

## Lineáris programozási feladatok grafikus megoldása

A lineáris programozás (LP) feladata egy speciális optimalizálási probléma megoldása. Az optimalizálási feladatok általános alakjában egy

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

célfüggvény szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) keressük az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változókra vonatkozó korlátozó feltételek teljesülése mellett.

Az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változókat döntési változóknak hívjuk. Ha a döntési változókra nincsenek előírva korlátozások, akkor feltétel nélküli optimalizálásról beszélünk.

Azokat a pontokat, melyek eleget tesznek az összes megadott korlátozó feltételnek, az optimalizálási feladat lehetséges megoldásainak hívjuk és halmazukat  $L$ -lel jelöljük. Egy maximumfeladat optimális megoldásán olyan  $X \in L$  lehetséges megoldást értünk, melynél nincs nagyobb célfüggvényértékű lehetséges megoldás. Hasonlóan, egy minimumfeladat optimális megoldásán olyan  $X \in L$  lehetséges megoldást értünk, melynél nincs kisebb célfüggvényértékű lehetséges megoldás.

Az  $f(X)$  célfüggvényértéket a feladat optimumának (maximumának, minimumának) nevezzük. A lineáris programozási feladatokban mind a célfüggvény, mind a feltételeket definiáló függvények az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  döntési változók lineáris függvényei. A továbbiakban olyan egyszerű LP-feladatokat vizsgálunk, melyekben csak két döntési változó,  $x_1$  és  $x_2$  szerepel. A két változóra vonatkozó feltételek a sík egy tartományát jelölik ki, melyen egy kétváltozós lineáris függvény szélsőértékét keressük. Az ilyen feladatok grafikusan is megoldhatóak, a lehetséges megoldások halmazának felrajzolása után. A változókat  $x_1$  és  $x_2$  helyett a koordinátageometriában szokásos  $x$  és  $y$  betűkkel jelöljük.

**1.Példa:** Egy anyuka gyermeke születésnapjára kétféle szendvicset készít. Egy szalámis szendvicse 3 gramm vaj, 3 karika tojást és 2 szelet szalámit tesz. A sonkás szendvicshez 4 gramm vaj, 2 karika tojás és 1 szelet sonka szükséges. A szendvicsek készítéséhez rendelkezésre áll 100 szelet szalámi, 40 szelet sonka, 170 karika tojás és 220 gramm vaj (kenyérszeletből nincs korlátozás, abból elegendően sok van). Melyik szendviczből hány darabot kell készítenie az anyukának, ha azt akarja, hogy a rendelkezésre álló készletekből összességében a lehető legtöbb szendvicset készíthessen el?

**Megoldás:** Írjuk fel a feladat matematikai modelljét, vagyis alkalmas változók bevezetése után adjuk meg a célfüggvény egyenletét, illetve a korlátozó feltételeket leíró egyenlőtlenségeket! Tegyük fel, hogy az elkészítendő szalámis szendvicsek száma  $x$ , a sonkás szendvicsek száma pedig  $y$ .

Vajból a szalámis szendvicsekre  $3x$ , a sonkás szendvicsekre  $4y$  gramm kerül összesen, mivel azonban csak 220 gramm vaj van, fenn kell állnia a  $3x + 4y \leq 220$  egyenlőtlenségnek. Hasonlóan, a felhasznált tojáskarikák száma  $3x + 2y$ , mely összeg legfeljebb 170 lehet. A szalámiszeletekre a  $2x \leq 100$ , a sonkaszeletekre az  $y \leq 40$  reláció érvényes. Továbbá, egyik változó sem lehet negatív, azaz  $x \geq 0$  és  $y \geq 0$ .

E feltételek teljesülése mellett keressük az  $x + y$  összeg maximumát. Összegezve:

A feladat matematikai modellje a következő:

