Vektorok

A vektor fogalma

A vektor legrövidebb megfogalmazása: a vektor egy **rendezett szám *n*-es**. Bővebben kifejtve a vektor tehát egy olyan matematikai objektum, amely *n* db valós számból áll és fontos a számok sorrendje is.

<u>Példa:</u> ***a***=(4, 7, 3); ***b***=(45, -12, 2, -6, 78).

A vektor elemeit a vektor komponenseinek, koordinátáinak nevezzük és zárójelbe tesszük. Az ***a*** vektor 3 elemű, más szóval 3- dimenziós, a ***b*** vektor pedig 5-dimenziós vektor.

A vektor jelölésére a latin kisbetűket használjuk: ***a, b, ..., x, y,...*** stb.

A vektor elemeit a vektor jelölésére használt dőlt kisbetűvel jelöljük és alsóindexbe írjuk az elem sorszámát: ***a*** = $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$.

Az *n*-dimenziós vektorok összességét $\mathbb{R}^n$ -nel jelöljük.

Az ***a***$\in \mathbb{R}^n$ jelöléssel jelezzük, hogy az a matematikai objektum ***n***-dimenziós vektor.

A vektor elemeit vagy sorba, vagy oszlopba rendezve írjuk fel. Zárójelként használhatunk kerek vagy szögletes zárójelet is.

Például sorvektorként az : ***a*** = $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ vagy az ***a*** = $[a_1, a_2,\ldots,a_n]$. a=[a1, a2,...,an] vagy oszlopvektorként az

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{vagy az} \quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

jelölés is használható. Nyilvánvaló, hogy a sorvektorként vagy oszlopvektorként való felírás ugyanazokat az információkat tartalmazzák, hiszen a számok és azok sorrendje megegyezik mindkét jelölésnél. A mátrixok ismertetésénél fogjuk majd megérteni a két jelölés közötti különbséget. Ott majd látjuk, hogy meg is különböztetjük őket egy jelöléssel.

A vektorok között három speciális vektort ismertetünk. Mindegyik dimenzióban értelmezzük ezeket a speciális vektorokat.

Zérusvektor: ***0***=(0, 0, 0, ..., 0). A zérusvektor minden eleme zérus.

Összegzővektor: ***1***=(1, 1, 1, ..., 1). Az összegzővektor minden eleme 1.

Egységvektor: Az ***n***-dimenziós vektorok között ***n*** darab egységvektor van.

Az első egységvektornál az 1. elem az 1-es, a másodiknál a 2. elem az 1-es stb. és a többi elem zérus, azaz

$\boldsymbol{e_1}$ = (1, 0, 0,..., 0, 0),

$\boldsymbol{e_2}$ = (0, 1, 0,..., 0, 0), ...

$\boldsymbol{e_n}$ = (0, 0, 0,..., 0, 1).

Maga a vektor elnevezés geometriai értelmezésből származik. A szám 2-eseket és a szám 3-asokat a síkon ill. a térben irányított egyenes szakaszként ábrázolhatjuk. Ha a sík egy A pontjából a B pontjába elmozdulunk, akkor ezt egy vektorral (szám 2-essel) leírhatjuk. A vektor első eleme a vízszintes tengely irányába, a második eleme pedig a függőleges tengely irányába történő elmozdulást jelenti. A 3-dimenziós vektorok is hasonlóan értelmezhetők. A vektor szó latin eredetű és eredeti jelentései "szállító", "hordozó", "utas", pontosabban azzal 4 kapcsolatos, hogy valakit vagy valamit egyik helyről a másikba szállítanak. A háromnál nagyobb dimenziójú vektoroknak már nem adhatunk geometriai szemléletet, de a többdimenziós esetben is gyakran használunk geometriai fogalmakat, mivel a síkbeli és a térbeli vektorok sok tulajdonsága átvihető a magasabb dimenzióba. (Pl. az ortogonalitás, más szóval merőlegesség).

Az $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat egyenlőnek mondjuk (jelölésben $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$), ha a vektoroknak az azonos sorszámú komponenseik megegyeznek, azaz $a_i = b_i$, minden $i=1,2,...,n$ esetén.

