

GAZDASÁGMATEMATIKA 2

2. előadás

1. DETERMINÁNS, INVERZ

Jelölje $A(i)$ azt az $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot, amelyet az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az i -edik sora és *első* oszlopa elhagyásával kapunk:

$$A(i) = \begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1. DEFINÍCIÓ. A

$$\det(A) = a_{11}, \quad \text{ha } n = 1$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \text{ha } n = 2$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A(i)), \quad \text{ha } n \geq 3$$

előírásokkal számított valós számot a négyzetes, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsának nevezzük.

2. PÉLDA. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $\det A = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$.

3. PÉLDA. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a mátrix determinánsa az első oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \right) - 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 0 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 7 - 5 \cdot 1) - 2 \cdot (3 \cdot 7 - 4 \cdot 1) + 0 \cdot (3 \cdot 5 - 4 \cdot 2) \\ &= 9 - 34 + 0 = -25. \end{aligned}$$

4. TÉTEL. Az inverz mátrixra fennállnak az alábbi tulajdonságok:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T := A^{-T}.$$

Azokat a mátrixokat, melyeknek létezik inverze, nonszinguláris mátrixoknak nevezzük.

5. TÉTEL. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det(A) \neq 0$.

Ha $\det(A) = 0$, akkor a mátrixot szingulárisnak nevezzük.

A vektorok egy halmazát lineárisan függetlennek nevezzük, ha egyikük sem fejezhető ki a többi vektor lineáris kombinációjaként. Ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorokról beszélünk.

6. DEFINÍCIÓ. A $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok lineárisan függetlenek, ha lineáris kombinációjuk csak úgy lehet a nullvektor, ha mindegyik egyttható zérus. Azaz

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

7. MEGJEGYZÉS. Ha egy mátrix sorvektorai (oszlopvektorai) lineárisan függetlenek, akkor a mátrix determinánsa nem 0. Ha egy mátrix sorvektorai (oszlopvektorai) lineárisan összefüggők, akkor a mátrix determinánsa 0.

2. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

A lineáris egyenletrendszerek általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ezt az alakot az egyenletrendszer **skaláris alakjának** nevezzük.

Az egyenletrendszert megadhatjuk a tömörebb

$$Ax = b$$

formában is, ahol

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Ezt az alakot az egyenletrendszer **mátrixos alakjának** nevezzük.

Az $Ax = b$ egyenletrendszert felírhatjuk az ekvivalens

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$$

alakban is, ahol $a_i \in \mathbb{R}^n$ az A mátrix i -edik oszlopát jelöli (x_i pedig skalár: a megoldásvektor i -edik komponense). A $\sum_{i=1}^n x_i a_i$ összeg az $\{a_i\}_{i=1}^n$ vektorok lineáris kombinációja. Ezt az alakot az egyenletrendszer **vektoros alakjának** nevezzük.

Ha $m < n$, akkor **alulhatározott**,

ha $m > n$, akkor **túlhatározott** egyenletrendszerről beszélünk.

Az $m = n$ esetben pedig az egyenletrendszert **négyzetesnek** nevezzük.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása esetén három eset lehetséges:

- (i) az egyenletrendszernek nincs megoldása,
- (ii) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van,
- (iii) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

8. DEFINÍCIÓ. Ha az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek legalább egy megoldása van, akkor az egyenletrendszert **konzisztensnek** nevezzük. Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor az egyenletrendszer **inkonzisztens**.

A továbbiakban csak négyzetes egyenletrendszerekkel foglalkozunk. Felteesszük tehát, hogy $m = n$.

9. TÉTEL. Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$) egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha létezik A^{-1} . Ekkor a megoldás $x = A^{-1}b$.

10. TÉTEL. Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van $x \neq 0$ nemtriviális megoldása, ha $\det(A) = 0$.

3. A GAUSS-MÓDSZER

A Gauss-módszer két fázisból áll.