$$x+y \rightarrow \max$$

$$3x+4y \leq 220$$

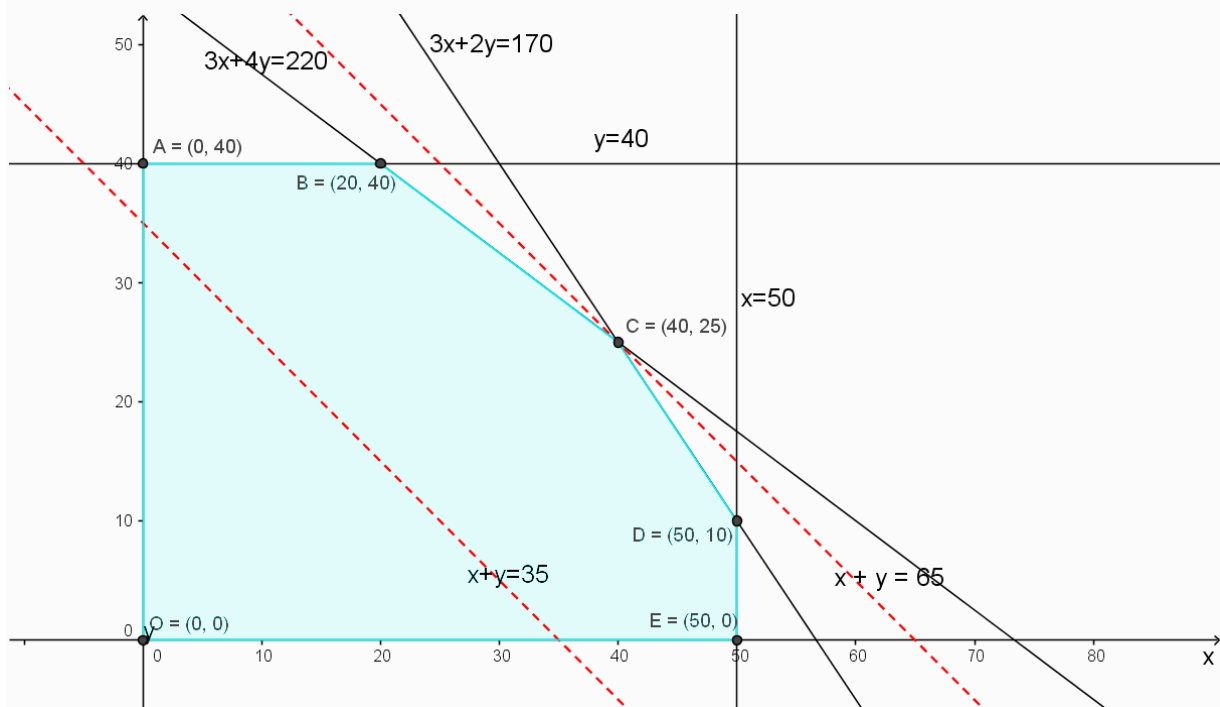
$$3x+2y \leq 170$$

$$2x \leq 100$$

$$y \leq 40$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ábrázoljuk síkbeli koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, melyek mind a hat feltételnek eleget tesznek! Például a  $3x+4y \leq 220$  egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok a  $3x+4y=220$  egyenes "alatt" helyezkednek el, az  $y \geq 0$  feltételnek pedig az  $x$  tengely feletti pontok tesznek eleget. Az alábbi ábrán besatírozott terület azt a  $K$  halmazt jelöli, amelynek pontjai az összes egyenlőtlenségnek eleget tesznek, ezek közül a pontok közül kell azt megkeresnünk, amelyekre a koordináták összege maximális.



Rögzített  $z$  érték esetén vizsgáljuk az  $x+y=z$  egyenletű egyenest! Ez egy  $-1$  meredekségű egyenes. Azt a  $z$ -t keressük, amelyre az  $x+y=z$  egyenesnek van közös pontja a  $K$  sokszöggel, és amelyre  $z$  értéke maximális. A  $z$  értékét az egyenes  $y$  tengellyel való metszéspontja adja, így a feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy egy  $-1$  meredekségű egyenest úgy csúsztatunk önmagával párhuzamosan, hogy a  $K$  halmazzal legyen közös pontja, és vizsgáljuk, hogy mikor metszi a "legmagasabban" az  $y$  tengelyt ez az egyenes. Esetünkben a konvex sokszög  $(40;25)$  csúcspontjáiig tudjuk az egyenest tolni, ekkor lesz  $z$  értéke a lehető

legnagyobb, és ez a maximális érték 65. Tehát összesen 65 szendvicset tud készíteni az anyuka, amiből 40 szalámis, 25 pedig sonkás lesz.

**Megjegyzés:** A feladat úgy is megoldható, ha az összes csúcspontban kiszámoljuk a célfüggvény értékét és ezek közül kiválasztjuk a legnagyobbat. (Van egy olyan tétel, amely azt mondja ki, hogy ha  $K$  egy korlátos halmaz, akkor az LP feladatnak csak a  $K$  halmaz csúcaiban, vagy két csúcsot összekötő szakaszon lehet maximuma (vagy minimuma)). ha megnézzük, akkor az  $A$  pontban a célfüggvény értéke 40, a  $B$ -ben 60, a  $C$ -ben 65, a  $D$ -ben 60 és az  $E$ -ben 50. Innen látható, hogy a  $C=(40,25)$  pontban veszi fel a függvény a maximumát.