Az $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok között az $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ nagyságrendi reláció akkor áll fenn, ha a vektoroknak az azonos sorszámú komponenseire fennáll a $\le$ reláció, azaz $a_i \le b_i$, minden $i=1,2,...,n$ esetén. (Hasonlóan értelmezzük az $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, az $\boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{b}$ és az $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ nagyságrendi relációkat).

Műveletek vektorokkal

Két olyan műveletet fogunk értelmezni a vektorokkal, amelyek eredménye is vektor, ezek a műveletek az összeadás és a skalárral való szorzás. Később olyan műveletet is definiálunk, amelynek eredménye nem vektor, hanem egy skalár szám lesz. Ezt a fontos műveletet skaláris szorzásnak nevezzük.

Összeadás

Csak azonos dimenziójú vektorok összeadását értelmezzük. Legyen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2,, \ldots, a_n)$ és $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2,...,b_n)$ két vektor. Az $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ vektor alatt az alábbi vektort értjük:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n).$$

Az összegvektor elemei tehát az azonos sorszámú komponensek összege. Két vektor különbségét az összeadás alapján könnyen értelmezhetjük. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor különbségén azt a $\boldsymbol{c}$ vektort értjük, amelyre az $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ összefüggés áll fenn, a különbségvektort $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$-vel jelöljük. Az $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ vektor elemeit az azonos sorszámú komponensek megfelelő sorrendben vett különbsége adja, képletben

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, ..., a_n-b_n).$$

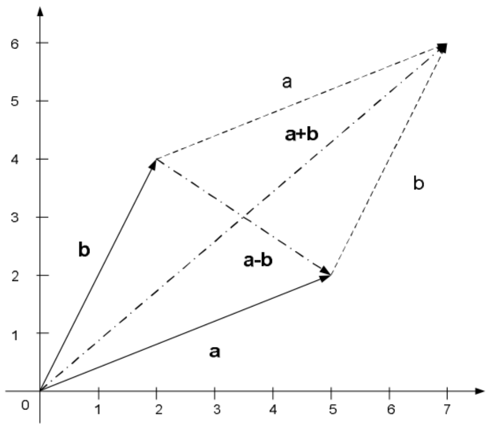
Példa: Legyen $\boldsymbol{a}$=(5, 2) és $\boldsymbol{b}$=(2, 4). Ekkor az összegvektor:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (5, 2) + (2, 4) = (5+2, 2+4) = (7, 6),$$

a különbségvektor:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (5, 2) - (2, 4) = (5-2, 2-4) = (3, -2).$$

A két $\mathbb{R}^2$-beli vektor összeadását és kivonását geometriai úton is tudjuk szemléltetni. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma egyik átlója adja az $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ összegvektort, az $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ különbségvektort pedig a másik átló adja, mégpedig úgy, hogy a különbségvektor a $\boldsymbol{b}$ vektor végpontjából az a vektor végpontjába mutat. Ezt szemlélteti az alábbi ábra.



Skalárral való szorzás

Legyen λ egy skalár szám. A $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor alatt az alábbi vektort értjük:

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2,..., \lambda a_n),$$

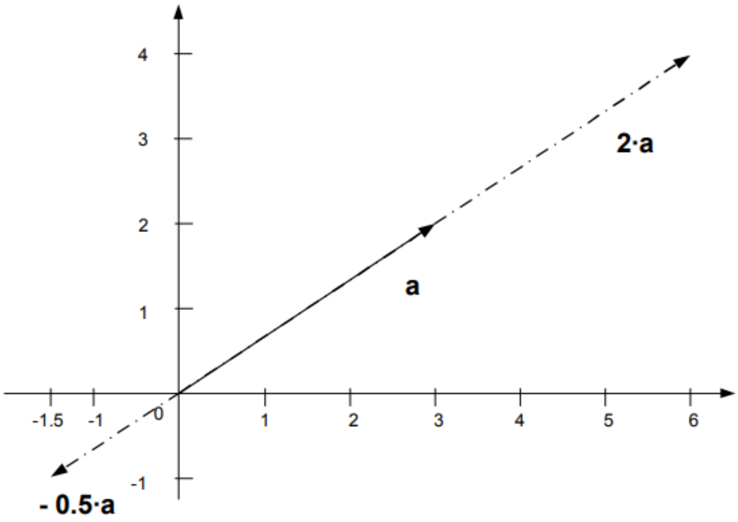
tehát skalárral úgy szorzunk egy vektort, hogy minden elemét beszorozzuk a skalárral.

