1 Kombináció, variáció, permutáció

1. Hányféleképpen rakhatunk be 6 levelet 13 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe maximum egy levelet teszünk?

   Megoldás:

   Mivel egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet, az összes kiválasztások száma 13 elem 6-od osztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával egyenlő:

   $C_{13}^{6} = \binom{13}{6} = \frac{13!}{6! \cdot 7!} = 1716$

2. Hányféleképpen rakhatunk be 6 levelet 13 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?

   Megoldás:

   Mivel egy rekeszbe több levél is kerülhet, az összes kiválasztások száma 13 elem 6-od osztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő:

   $C_{13}^{6,i} = \binom{13+6-1}{6} = \frac{18!}{6! \cdot 12!} = 18\,564$

3. Hányféleképpen osztható szét 7 ezer forint jutalom 3 dolgozó között, ha mindegyik dolgozó ezerrel osztható összegű jutalmat kaphat, de a 0 Ft jutalom is megengedett.

   Megoldás:

   Azaz 7 db ezres szétosztásáról van szó, ami 3 elem 7-ed osztályú ismétléses kombinációinak a számával egyenlő:

   $C_{7}^{3,i} = \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$

4. Hány 10 jegyű szám készíthető 6 darab kettes, 2 darab hetes és 2 darab hatos számjegyből?

   Megoldás:

   Ismétléses permutáció:

   $P_{10}^{6,2,2} = \frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$

   Azaz 1260 darab 10 jegyű szám készíthető a megadott számjegyekből.

5. Hány nyolcjegyű szám készíthető 1 darab nulla, 1 darab kettes és 6 darab hármas számjegyből?

   Megoldás:

   Ismétléses permutáció:

   $P_{8}^{1,1,6} = \frac{8!}{6!} = 56$

   Mivel nullával nem kezdődhet szám, így a lehetséges esetek számát csökkentenünk kell. A nullával kezdődő számok száma:

   $P_{7}^{1,6} = \frac{7!}{6!} = 7$

   Azaz $56 - 7 = 49$ darab 8 jegyű szám készíthető a megadott számjegyekből.

6. Egy dobozban 10 golyó van, közülük 4 fehér, 4 piros és 2 kék színű. A 10 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjuük meg?

   Megoldás:

   Ismétléses permutáció:

   $P_{10}^{4,4,2} = \frac{10!}{4!4!2!} = 3150$

2 Valószínűségek meghatározása kombinatorikai módszerekkel

1. Egy rejtvénypályázaton három díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között (egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat). 72 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 21 Miskolcról. Mi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

   Megoldás:

   $$P(\text{nem lesz miskolci nyertes}) = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{72}{3}} = \frac{595}{1704} = 0,34918$$

   $$P(\text{lesz miskolci nyertes}) = 1 - \frac{\binom{51}{3}}{\binom{72}{3}} = 1 - \frac{595}{1704} = 1 - 0,34918 = 0,65082$$

   Tehát $0,65082$ annak a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes.

2. Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 9 egyenlő képességű jelölt maradt, 3 fiú és 6 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 3 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

   Az összes lehetséges választások száma: $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

   1 eset nem kedvező, ha 3 fiút választanak ki, így a kedvező esetek száma: 83

   $P(\text{lesz lány a kiválasztottak között}) = \dfrac{83}{84} = \underline{0,98810}$

3. Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 12 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 7 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 3 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

   A : lesz lány a kiválasztottak között

   $$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}\binom{7}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{21}{22} = \underline{0,95455}$$

4. Egy fogadásra egymástól függetlenül 4 angol, 2 francia és 3 olasz diplomata érkezik. Mi a valószínűsége, hogy az első három vendég érkezési sorrendje angol-francia-olasz?

   Megoldás:

   Összes eset: $P_9^{4,2,3} = \dfrac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!} = 1260$

   Kedvező eset: $P_6^{3,1,2} = \dfrac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$

   $P = \dfrac{60}{1260} = \underline{0,047619}$

5. Egy dobozban 5 piros és 4 zöld golyó van. Visszatevés nélkül, bekötött szemmel kihúzunk öt golyót. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 4 piros golyót húzunk?

Megoldás:

$N = 9$

$s = 5$

$n = 5$

$k = 4$

$$p = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{4}\binom{4}{1}}{\binom{9}{5}} = \frac{10}{63} = \underline{0,158\,73}$$

6. Egy dobozban 12 alkatrész van, amelyek közül 8 selejtes. 5 elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 3 selejtes alkatrész van?

Megoldás:

$$P = \frac{\binom{8}{3}\binom{4}{2}}{\binom{12}{5}} = 0.424\,24$$

7. Egy dobozban 10 alkatrész van, amelyek közül 5 selejtes. 3 elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 2 selejtes alkatrész van?

