Extremális pontok, extremális irányok meghatározása

Miskolci Egyetem

Gazdaságmatematika II.

Egyenletekkel megadott halmaz esete:

Legyen adott az $Ax = b, x \geqq 0$ egyenletrendszer. Ekkor az x vektor az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer **nemnegatív bázismegoldása**, azaz ha az $Ax = b$ egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban a b oszlopában minden elem nemnegatív.

Példa

Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 20 \\
-x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 10 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 50
\end{array}
$$

Az egyenletrendszert pivotálással kell megoldani ahhoz, hogy az összes extremális pontot meg lehessen határozni. A kiinduló táblázat:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
e_1	4	1	-1	1	2	20
e_2	-1	-1	0	3	1	10
e_3	3	2	**1**	0	0	50

A pivotelemeket piros színnel fogjuk jelölni.

	x_1	x_2	e_3	x_4	x_5	b
e_1	8	3	1	1	2	70
e_2	-1	-1	0	3	**1**	10
x_3	3	2	1	0	0	50

	x_1	x_2	e_3	x_4	e_2	b
e_1	10	**5**	1	-5	-2	50
x_5	-1	-1	0	3	1	10
x_3	3	2	1	0	0	50

	x_1	e_1	e_3	x_4	e_2	b
x_2	2	$1/5$	$1/5$	-1	$-2/5$	10
x_5	1	$1/5$	$1/5$	2	$3/5$	20
x_3	-1	$-2/5$	$3/5$	2	$4/5$	30

Az e_1, e_2, e_3 vektorokat át lehet tenni a b oszlop mögé, mert a továbbiakban nem lesz rá szükségünk (sőt el is lehet hagyni a táblából).

	x_1	x_4	b	e_1	e_2	e_3
x_2	2	-1	10	1/5	-2/5	1/5
x_5	1	2	20	1/5	3/5	1/5
x_3	-1	2	30	-2/5	4/5	3/5

A következőkben határozzuk meg az egyenletrendszer összes bázismegoldását. Ezek száma legfeljebb

$$\binom{n}{rang(\mathbf{A})} = \binom{5}{3} = 10.$$

A lehetséges bázismegoldások, amelyek az 5 változó 3-adrendű ismétlés nélküli kombinációjaként következők:

sorszám	**bázisváltozók**
1.	(x_1, x_2, x_3)
2.	(x_1, x_2, x_4)
3.	(x_1, x_2, x_5)
4.	(x_1, x_3, x_4)
5.	(x_1, x_3, x_5)
6.	(x_1, x_4, x_5)
7.	(x_2, x_3, x_4)
8.	(x_2, x_3, x_5)
9.	(x_2, x_4, x_5)
10.	(x_3, x_4, x_5)

Induljunk ki a rövid bázistáblázatból, amely nem tartalmazza a segédváltozókat. Ez a 8. bázistáblázat, amelyet a táblázat bal felső sarkában jelölünk is.

8.	x_1	x_4	b
x_2	2	-1	10
x_5	1	2	20
x_3	-1	2	30

Végezzünk el 6 pivotálást, a következő bázistáblázatokat úgy kaptuk, hogy az első sorban, a második sorban ill. a harmadik sorban választottunk pivotelemet.

5.	x_2	x_4	b
x_1	1/2	-1/2	5
x_5	-1/2	5/2	15
x_3	1/2	3/2	35

10.	x_1	x_2	b
x_4	-2	-1	-10
x_5	5	2	40
x_3	3	2	50

1.	x_5	x_4	b
x_2	-2	-5	-30
x_1	1	2	20
x_3	1	4	50

7.	x_1	x_5	b
x_2	5/2	1/2	20
x_4	1	2	10
x_3	-2	-1	10

3.	x_3	x_4	b
x_2	2	3	70
x_5	1	4	50
x_1	-1	-2	-30

9.	x_1	x_3	b
x_2	3/2	1/2	25
x_5	2	-1	-10
x_4	-1/2	1/2	15

Most a fennmaradó bázistáblázatokat (2., 4. 6. sorszámú) számoljuk ki, a fenti 6 bázistáblák valamelyikéből, a 2. sorszámút (x_1, x_2, x_4) például a 3., a 4. sorszámút (x_1, x_3, x_4) az 1., a 6. sorszámút (x_1, x_4, x_5) pedig a 10. táblázatból számoltuk ki, amelyek a következők:

