

# Extremális pontok, extremális irányok, Konvex poliéderek

Miskolci Egyetem

Gazdasági matematika II.

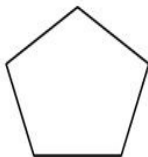
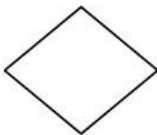
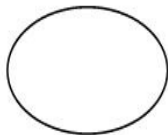
## Definíció (Konvex halmaz)

Legyen  $S \in \mathbb{R}^n$  nemüres halmaz. Az  $S$  halmazt akkor nevezzük konvex halmaznak, ha bármely két pontját összekötő egyenes szakasz minden pontja az  $S$  halmazhoz tartozik. Más szavakkal megfogalmazva: Az  $S$  konvex halmaz, ha bármely  $x_1, x_2 \in S$  esetén

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$$

minden  $\lambda \in [0; 1]$  számra.

## Példa konvex halmazra



## Példa konvex halmazra

Az  $Ax = b$  egyenletrendszer megoldásait alkotó  $x$  vektorok összessége is konvex halmaz.

Legyen  $x_1$  és  $x_2$  az egyenletrendszer két megoldása, azaz  $Ax_1 = b$ , illetve  $Ax_2 = b$ . Igazolni kell, hogy ekkor a  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  is megoldás, azaz  $A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = b$  minden  $\lambda \in [0; 1]$  számra. A mátrix-vektor műveletek tulajdonságai miatt azt kapjuk, hogy

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Hasonlóan igazolhatjuk, hogy az  $S = \{x : Ax \leq b\}$  halmaz és a  $S = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  halmaz is konvex

## Definíció (Extremális pont)

Legyen  $S \in \mathbb{R}^n$  nemüres zárt konvex halmaz. Az  $x \in S$  pont az  $S$  konvex halmaz *extremális pontja*, ha az  $S$ -nek nincs olyan két különböző pontja, hogy az  $x$  pont a két pontot összekötő szakasz belső pontja legyen. Azaz nem léteznek olyan

$$x_1; x_2 \in S; \quad x_1 \neq x_2$$

pontok, hogy

$$x = x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

valamely  $\lambda \in (0; 1)$  számra.

Más megfogalmazásban: Az  $x \in S$  pont az  $S$  konvex halmaz *extremális pontja*, ha az

$$x = x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad (x_1, x_2 \in S \text{ és } 0 \leq \lambda \leq 1)$$

feltételezésből következik, hogy  $x = x_1 = x_2$ .

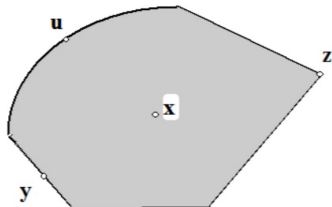
## Megjegyzés

A konvex halmaz extrémális pontjai pontosan azok a pontok, melyeket a halmazból elhagyva ismét konvex halmazt kapunk.

## Példa

Egy szakasz extrémális pontjai a végpontjai.

## Példa



Az  $x$  pont belső pont.

Az  $y$ ,  $z$ ,  $u$  pontok határpontok.

Az  $u$ ,  $z$  határpontok extrémális pontok.

## Definíció (irány fogalma)

Legyen  $S \in \mathbb{R}^n$  nemüres zárt konvex halmaz. Az  $S$  konvex halmazban egy nemzérus  $d$  vektort iránynak (vagy irányvektornak) nevezünk, ha bármely  $x \in S$  ponthoz tartozó  $x + \lambda d$  pont is az  $S$  konvex halmaz eleme minden  $\lambda > 0$  esetén.

Az  $S$  konvex halmaz  $d_1$  és  $d_2$  irányvektorát nem egyirányba mutató irányvektoroknak nevezzük, ha  $d_1 \neq \alpha d_2$  valamely  $\alpha > 0$ -ra.

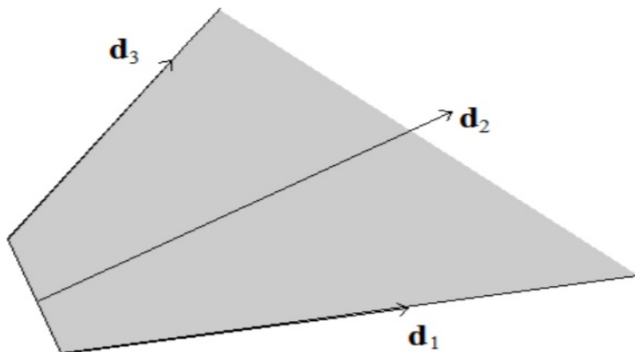
## Definíció (extremális irány fogalma)

Az  $S$  konvex halmaz egy  $d$  irányvektorát extremális iránynak nevezzük, ha  $S$ -nek nincs olyan két, nem egyirányba mutató irányvektora, hogy a  $d$  irány a két irány által meghatározott szögtartomány belsejében legyen, azaz nem léteznek olyan  $d_1; d_2$  ( $d_1 \neq \alpha d_2$ ) irányok, hogy  $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$  valamely  $\lambda_1; \lambda_2 > 0$  számokra.