**2. Példa:** Egy fogyókúrázó napi C-vitamin és vas szükségletét kétféle gyümölcs, citrom és alma fogyasztásával szeretné fedezni. Tegyük fel, hogy a napi C-vitamin szükséglet 500 egység, és 100 gramm citromban 300 egységnyi, 100 gramm almában 100 egységnyi C-vitamin van. Vasból 1,2 mg a napi szükséglet, és 100 gramm citrom 0,2 mg, 100 gramm alma pedig 0,5 mg vasat tartalmaz. A fogyókúrázó a gyümölcsök fogyasztásával legfeljebb 400 kalóriát szeretne bevinni. 100 gr citromban 50, 100 gr almában 80 kalória van. A piacon egy kiló citrom 600 forintba, egy kiló alma 400 forintba kerül. Mennyit vegyen az egyes gyümölcsökből, ha azt szeretné, hogy a lehető legkevesebbet költjön, ne lépje túl az előírt kalóriamennyiséget, de a napi C-vitamin és vasszükségletét fedezze a megvásárolt gyümölcs?

**Megoldás:** Tegyük fel, hogy a fogyókúrázó  $x \cdot 100$  gramm citromot és  $y \cdot 100$  gramm almát vesz a piacon. Ekkor  $60x+40y$  a fizetendő összeg, ezt kell minimalizálni. Mindkét változó nemnegatív, és három további egyenlőtlenséget kell felírunk:

