

1 Kombináció, variáció, permutáció

1. Hányféleképpen rakhatunk be 6 levelet 13 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe maximum egy levelet teszünk?

Megoldás:

Mivel egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet, az összes kiválasztások száma 13 elem 6-od osztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával egyenlő:

$$C_{13}^6 = \binom{13}{6} = \frac{13!}{6! \cdot 7!} = 1716$$

2. Hányféleképpen rakhatunk be 6 levelet 13 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?

Megoldás:

Mivel egy rekeszbe több levél is kerülhet, az összes kiválasztások száma 13 elem 6-od osztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő:

$$C_{13}^{6,i} = \binom{13+6-1}{6} = \frac{18!}{6! \cdot 12!} = 18\,564$$

3. Hányféleképpen osztható szét 7 ezer forint jutalom 3 dolgozó között, ha mindegyik dolgozó ezerrel osztható összegű jutalmat kaphat, de a 0 Ft jutalom is megengedett.

Megoldás:

Azaz 7 db ezres szétosztásáról van szó, ami 3 elem 7-ed osztályú ismétléses kombinációinak a számával egyenlő:

$$C_7^{3,i} = \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$$

4. Hány 10 jegyű szám készíthető 6 darab kettes, 2 darab hetes és 2 darab hatos számjegyből?

Megoldás:

Ismétléses permutáció:

$$P_{10}^{6,2,2} = \frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$$

Azaz 1260 darab 10 jegyű szám készíthető a megadott számjegyekből.

5. Hány nyolcjegyű szám készíthető 1 darab nulla, 1 darab kettes és 6 darab hármas számjegyből?

Megoldás:

Ismétléses permutáció:

$$P_8^{1,1,6} = \frac{8!}{6!} = 56$$

Mivel nullával nem kezdődhet szám, így a lehetséges esetek számát csökkentenünk kell. A nullával kezdődő számok száma:

$$P_7^{1,6} = \frac{7!}{6!} = 7$$

Azaz $56 - 7 = 49$ darab 8 jegyű szám készíthető a megadott számjegyekből.

6. Egy dobozban 10 golyó van, közülük 4 fehér, 4 piros és 2 kék színű. A 10 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg?

Megoldás:

Ismétléses permutáció:

$$P_{10}^{4,4,2} = \frac{10!}{4!4!2!} = 3150$$

2 Valószínűségek meghatározása kombinatorikai módszerekkel

1. Egy rejtvénypályázaton három díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között (egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat). 72 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 21 Miskolcra. Mi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

Megoldás:

$$P(\text{nem lesz miskolci nyertes}) = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{72}{3}} = \frac{595}{1704} = 0,34918$$

$$P(\text{lesz miskolci nyertes}) = 1 - \frac{\binom{51}{3}}{\binom{72}{3}} = 1 - \frac{595}{1704} = 1 - 0,34918 = 0,65082$$

Tehát 0,65082 annak a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes.

2. Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 3 fiú és 6 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 3 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

Az összes lehetséges választások száma: $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

1 eset nem kedvező, ha 3 fiút választanak ki, így a kedvező esetek száma: 83

$$P(\text{lesz lány a kiválasztottak között}) = \frac{83}{84} = \underline{0,98810}$$

3. Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 12 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 7 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 3 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

A : lesz lány a kiválasztottak között

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{3} \binom{7}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{21}{22} = \underline{0,95455}$$

4. Egy fogadásra egymástól függetlenül 4 angol, 2 francia és 3 olasz diplomata érkezik. Mi a valószínűsége, hogy az első három vendég érkezési sorrendje angol-francia-olasz?

Megoldás:

Összes eset: $P_9^{4,2,3} = \frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!} = 1260$

Kedvező eset: $P_6^{3,1,2} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$

$$P = \frac{60}{1260} = \underline{0,047619}$$

5. Egy dobozban 5 piros és 4 zöld golyó van. Visszatevés nélkül, bekötött szemmel kihúznak öt golyót. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 4 piros golyót húznak?

Megoldás:

$$N = 9$$

$$s = 5$$

$$n = 5$$

$$k = 4$$

$$p = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{1}}{\binom{9}{5}} = \frac{10}{63} = \underline{0,15873}$$

6. Egy dobozban 12 alkatrész van, amelyek közül 8 selejtes. 5 elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 3 selejtes alkatrész van?

Megoldás:

$$P = \frac{\binom{8}{3} \binom{4}{2}}{\binom{12}{5}} = 0,42424$$

7. Egy dobozban 10 alkatrész van, amelyek közül 5 selejtes. 3 elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 2 selejtes alkatrész van?

Megoldás:

Visszatevéses mintavétel esetén:

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{A minta 3 elemű, } p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 1 - p$$

$$P = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$$

8. Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0,80, míg B 0,76 valószínűséggel talál a kosárba. A játékot addig folytatják, amíg valamelyik játékos beletalál a kosárba. Mi annak a valószínűsége, hogy pont az ötödik dobás után ér véget a játék?

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,8 & P(\bar{A}) &= 0,2 \\ P(B) &= 0,76 & P(\bar{B}) &= 0,24 \end{aligned}$$

$$P(5. \text{ dobás után ér véget a játék}) = (0,2)^2 \cdot (0,24)^2 \cdot 0,8 = \underline{0,0018432}$$

3 Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel

1. Kettő megbeszéli, hogy délután 5 óra és délután 5 óra 49 perc között találkoznak. Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek és mindketten 10 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?

Megoldás:

Jelölje x az egyik, y a másik ember érkezési pillanatát.

Akkor találkoznak, ha $|x - y| \leq 10$, azaz

$$* x - y \leq 10, \text{ ha } x > y \implies y \geq x - 10$$

$$* y - x \leq 10, \text{ ha } x < y \implies y \leq x + 10$$

A megoldás megadásához alkalmazható a geometriai valószínűségi modell:

$$p = \frac{T_{\text{hatszög}}}{T_{\text{négyszeg}}}$$

$$T_{\text{hatszög}} = T_{\text{négyszeg}} - 2T_{\text{háromszög}} = 49^2 - 2 \frac{39^2}{2} = 49^2 - 39^2 = 880$$

$$p = \frac{880}{49^2} = \frac{880}{2401} = \underline{0,36651}$$

2. Egy kis kikötőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 1 és 13 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 65 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?

Megoldás:

1 és 13 óra között $12 \cdot 60 = 720$ perc telik el.

Jelölje x az első, y a második hajót

$|x - y| > 65$ esetén nem kell várniuk egymásra

$x - y > 65$ illetve $y - x > 65$

$$\text{Tehát } P = \frac{T_{\text{háromszögek}}}{T_{\text{négyszeg}}} = \frac{(720 - 65)^2}{720^2} = 0,8276.$$