Példa: Legyen a=(3, 2).

Ha λ=2, akkor $\lambda\boldsymbol{a} = 2\cdot(3, 2) =(2\cdot3, 2\cdot2) = (6, 4)$,

Ha λ= - 0.5, akkor $\lambda\boldsymbol{a} = -0.5\cdot(3, 2) =(-0.5\cdot3, -0.5\cdot2) = (-1.5, -1)$.

A skalárral való szorzásnak szintén adhatunk geometriai szemléletet. Az eredményvektor hatásvonala az $\boldsymbol{a}$ vektoréval azonos. Ha $\lambda>0$, akkor az eredményvektor iránya $\boldsymbol{a}$ irányával azonos, ha $\lambda<0$ akkor az eredményvektor iránya $\boldsymbol{a}$ irányával ellentétes. Ha $|\lambda|>1$, akkor nyújtásról, ha $0<|\lambda|<1$, akkor zsugorításról beszélünk. Ezeket mutatja az alábbi ábra.



Példa: Tekintsük a következő egyszerű példát, amelynek megoldását a fenti vektor-műveletekkel adhatjuk meg. Egy vállalat 4 alkatrészt gyárt. Legyen egy adott év első félévében a gyártási volumen alkatrészenként rendre 250, 320, 180, 60; a második félévben pedig rendre 320, 440, 200, 50 darab.

a) Mennyit termelt a vállalat éves szinten az egyes termékekből?

b) A vállalat a következő év második félévében az előző év második félévi termelését mindegyik termékből 20 %-kal meg akarja növelni. Mennyi lesz a következő év második félévében a termelés termékenként?

Megoldás: Foglaljuk a két félév termelését egy $\boldsymbol{a}$ és egy $\boldsymbol{b}$ vektorba. Az első félév termelését így az $\boldsymbol{a}$ = (250, 320, 180, 60), a második félévét pedig a $\boldsymbol{b}$ = (320, 440, 200, 50) vektorral írhatjuk le. A keresett mennyiségeket a megismert műveletekkel egyszerűen számíthatjuk:

a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ = (250+320, 320+440, 180+200, 60+50) = (570, 760, 380, 110),

b) $1.2\boldsymbol{b}$ = (1.2·320, 1.2·440, 1.2·200, 1.2·50) = (384, 528, 240, 60).

Megjegyzés: A vektorok összeadásának és skalárral való szorzásának tulajdonságai az alábbiak: Legyenek $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ tetszőleges $\boldsymbol{n}$-dimenziós vektorok; λ, μ tetszőleges valós számok. Ekkor

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$	kommutatív
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	asszociatív
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$	létezik zéruselem (a zérusvektor az)
$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$	létezik inverzelem
$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$	skalár disztributív
$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$	vektor disztributív
$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$	skalár asszociatív
$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$	létezik skalár egységelem

Megjegyezzük, hogy azokat a matematikai objektumokat, amelyekben az összeadás és a skalárral való szorzás a fenti 8 tulajdonsággal rendelkezik, lineáris térnek nevezzük. Mivel a vektorok ezeket kielégítik, ezért a vektortér elnevezést is szokás használni. Más matematikai objektumok is kielégítik ezeket a tulajdonságokat, többek között a mátrixok és egy adott intervallumban folytonos függvények is.

Lineáris kombináció

A fentebb definiált két művelet segítségével a lineáris algebra legfontosabb alapfogalmát a lineáris kombinációt az alábbiak szerint definiáljuk. Legyenek $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n}$ azonos dimenziójú (pl. $\boldsymbol{m}$-dimenziós) vektorok és legyenek $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalárok. A

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\boldsymbol{a_2}+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a_n}$$

vagy rövidebben írva $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{a_i}$ vektort az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_n}$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Példa: A vállalat a következő évi termelését termékenként az első félévben 10 %-kal, a második félévben pedig (ahogy már említettük) 20 %-kal kívánja növelni. Mennyi lesz a vállalat következő évi termelése termékenként?