$$60x+40y \rightarrow \min$$

$$300x+100y \geq 5000,$$

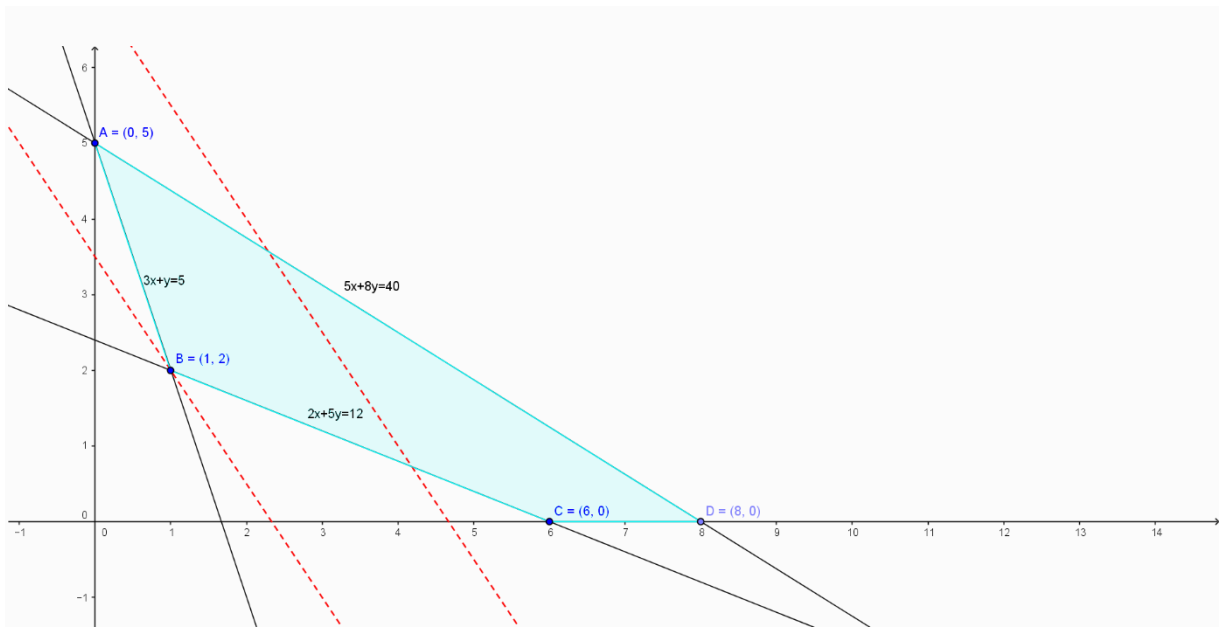
$$2x \leq 0,$$

$$5y \geq 1,$$

$$250x+80y \leq 400$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Ábrázoljuk a feltételeknek eleget tevő pontok halmazát a síkbeli koordináta-rendszerben! A szendvics-problémához hasonlóan, ezúttal is egy első síknegyedbe eső konvex sokszöget kaptunk. Ha a célfüggvény értékét rögzítjük, és az  $y$  változót kifejezzük  $y = -1.5x + z$  adódik. Ezúttal tehát egy  $-1,5$  meredekségű egyenest mozgathatunk önmagával párhuzamosan a sokszög felett, és azt az egyenest keressük ezek közül, melynek legkisebb az  $y$  tengellyel való metszéspontja. Ez az egyenes az  $(1;2)$  pontban "lép ki" a sokszögből, úgy, hogy  $3,5$ -nél metszi az  $y$  tengelyt. Ez azt jelenti, hogy 100 g citrom és 200 g alma szükséges egy napra, a fizetendő összeg pedig 140 forint (a  $140$ -es érték úgy jön ki, hogy a minimumhely koordinátáit visszahelyettesítjük az eredeti célfüggvénybe, vagy a  $3,5$ -ös tengelymetszetet  $40$ -nel szorozzuk, hiszen az egyenes egyenletének átalakításakor osztottunk  $40$ -nel). Persze itt is elég lenne a célfüggvény értékeit megvizsgálni a csúcspontokban, mert a kapott tartomány korlátos.



**3. Példa:** Egy építési vállalkozó kétféle üzemcsarnok építésével foglalkozik. Az A típusú csarnok 4000 m<sup>2</sup> lemez, 4 tonna acél, 300 m<sup>2</sup> tetőfedő anyag és 200 m<sup>3</sup> beton felhasználásával készül el. A B típusú csarnok felépítéséhez 5000 m<sup>2</sup> lemez, 3 tonna acél, 200 m<sup>2</sup> tetőfedő anyag és 100 m<sup>3</sup> beton szükséges. Az alapanyagok csak korlátozott mennyiségben állnak rendelkezésre: 32000 m<sup>2</sup> lemez, 24 tonna acél, 2000 m<sup>2</sup> tetőfedő anyag és 1600 m<sup>3</sup> beton használható fel az adott szezonban. Egy A típusú csarnok felépítése 4000\$, a B típusú csarnok felépítése 5000\$ nyereséget hoz. Milyen összetételben vállaljon a kétféle csarnokra vonatkozó megrendelésekből a vállalkozó, ha maximalizálni szeretné a nyereségét?

**Megoldás:** jelölje  $x$  a felépítendő A típusú csarnokok számát,  $y$  pedig a B típusúak számát. A feladat az alábbi rendszerrel modellezhető:

