A(x) \vee B(x)$

$$5 : \neg L(x) \vee B(x)$$

$$6 : J(x) \vee L(x)$$

$$7 (3, 4) : \neg A(c)$$

$$8 (1, 7) : \neg G(c) \vee \neg J(c)$$

$$9 (2, 8) : \neg J(c)$$

$$10 (6, 9) : L(c)$$

$$11 (5, 10) : B(c)$$

$$12 (3, 11) : \text{üres klóz}$$

Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy az alábbi formula logikai törvény! Az unifikátorokat is tüntesd fel!
(Segítség: A formula negációjával kell indulni!)

$$\forall x \forall y \left((R(x, y) \Rightarrow \neg Q(y, x)) \wedge \exists z Q(z, x) \right) \Rightarrow \exists x \exists y \neg R(x, y)$$

Megoldás:

KNF:

$$\begin{aligned} & \neg \left[\forall x \forall y \left((R(x, y) \Rightarrow \neg Q(y, x)) \wedge \exists z Q(z, x) \right) \Rightarrow \exists u \exists v \neg R(u, v) \right] \\ & \forall x \forall y \left((R(x, y) \Rightarrow \neg Q(y, x)) \wedge \exists z Q(z, x) \right) \wedge \neg \exists u \exists v \neg R(u, v) \\ & \forall x \forall y \left((\neg R(x, y) \vee \neg Q(y, x)) \wedge \exists z Q(z, x) \right) \wedge \forall u \forall v R(u, v) \\ & \forall x \forall y \exists z \forall u \forall v \left((\neg R(x, y) \vee \neg Q(y, x)) \wedge Q(z, x) \wedge R(u, v) \right) \\ & \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \left((\neg R(x, y) \vee \neg Q(y, x)) \wedge Q(f(x, y), x) \wedge R(u, v) \right) \end{aligned}$$

Rezolúció:

Rezolúció:

$$1 : \neg R(x, y) \vee \neg Q(y, x)$$

$$2 : Q(f(x, y), x)$$

$$3 : R(u, v)$$

$$4 (1, 3) : \neg Q(v, u) \quad \text{Unifikátor: } x \rightarrow u, y \rightarrow v$$

$$5 (2, 4) : \text{üres klóz} \quad \text{Unifikátor: } v \rightarrow f(x, y), u \rightarrow x$$

2. feladat: Adottak a következő állítások:

P1 : Akik megfutották a szintidőt a távon vagy esetleg kockahasúak, azok atlétikaedzésre járnak.

P2 : Néhányan sportolnak bár, de atlétikaedzésre nem járnak.

C : Van, aki hiába sportol, a hasa sem kockás és a szintidőt sem futotta meg a távon.

a. Formalizáld az állításokat elsőrendű logikában!

b. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy P1, P2 logikai következménye a C!

Megoldás:

$M(x)$: x megfutotta a szintidőt

$A(x)$: x jár atlétikaedzésre

$S(x)$: x sportol

$K(x)$: x kockahasú

$P1 : \forall x (M(x) \vee K(x) \Rightarrow A(x))$

$P2 : \exists x S(x) \wedge \neg A(x)$

$C : \exists x S(x) \wedge \neg K(x) \wedge \neg M(x)$

KNF:

$P1 : \forall x (\neg M(x) \vee A(x)) \wedge (\neg K(x) \vee A(x))$

$P2 : S(c) \wedge \neg A(c)$

$\neg C : \forall x \neg S(x) \vee K(x) \vee M(x)$

Rezolúció:

1 : $\neg M(x) \vee A(x)$

2 : $\neg K(x) \vee A(x)$

3 : $S(c)$

4 : $\neg A(c)$

5 : $\neg S(x) \vee K(x) \vee M(x)$

6 (1, 4) : $\neg M(c)$

7 (2, 4) : $\neg K(c)$

8 (3, 5) : $K(c) \vee M(c)$

9 (7, 8) : $M(c)$

10 (6, 9) : üres klóz

Minta zárthelyi dolgozat

1. feladat

Adott a következő elsőrendű logikai nyelv:

- Változók: x, y, z
- Függvények: c^0, f^1, g^2
- Predikátumok: P^1, Q^2

Az alábbi karaktersorozatok közül melyek formulái ennek a nyelvnek? Ha valamilyik nem formula, írd alá indoklást!

a. $P(c) \vee \neg \forall x Q(y, x)$

b. $Q(x, f(x)) \Rightarrow \exists y g(y, c)$

c. $\forall z \left(Q(g(z, z), z) \wedge \exists c \neg P(f(c)) \right)$

d. $\exists x \forall y P(f(g(y, x)))$

Megoldás:

- a. OK
- b. függvény nem (feltétlenül) logikai típusú
- c. kvantor változót köthet csak
- d. OK

2. feladat

Adott a következő formula az előző feladatban megadott nyelven:

$$(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(c, y)) \Rightarrow \forall x (\neg \forall y Q(x, y) \vee P(x))$$

1. Rajzold be a kvantorok hatáskörét és a kötési viszonyokat!
2. Határozd meg a formula paramétereinek halmazát!
3. Hozd a formulát KNF-re!