Vegyük észre, hogy itt az 1.1a+1.2b vektort kell kiszámítani, amely az egyes félévek termelési vektorának a növekményre vett lineáris kombinációja:

$$1.1\boldsymbol{a}+1.2\boldsymbol{b} = (275, 352, 198, 66) + (384, 528, 240, 60) = (659, 880, 438, 126).$$

Skaláris szorzás

Csak azonos dimenziójú vektorok skaláris szorzatát értelmezzük. Két vektor skaláris szorzatán egy skalár számot kapunk, amelyet az alábbiakban definiálunk:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Az $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ skaráris szorzatot tehát úgy kapjuk, hogy az azonos indexű vektorelemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok merőlegesek egymásra (ortogonálisak), ha a skaláris szorzatuk zérus, azaz $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

Példa: Az előző példa 4 termékének eladási árai legyenek rendre 2, 3, 4, 5. Mennyi a vállalat első félévi árbevétele, ha a megtermelt termékeket a fenti egységáron el is adta?

Megoldás: Jelölje $\boldsymbol{p}$ vektor az egységár vektort: $\boldsymbol{p} = (2, 3, 4, 5)$. Ekkor az árbevételt egy skaláris szorzással határozhatjuk meg:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = 2\cdot250 + 3\cdot320 + 4\cdot180 + 5\cdot60 = 2480.$$

A vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai:

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	kommutatív
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	disztributív
$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$	skalár asszociatív
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0$	és = (egyenlő) akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{a} = 0$

Mátrixok

A mátrix fogalma

A mátrix legrövidebb megfogalmazása: a mátrix egy szám $\boldsymbol{m\times n}$-es. Bővebben kifejtve a mátrix egy olyan matematikai objektum, melyben a valós számok $\boldsymbol{m}$ számú sorban és $\boldsymbol{n}$ számú oszlopban vannak elrendezve.

Megjegyzés: A mátrix a latin matricula szóból származik, amely anyakönyvet jelent. Az elnevezés arra utal, hogy az anyakönyvbeli adatokhoz hasonlóan a mátrixnál is a számok sorokban és oszlopokban vannak elrendezve.

A mátrix jelölésére a latin nagybetűket használjuk: ***A, B, ...,*** stb. A mátrix elemeit a vektor jelölésére használt, nem kisbetűvel jelöljük és alsóindexbe írjuk az elem helyét meghatározó sor- és oszlopszámot. Az $\boldsymbol{a_{ij}}$ elem az A mátrix $\boldsymbol{i}$-edik sorának $\boldsymbol{j}$-edik elemét jelenti. Tehát az első helyen álló index a sorindex, a második az oszlopindex. Az $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$ jelöléssel jelezzük, hogy az $\boldsymbol{A}$ matematikai objektum $\boldsymbol{m\times n}$ méretű mátrix. Szokásos szóhasználat a méretre, hogy az $\boldsymbol{A}$ mátrix rendje $\boldsymbol{m\times n}$.

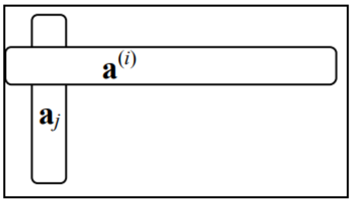
A könnyebb tájékozódás miatt célszerű az alábbiakban a következő megállapodással élni: A mátrix sorainak számát $\boldsymbol{m}$, az oszlopainak számát **n**, az elem sorindexét $\boldsymbol{i}$, az oszlopindexét pedig $\boldsymbol{j}$ jelöli. Ettől természetesen eltérhetünk. Egy $\boldsymbol{m}$ sorból és $\boldsymbol{n}$ oszlopból álló $\boldsymbol{A}$ mátrix elemeit kerek vagy szögletes zárójelbe szoktuk írni az alábbi módon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

A mátrixot - főleg a műveletek elvégzésének megkönnyítése érdekében - az alábbi sémával szoktuk ábrázolni, vagyis egy téglalapba írjuk az elemeket, de ekkor nem írjuk eléje az $\boldsymbol{A}$= jelet, legfeljebb egy nyíllal jelöljük, hogy melyik mátrix sémájáról van szó.