2.	x_3	x_5	b
x_2	5/4	-3/4	65/2
x_4	1/4	1/4	25/2
x_1	-1/2	1/2	-5

4.	x_5	x_2	b
x_4	2/5	-1/5	6
x_1	1/5	2/5	8
x_3	-3/5	4/5	26

6.	x_3	x_2	b
x_4	2/3	1/3	70/3
x_5	-5/3	-4/3	-130/3
x_1	1/3	2/3	50/3

Az egyes táblázatokból kiolvashatók az egyenletrendszer bázismegoldásai, amelyek rendre a következő:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ -30 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 65/2 \\ 0 \\ 25/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -30 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 26 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 50/3 \\ 0 \\ 0 \\ 70/3 \\ -130/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ -10 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Innen látható, hogy a konvex poliédernek négy extremális pontja van: x_4, x_5, x_7 és x_8. Extremális iránya nincs, mert egyik extremális pontot tartalmazó táblában sincs olyan oszlop, ahol minden elem nempozitív.
A karakterizációs tételt felhasználva a halmaz egy tetszőleges pontja felírható a következő alakban:

$$P = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 26 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geqq 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$.

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a kiinduló táblában használjuk a változókat $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ és az egységvektorokat is (e_1, e_2, e_3) ami néha bonyolulttá teszi a jelöléseket. Ennek elkerülésére a következő dolgot szokás használni, ami a későbbiekben a lineáris programozási feladatokabn hasznos lesz számunkra is. Készítsünk egy *segéd egyenletrendszert* úgy, hogy minden egyenlethez adjunk hozzá egy új változót, jelölje ezeket az u_1^*, u_2^*, u_3^* segéd- (vagy fiktív) változók . A segéd egyenletrendszer a következő:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrrrcr}
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & +u_1^* & & & = & 20 \\
-x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & & +u_2^* & & = & 10 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & +u_3^* & = & 50
\end{array}$$

Ennek az egyenletrendszernek a vektoros alakja az alábbi:

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+u_1^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

A segédfeladat 8 vektora között 3 egységvektor, így a segédfeladatnak azonnal van bázismegoldása. Ezzel azonnal fel tudunk írni egy bázistáblázatot, amely most már csak változókat tartalmaz.

Példa

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
u_1^*	4	1	-1	1	2	20
u_2^*	-1	-1	0	3	1	10
u_3^*	3	2	1	0	0	50

A számolás innen a szokásos módon történik. A számolás végén a rövid táblát úgy kapjuk meg, hogy a fiktív változók oszlopait elhagyjuk.

Egyenlőtlenségekkel megadott halmaz esete:

Az egyenlőtleséggel megadott feladatokat úgy lehet megoldani, hogy új változók bevezetésével visszavezetjük egyenletekkel megadott halmazok esetére.

- Nézzük először az $Ax \leqq b$ típusú feltételek esetét. Ezeket egy-egy u_i úgynevezett hiányváltozó bevezetésével alakíthatjuk át. Ekkor egy $Ax + Eu = b$ alakú egyenletrendszert kapunk. Ez azért jó, mert az u_i változók bázist alkotnak.
- Most nézzük az $Ax \geqq b$ típusú feltételek esetét. Ezeket egy-egy v_j úgynevezett többletváltozó bevezetésével alakíthatjuk át. Ekkor egy $Ax - Ev = b$ alakú egyenletrendszert kapunk. Itt viszont nem adódik rögtön bázismegoldás. Ezért még be szokás vezetni az előző példában szereplő u_j^* fiktíváltozókat is. Ekkor egy $Ax - Ev + Eu^* = b$ alakú egyenletrendszert kapunk ahol az u_j^* változók bázist alkotnak.

Megjegyzés

Érdemes észrevenni, hogy a $Ax \geqq b$ típusú feltételek esetén ha az egyenlőtlenséget megszorozzuk (-1)-gyel, akkor $-Ax \leqq -b$ típusú feltétel adódik, amelybe elegendő csak az u_i hiányváltozókat bevezetni.