I. Azonos (a megoldást őrző) átalakításokkal az $Ax = b$ egyenletrendszert felső háromszög alakúra hozzuk.

II. A kapott felső háromszögmátrixú egyenletrendszert megoldjuk.

Az azonos átalakítást itt most úgy végezzük el, hogy egyik egyenletből kivonjuk a másik egyenlet alkalmasan megállapított konstansszorosát, így ott a szóban forgó ismeretlen együtthatója zérussá válik. Kiiktatjuk – idegen szóval elimináljuk – az ismeretlent, ezért is nevezzük a módszert eliminációs eljárásnak. Az első lépésben az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}^{(2)}x_1 & + & a_{12}^{(2)}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array}$$

alakot kell tehát kapnunk, amit ha $a_{11} \neq 0$, akkor elérhetünk úgy, hogy az i -edik sorból kivonjuk ($i = 2, \dots, n$) az első sor l_{i1} -szeresét:

$$(a_{i1} - l_{i1}a_{11})x_1 + (a_{i2} - l_{i1}a_{12})x_2 + \dots + (a_{in} - l_{i1}a_{1n})x_n = b_i - l_{i1}b_1.$$

Az $a_{i1} - l_{i1}a_{11} = 0$ feltételből kapjuk, hogy $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Ha ezt a l_{i1} értéket behelyettesítjük az egyenletbe, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy itt tényleg arról van szó, hogy az első egyenletből kifejezzük az x_1 -et, és a kapott kifejezést behelyettesítjük a maradék többibe. A számítások során nem kell az x_i szimbólumokat magunkkal cipelni, elég, ha az együtthatómátrix elemein hajtjuk végre a megfelelő módosítást.

Legyen $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$. Ekkor minden $i = 2, \dots, n$ és $j = 1, \dots, n$ esetén

$$l_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1} b_1^{(1)}$$

A következő lépésben minden $i = 3, \dots, n$ és $j = 2, \dots, n$ esetén

$$l_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - l_{i2} a_{2j}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - l_{i2} b_2^{(2)}$$

Általános (k -adik) lépés: minden $i = k+1, \dots, n$ és $j = k, \dots, n$ esetén

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)}$$

Az I . lépés: felső felső háromszög alakúra hozás Általános (k -adik) lépés: minden $i = k+1, \dots, n$ és $j = k, \dots, n$ esetén

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)}$$

Tekintsük az $Ax = b$ egyenletrendszert, ahol $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső háromszögmátrix. Ekkor

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1i}x_i + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{ii}x_i + & \dots & + a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha $a_{11} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$, azaz $\det(A) \neq 0$. Ezen egyenletrendszer megoldását adja a következő algoritmus:

$$\begin{array}{l} 1 \quad x_n = b_n / a_{nn} \\ 2 \quad x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii} \quad i = n-1, n-2, \dots, 2, 1. \end{array}$$

Alkalmazás a determináns kiszámítására. Ismeretes, hogy a determináns értéke nem változik, ha bármely sorához hozzáadjuk egy másik sor akárhányszorosát. Mivel a fenti eljárás közben csak ilyen átalakításokat hajtottunk végre a mátrixon (és így a determinánsán is), a determináns marad az eredeti. Azt tehát a végén a főátlóbeli elemek szorzata adja.

11. MEGJEGYZÉS. A Gauss-módszer I. fázisában előfordulhat, mondjuk a k -adik lépésben, hogy az a_{kk} elem zérus. Például a

$$\begin{array}{rcl} & 4x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

rendszerrel $a_{11} = 0$. Ilyen esetekben a sorok, vagy az oszlopok felcserélésével megkísérelhetjük elérni, hogy az a_{kk} helyére zérustól különböző elem kerüljön. A fenti esetben például az első és harmadik sor felcserélésével kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}$$

Az első és második oszlop cseréjével pedig azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} 4x_2 & & + & x_3 & = & 9 \\ x_2 & + & x_1 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_2 & - & 2x_1 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

A sorok cseréjénél az egyenletek (és b megfelelő komponenseinek) sorrendje, az oszlopok cseréjénél pedig a változók sorrendje változik meg. A sorok felcserélését úgy, hogy az új pivot elem zérustól különböző legyen, **főelemkiválasztásnak** nevezzük.

4. AZ LU-FELBONTÁS

12. DEFINÍCIÓ. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix LU-felbontásán a mátrix

$$A = L \cdot U$$

szorzatra bontását értjük, ahol $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alsó, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig felső háromszögmátrix.