Más megfogalmazásban: Az  $S$  konvex halmaz egy  $d$  irányvektora extremális irány, ha a  $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$  ( $\lambda_1; \lambda_2 > 0$ ) feltételezésből következik, hogy  $d_1 = \alpha d_2$  valamely  $\alpha > 0$ -ra.

## Példa

Az alábbi ábrán a  $d_2$  vektor a halmaz egy tetszőleges iránya, a  $d_1$  és a  $d_3$  vektorok a halmaz extrémális irányai.



## Megjegyzés

Ha egy konvex halmaz korlátos, akkor nincsenek irányai, így extrémális irányja sincs.

## Definíció (Konvex poliéder fogalma)

Véges sok zárt féltér metszetét konvex poliédernek nevezzük.

Képletben:

$$S = \{x : a_i x \leq b_i \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$$

## Megjegyzés

A poliéder szó sok lapot jelent, itt azt jelenti, hogy a poliéder hipersíkokkal határolt. A konvex jelző pedig a halmaz másik tulajdonságára utal, amelyről egyszerűen meggyőződhetünk, hisz a félterek konvexek, konvex halmazok metszete pedig konvex.

## Megjegyzés

A konvex poliéder egy speciális konvex halmaz. És ennek az extrémális pontjait csúcspontoknak vagy röviden csúcsoknak is szokás nevezni. Mivel egy egyenletet két egyenlőtlenséggel leírhatunk, így a konvex poliéder véges számú egyenlőtlenséggel és/vagy egyenlettel reprezentálható.

## Példa

Néhány tipikus példa a konvex poliéderekre:

- 1  $S = \{x : Ax = b\}$
- 2  $S = \{x : Ax = b; x \geq 0\}$
- 3  $S = \{x : A_1x \leq b_1; A_2x = b_2; A_3x \geq b_3; x \geq 0\}$

## Tétel

A korlátos konvex poliéderekre igaz, hogy bármely pontja felírható a csúcspontjainak (extremális pontjainak) konvex lineáris kombinációjaként. Ha a korlátos konvex poliéder összes csúcspontjait  $x_1, x_2, \dots, x_m$  jelölük, akkor a halmaz tetszőleges  $x$  pontját a csúcspontok konvex kombinációjaként írhatjuk fel, azaz

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i,$$

ahol

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

## Tétel (Az extrémális pont karakterizációja)

Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az

$$S = \{x : Ax = b; x \geq 0\}$$

alakban, ahol  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix,  $b$  egy  $m$  elemű vektor. Az  $x$  pont akkor és csak akkor extrémális pontja az  $S$  konvex poliédernek, ha az  $x$  vektor az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer **nemnegatív bázismegoldása**, azaz ha az  $Ax = b$  egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban a  $b$  oszlopában minden elem nemnegatív.

## Tétel (Az extrémális irány karakterizációja)

Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az

$$S = \{x : Ax = b; x \geq 0\}$$

alakban, ahol  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix,  $b$  egy  $m$  elemű vektor. A  $d$  irány akkor és csak akkor extrémális iránya az  $S$  konvex poliédernek, ha a  $d$  vektor az  $Ax = 0$  homogén lineáris egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldása, azaz ha az  $Ax = b$  egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban valamely  $a_j$  (vagy  $x_j$ ) oszlopában minden elem nempozitív. Jelölje ezeket az elemeket egy  $t_j$  vektor, ekkor a  $d$  extrémális irány a

$$d = \begin{bmatrix} -t_j \\ e_j \end{bmatrix}$$

alakban írható fel, ahol  $e_j$  a  $j$ -edik egységvektor.

## Reprezentációs tétel

Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az

$$S = \{x : Ax = b; x \geq 0\}$$

alakban, ahol  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix,  $b$  egy  $m$  elemű vektor.

Legyenek az  $S$  konvex poliéder extrémális pontjai  $x_1, x_2, \dots, x_k$  és extrémális irányai  $d_1, d_2, \dots, d_l$ .

Ekkor az  $S$  konvex poliéderek tetszőleges  $x$  pontja felírható az extrémális pontok konvex kombinációjának és az extrémális irányok nemnegatív kombinációjának összegeként, azaz képletben

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j,$$

ahol

$$\lambda_i, \mu_j \geq 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$