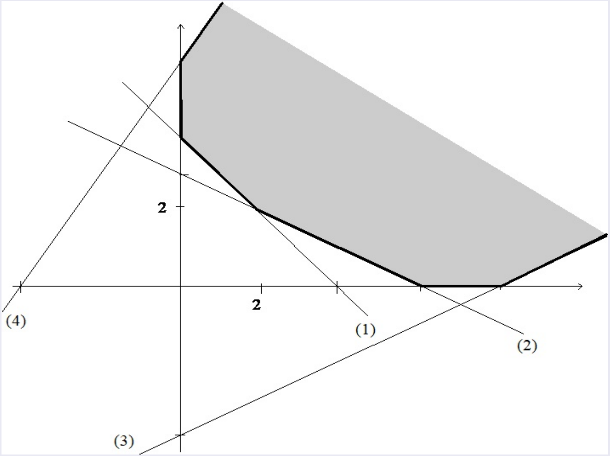
Példa

Legyenek adottak az alábbi félterek (egyenlőtlenségek), amelyeknek a közös részét keressük.

$$
\begin{array}{rrcll}
x_1 & +x_2 & \geqq & 4 & (1) \\
x_1 & +2x_2 & \geqq & 6 & (2) \\
2x_1 & -4x_2 & \leqq & 16 & (3) \\
-3x_1 & +2x_2 & \leqq & 12 & (4) \\
 & x_1, x_2 & \geqq & 0 &
\end{array}
$$

A példában szereplő egyenesek illetve félsíkok egyszerűen megrajzolhatóak, amelyet az alábbi ábra mutat:

Példa



Példa

A fenti egyenlőtlenségrendszert először egyenletrendszerré alakítjuk. Egyik lehetőség, hogy a $\geqq$ típusú egyenlőtlenségeket beszorozzuk (-1)-gyel, így mindegyik egyenlőtlenség $\leqq$ típusú, amelyeket egyenlőséggé egy-egy u_i hiányváltozó bevezetésével alakíthatunk át.
Az átalakítás után az alábbi rendszer kapjuk:

$$
\begin{array}{rrrrrrcrr}
-x_1 & -x_2 & +u_1 & & & & = & -4 & (1) \\
-x_1 & -2x_2 & & +u_2 & & & = & -6 & (2) \\
2x_1 & -4x_2 & & & +u_3 & & = & 16 & (3) \\
-3x_1 & +2x_2 & & & & +u_4 & = & 12 & (4) \\
 & & & x_1, x_2, & u_1, u_2 & , u_3, u_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Példa

Az u_i ismeretlenekhez tartozó egységvektorok azonnal bázist alkotnak, így azonnal felírható az egyenletrendszer induló bázistáblázata. A rövid táblázatot használjuk a megoldás során.

	x_1	x_2	b
u_1	-1	-1	-4
u_2	-1	-2	-6
u_3	2	-4	16
u_4	-3	2	12

Ebből a bázistáblázatból pivotálással nyerjük a 6 változót tartalmazó egyenletrendszer bázismegoldásait. A hat oszlopvektorból négy egységvektor, így az együtthatómátrix oszlopvektor rendszerének rangja 2. A lehetséges bázismegoldások száma $\binom{6}{4} = 15$. Ezeket most nem számoljuk ki, csak felírjuk a megoldásokat.

Példa

Az egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásai az átalakított rendszer extremális pontjait szolgáltatják, amelyek a következők:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 32 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az eredeti rendszer (konvex poliéder) extremális pontjai (csúcspontjai):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Példa

Az eredeti rendszer illetve a konvex poliéder extremális irányai:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Ha az extremális irányt egy pozitív számmal megszorozzuk, akkor az is extremális iránynak tekinthető, így a $2\mathbf{d}_2 = (2,3)$ vektor is extremális irány. A karakterizációs tétel szerint a konvex poliéder tetszőleges pontját előállíthatjuk az extremális pontok konvex lineáris kombinációjának és az extremális irányok nemnegatív lineáris kombinációjának az összegeként:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ahol $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$ és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \mu_1, \mu_2 \geqq 0$.