Megoldás:

Visszatevéses mintavétel esetén:

$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

A minta 3 elemű, $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 1 - p$

$$P = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$$

8. Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0,80, míg B 0,76 valószínűséggel talál a kosárba. A játékot addig folytatják, amíg valamelyik játékos beletalál a kosárba. Mi annak a valószínűsége, hogy pont az ötödik dobás után ér véget a játék?

Megoldás:

$$\begin{array}{ll} P(A) = 0,8 & P(\overline{A}) = 0,2 \\ P(B) = 0,76 & P(\overline{B}) = 0,24 \end{array}$$

$P(5.\text{ dobás után ér véget a játék}) = (0.2)^2 \cdot (0.24)^2 \cdot 0.8 = \underline{0,0018432}$

3 Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel

1. Ketten megbeszélik, hogy délután 5 óra és délután 5 óra 49 perc között találkoznak. Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek és mindketten 10 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?

   Megoldás:

   Jelölje x az egyik, y a másik ember érkezési pillanatát.

   Akkor találkoznak, ha $|x-y| \leq 10$, azaz

   * $x-y \leq 10$, ha $x > y \implies y \geq x-10$

   * $y-x \leq 10$, ha $x < y \implies y \leq x+10$

   A megoldás megadásához alkalmazható a geometriai valószínűségi modell:

   $p = \dfrac{T_{hatszög}}{T_{négyzet}}$

   $T_{hatszög} = T_{négyzet} - 2T_{háromszög} = 49^2 - 2\dfrac{39^2}{2} = 49^2 - 39^2 = 880$

   $p = \dfrac{880}{49^2} = \dfrac{880}{2401} = \underline{0,36651}$

2. Egy kis kikötőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 1 és 13 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 65 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?

   Megoldás:

   1 és 13 óra között $12 \cdot 60 = 720$ perc telik el.

   Jelölje x az első, y a második hajót

   $|x-y| > 65$ esetén nem kell várniuk egymásra

   $x-y > 65$ illetve $y-x > 65$

   Tehát $P = \dfrac{T_{háromszögek}}{T_{négyzet}} = \dfrac{(720-65)^2}{720^2} = 0,8276.$

4 A feltételes valószínűség, Bayes tétele

1. A CHIPCAD microchip gyártó cég teljes termelése két gépsorról származik. Az I. gépsor adja a termelés 85%-át 0,047% selejttel, míg a II. gépsor adja a termelés 15%-át 0,027% selejttel. Ha egy véletlenül kiválasztott chip selejtes, akkor mi a valószínűsége, hogy azt a II. gépsor gyártotta?

   Megoldás:

   Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i gép termeléséből húztunk $(i = 1, 2)$, B pedig azt, hogy a kiválasztott chip selejtes.

   Ekkor:

   $$P(A_1) = 0,85 \qquad P(B \mid A_1) = 0,00047$$
   $$P(A_2) = 0,15 \qquad P(B \mid A_2) = 0,00027$$

   A Bayes-tétel szerint:

   $$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2) \cdot P(A_2)}{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2)}$$
   $$= \frac{0.15 \cdot 0.00027}{(0.85 \cdot 0.00047) + (0.15 \cdot 0.00027)} = \underline{0,092045}$$

   Tehát 0,092045 a keresett valószínűség.

2. Egy terméket három üzemben készítenek. A három üzemben a selejtszázalék rendre 0.11, 0.23 és 0.39, míg a három üzemben sz össztermméknek rendre 21, 40 és 39 százalékát állítják elő. Az össztermékből kivesznek egy darabot, és az hibás. Mi a valószínűsége, hogy az első üzemben gyártották?

   Megoldás:

	I.	II.	III.
termelés:	21 %	40 %	39 %
selejt:	0,11 %	0,23 %	0,39 %

   $A_{i:}$ a kivett termék az i-edik üzemben készült $(i = 1, 2, 3)$

   A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszert alkot

   B : a kivett termék selejtes

   Bayes-tétele szerint:

   $$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + P(B \mid A_3) \cdot P(A_3)}$$
   $$= \frac{0.0011 \cdot 0.21}{0.0011 \cdot 0.21 + 0.0023 \cdot 0.40 + 0.0039 \cdot 0.39} = \underline{0,086452}$$

3. Egy adott betegségben szenvedő betegek 33 % -át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 25%-ról 52%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?

   Megoldás:

   $P(\text{új kezelést kapott}) = 0,33$

   $P(\text{meggyógyul}|\text{régi kezelést kapott}) = 0,25$

   $P(\text{meggyógyul}|\text{új kezelést kapott}) = 0,52$

   $P(\text{meggyógyul}) = P(\text{gy}|\text{új}) \cdot P(\text{új}) + P(\text{gy}|\text{régi}) \cdot P(\text{régi}) = 0.52 \cdot 0.33 + 0.25 \cdot 0.67 = 0.339\,1$

   $$P(\text{ új}|\text{gy}) = \frac{P(gy \mid új) \cdot P(új)}{P(gy)} = \frac{0.52 \cdot 0.33}{0.3391} = \underline{0.506\,05}$$