Megoldás:

2. $Par = \emptyset$

3.

$$\begin{aligned} & (\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(c, y)) \Rightarrow \forall z (\neg \forall w Q(z, w) \vee P(z)) \\ & \neg (\neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(c, y)) \vee \forall z (\exists w \neg Q(z, w) \vee P(z)) \\ & (\forall x P(x) \wedge \forall y \neg Q(c, y)) \vee \forall z (\exists w \neg Q(z, w) \vee P(z)) \\ & \forall x \forall y \forall z \exists w ((P(x) \wedge \neg Q(c, y)) \vee \neg Q(z, w) \vee P(z)) \\ & \forall x \forall y \forall z ((P(x) \wedge \neg Q(c, y)) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z)) \\ & \forall x \forall y \forall z (P(x) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z)) \wedge \forall x \forall y \forall z (\neg Q(c, y) \vee \neg Q(z, f(x, y, z)) \vee P(z)) \end{aligned}$$

3. feladat

Adottak a következő állítások:

- P_1 : Azok az autótulajok, akiknek BMW-jük van, csúnya pillantásokat kapnak a többiektől.
- P_2 : Van olyan autótulajdonos, aki jóindulatú.
- P_3 : Mindenki, aki csúnya pillantásokat kap vagy gyorshajtásért büntetik, rosszindulatú lesz.
- C : Egyeseknek se BMW-jük nincs, se a gyorshajtásért nem büntették.

1. Formalizáld az állításokat!

2. Bizonyítsd be rezolúcióval, hogy $P_1, \dots, P_3$ logikai következménye a C !

Megoldás:

$G(x)$: x autótulaj
 $J(x)$: x -nek BMW-je van
 $A(x)$: x csúnya pillantásokat kap
 $B(x)$: x rosszindulatú
 $L(x)$: x -et gyorshajtásért büntetik

P_1 : $\forall x (G(x) \wedge J(x) \Rightarrow A(x))$
 P_2 : $\exists x (G(x) \wedge \neg B(x))$
 P_3 : $\forall x (A(x) \vee L(x) \Rightarrow B(x))$
 C : $\exists x (\neg J(x) \wedge \neg L(x))$

KNF:

P_1 : $\forall x (\neg G(x) \vee \neg J(x) \vee A(x))$
 P_2 : $G(c) \wedge \neg B(c)$
 P_3 : $\forall x (\neg A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x (\neg L(x) \vee B(x))$
 $\neg C$: $\forall x (J(x) \vee L(x))$

Rezolúció:

1 : $\neg G(x) \vee \neg J(x) \vee A(x)$
2 : $G(c)$
3 : $\neg B(c)$
4 : $\neg A(x) \vee B(x)$
5 : $\neg L(x) \vee B(x)$
6 : $J(x) \vee L(x)$
7 (3, 4) : $\neg A(c)$
8 (1, 7) : $\neg G(c) \vee \neg J(c)$
9 (2, 8) : $\neg J(c)$
10 (6, 9) : $L(c)$
11 (5, 10) : $B(c)$
12 (3, 11) : $\square$

4. feladat

Adott az alábbi klózhalmoz az 1. feladat logikai nyelvén. *SLD-rezolúcióval* bebizonyítható, hogy az alábbi klózhalmoz kielégíthetetlen?

(Az unifikátorokat is tüntesd fel!)

$$\begin{array}{ll} 1 : & \neg P(d) \\ 2 : & \neg P(x) \vee \neg Q(x, f(f(y)), z) \vee R(z) \\ 3 : & P(f(c)) \\ 4 : & Q(x, f(x), d) \end{array}$$

Megoldás:

Rezolúció:

$$\begin{array}{llll} 5 \ (1, 3) : & \neg R(y) \vee \neg Q(c, f(y), z) \vee R(z) & \text{Unifikátor: } x \rightarrow c \\ 6 \ (1, 5) : & \neg Q(c, f(c), z) \vee R(z) & \text{Unifikátor: } y \rightarrow c \\ 7 \ (2, 6) : & \neg Q(c, f(c), d) & \text{Unifikátor: } z \rightarrow d \\ 8 \ (4, 7) : & \square & \text{Unifikátor: } x \rightarrow c \end{array}$$