$$4000x + 5000y \rightarrow \max$$

$$4000x + 5000y \leq 32000$$

$$4x + 3y \leq 24$$

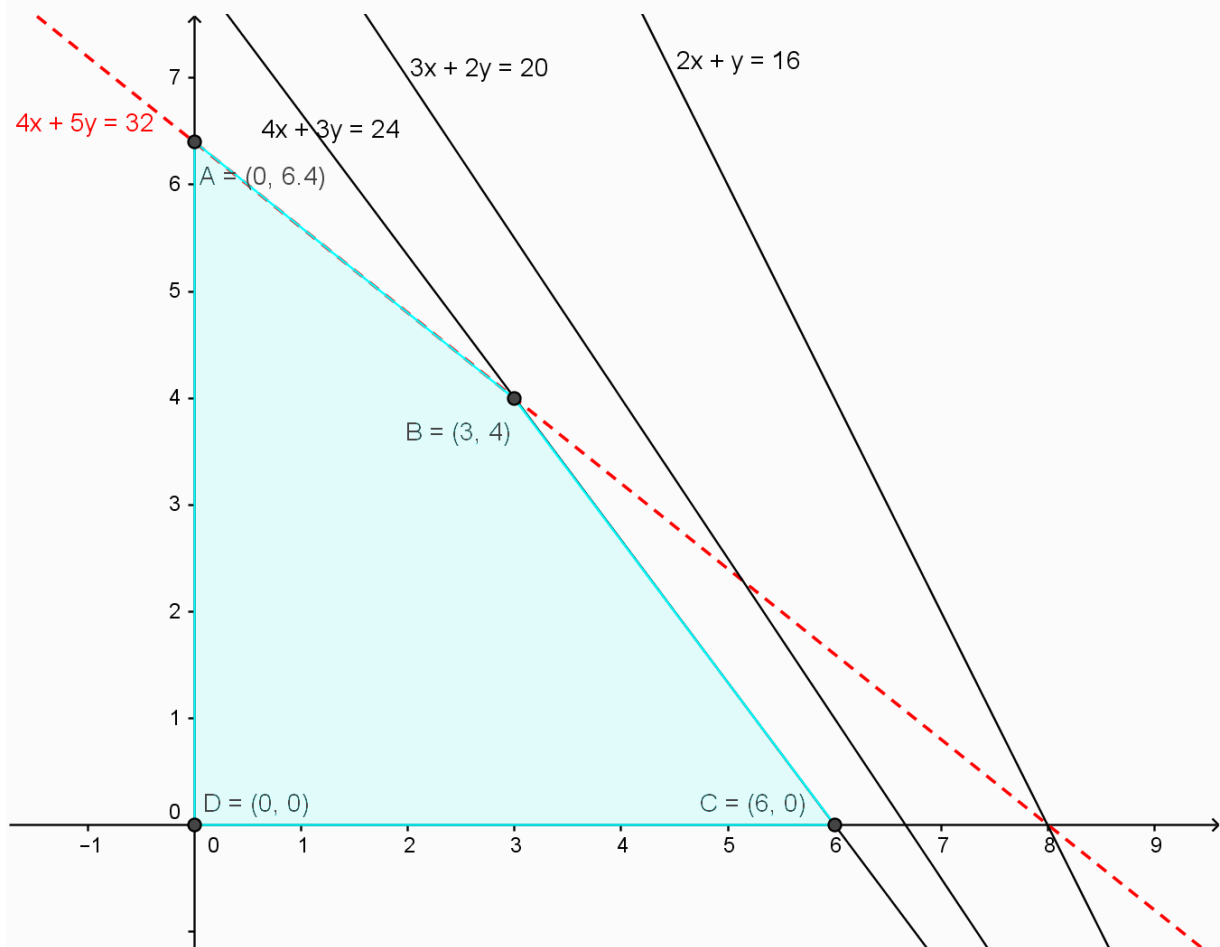
$$300x + 200y \leq 2000$$

$$200x + 100y \leq 1600$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ha ábrázoljuk a feltételeknek eleget tevő ponthalmazt, azt tapasztaljuk, hogy a hat feltétel közül a két középső, a tetőfedő anyagra és a betonra vonatkozó korlátozás nem játszik szerepet a konvex sokszög határainak kijelölésében. Másrészt, a célfüggvényben  $x$  és  $y$  együtthatója megegyezik az első feltételbeli együtthatókkal. Ez azt eredményezi, hogy a célfüggvény ezúttal

nem egyetlen pontban veszi fel a szélsőértékét, hanem egy szakasz összes pontjában ugyanaz a (maximális) célfüggvényérték adódik. Más kérdés, hogy a feladat jellegéből adódóan egészértékű megoldást keresünk elsősorban, ezért a kérdéses szakaszon azt a pontot adjuk meg megoldásként, melynek mindkét koordinátája egész, azaz a (3;4) pontot. Tehát 3 db A típusú és 4 db B típusú csarnokot kell építeni, s így 32000\$ lesz a nyereség. (Ugyanígy 32000\$ lenne a nyereség, ha a szakasz egy másik pontját, például a (2;4,8) pontot választanánk. Ez a megoldás értelmezhető úgy, hogy a vállalkozó felépít 2 A típusú csarnokot, és a vállalt 5 B típusúból négyet teljesen, egyet pedig 80%-os készütséggben ad át. Ekkor a nyeresége is csak 80%-os, azaz 4000\$ az utolsó csarnokon. Az egészértékű megoldások keresése az integer programozás tárgykörébe tartozik, általában nehezebb problémát jelent, mint az általános megoldás meghatározása.)



**4. Példa:** Egy kis szabóságban ingeket és szoknyákat varrnak. Egy ingen 4 \$, egy szoknyán 3 \$ nyeresége van a szabóságnak. Egy ing 3 m anyagból 5 óra alatt, egy szoknya 4 m anyagból 2 óra alatt készül el. A cég vezetője azt várja el a varrónőktől, hogy a napi 10 órás munkaidő alatt legalább 4 ruhadarabot készítsenek el, legfeljebb 12 m anyag felhasználásával. Hány ing és hány szoknya megvarrásával érhető el egy varrónő esetén a maximális profit?

**Megoldás:** Legyen  $x$  az ingek,  $y$  a szoknyák száma. Megoldandó a következő feladat:

$$4x+3y \rightarrow \max$$

$$3x+4y \leq 12$$

$$5x+2y \leq 10$$

$$x+y \geq 4$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

A feltételi egyenlőtlenségek ábrázolása után láthatjuk, hogy a cég vezetője irreális elvárásokat támasztott, ugyanis nincs olyan  $(x;y)$  pont, mely az összes feltételnek egyszerre eleget tenne, a lehetséges megoldások halmaza üres, így a feladatnak nincs optimális megoldása.