13. TÉTEL. Az LU-felbontás nem egyértelmű.

Bizonyítás. Ha D egy nonszinguláris diagonális mátrix, akkor

$$L_1 \cdot U_1 = L_1 \cdot (DD^{-1}) \cdot U_1 = (L_1D) \cdot (D^{-1}U_1) = L_2 \cdot U_2.$$

14. MEGJEGYZÉS.

- Ha A nonszinguláris, igazolható, hogy egyetlen LU-felbontásból az összes többi csak ilyen módon származtatható.

- Amennyiben A nonszinguláris és van egy $A = L \cdot U$ szorzatra bontása, akkor olyan $A = \tilde{L} \cdot \tilde{U}$ faktorizációt is találunk, melyben az \tilde{L} vagy \tilde{U} főátlóbeli elemeit tetszőlegesen, de 0-tól különböző számként előírjuk.

- Ilyenkor közbeszúrjuk azt a (DD^{-1}) -et, amely

$$D = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$$

elemekre $d_i = \tilde{u}_{ii}/u_{ii}$, ha ott az \tilde{U} főátlóbeli eleme van \tilde{u}_{ii} -nek megadva, és $d_j = \tilde{l}_{jj}/l_{jj}$, ha a j -edik helyen az \tilde{L} főátlóbeli elemét írjuk elő.

- Ebből az is következik, hogy ha van LU -felbontása A -nak, akkor egyértelműen van olyan is, ahol az L (vagy az U) minden főátlóbeli eleme 1-es. Az ilyen háromszögmátrixokat **egység (alsó vagy felső) háromszögmátrixoknak** nevezzük.

15. TÉTEL. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nonszinguláris mátrixnak akkor és csak akkor létezik LU -felbontása, ha összes főminor mátrixa is nonszinguláris, azaz

$$\det(A_{(r)}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (r = 1, \dots, n-1).$$

Ha az r -edik lépésben elakad az elimináció, akkor $a_{rr}^{(r-1)} = 0$, ami azt jelenti, hogy $\det(A_{(r)}) = 0$.

16. MEGJEGYZÉS. Ha nem tesszük fel, hogy $\det(A_{(r)}) \neq 0$ minden $r = 1, \dots, n$ estén, akkor van olyan nonszinguláris mátrix, amelynek nincs LU -felbontása. Például az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU -felbontása. Viszont főelemkiválasztást használva minden nonszinguláris A mátrix esetén sikeresen elvégezhető a Gauss-elimináció.

5. GAUSS-JORDAN MÓDSZER

Ugyanazzal a technikával, mint ahogy a k -edik oszlopban az a_{kk} alatti elemeket kinulláztuk, a fölötte lévő elemeket is zérussá lehet tenni. Azaz az eliminációs fázisban k minden értékére az i változót nemcsak $k+1$ -től n -ig, hanem 1-től n -ig futtathatjuk, kivéve az $i = k$ esetet. (Ez annak felel meg, mintha az x_k -nak az k -edik egyenletről való kifejezése után azt az összes többibe behelyettesítenénk.) Az k -edik sort pedig végigosztjuk a a_{kk} elemmel. Így elérjük, hogy a k -edik oszlopban minden elem 0, kivéve a k -adikat, amely 1.

Az **I. fázis** végeredménye így egy diagonálmátrixú egyenletrendszer, ahol a mátrix átlójában csak 1-esek lehetnek. Ezért a **II. fázis** ekkor csupán az $x_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

17. MEGJEGYZÉS. Az algoritmus több, de ugyanolyan együtttható mátrixú $Ax = b_j$ ($b_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, m$) egyenletrendszert is képes így megoldani. Ennek következménye, hogy a Gauss-Jordan eljárás alkalmas mátrix-invertálásra. Könnyen belátható ugyanis, hogy az $Ax = e_i$ egyenletrendszer megoldása éppen az inverz mátrix i -edik oszlopvektora. Ha az algoritmusban B az egységmátrix, akkor a végeredmény: $X = A^{-1}$.

18. MEGJEGYZÉS. Azt is tudjuk, hogy az A mátrix determinánsa ebben az esetben nem lesz más, mint a kiválasztott pivotelemek a_{kk} , $k = 1, 2, \dots, n$ elemek szorzata, azaz

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$