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array}} \leftarrow \mathbf{A}$$

A mátrix felfogható úgy is, mint ***m*** darab egymás alá írt ***n***-dimenziós vektor összessége, de úgy is felfogható, mint ***n*** darab egymás mellé írt ***m***-dimenziós vektor összessége. A sorba írt vektorokat a mátrix sorvektorainak, az oszlopba írt vektorokat pedig a mátrix oszlopvektorainak nevezzük. Az ***i***-edik sorvektort $\boldsymbol{a}^{(i)}$, a ***j***-edik oszlopvektort pedig $\boldsymbol{a}_j$ szimbólummal jelöljük, ezt mutatja az alábbi séma:



Tehát az A mátrixot felírhatjuk az alábbi két módon is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

Sémával történő ábrázolás esetén:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{array}} \quad \text{vagy} \quad \boxed{\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n}$$

Egy ***A*** mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrixot az ***A*** <u>*mátrix transzponáltjának*</u> nevezünk és $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ -vel jelöljük. A sorok és oszlopok számára nincs megkötés, csak véges természetes számok legyenek. Ha ***m***=1, azaz a mátrix egyetlen sorból áll, akkor a mátrixot sorvektornak tekinthetjük. Ha ***n***=1, azaz a mátrix egyetlen oszlopból áll, akkor a mátrixot oszlopvektornak tekinthetjük. Itt tapasztalhatjuk a sorvektor és az oszlopvektor megkülönböztetést.

Műveletek mátrixokkal

A vektorokra megismert összeadás és skalárral való szorzás hasonló a mátrixok esetében is. Ahogy a vektoroknál már láttuk, a mátrixok esetében is nagyon fontos jelentősége van a műveletben szereplő objektumok méretének.

Összeadás

Csak akkor értelmezzük, ha a két mátrix azonos rendű (méretű), azaz sor- és oszlopméretük azonos. Az $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ mátrix számításánál a megfelelő indexű elemeket össze kell adni.

Skalárral való szorzás

A $\boldsymbol{\lambda A}$ mátrix számításánál az $\boldsymbol{A}$ mátrix minden egyes elemét meg kell szorozni λ-val. Könnyű belátni, hogy a mátrixokra vonatkozó összeadás és a skalárral való szorzás művelet kielégíti a vektoroknál ismertetett 8 tulajdonságot, így az azonos rendű (méretű) mátrixok is lineáris teret (vektorteret) alkotnak.

Mátrixok szorzása

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix és a $\boldsymbol{B}$ mátrix $\boldsymbol{A \cdot B}$ szorzatmátrixán azt a $\boldsymbol{C}$ mátrixot értjük, amely $\boldsymbol{i}$-edik sorának $\boldsymbol{j}$-edik elemét az alábbi módon számítjuk ki:

$$c_{ij} = \boldsymbol{a}^{(i)} \cdot \boldsymbol{b}_j$$

azaz az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\boldsymbol{i}$-edik sorvektorát ($\boldsymbol{a}^{(i)}$ vektort) skalárisan megszorozzuk a $\boldsymbol{B}$ mátrix $\boldsymbol{j}$-edik oszlopvektorával ($\boldsymbol{b}_j$ vektorral), akkor az eredménymátrix $\boldsymbol{i}$-edik sorának $\boldsymbol{j}$-edik elemét kapjuk. A mátrixszorzás csak akkor végezhető el, ha a definícióban szereplő skaláris szorzás elvégezhető, ez pedig azt követeli meg, hogy a mátrixszorzás ($\boldsymbol{A \cdot B}$) műveletében az első helyen szereplő $\boldsymbol{A}$ mátrix oszlopainak a száma megegyezzen a második helyen szereplő $\boldsymbol{B}$ mátrix sorainak számával. Az eredménymátrix sormérete az $\boldsymbol{A}$ mátrix sorméretével, az oszlopmérete pedig a $\boldsymbol{B}$ mátrix oszlopméretével egyezik meg.

Megjegyzés: A mátrixszorzás tulajdonságai:

$\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$	nem kommutatív
$\boldsymbol{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$	asszociatív
$\boldsymbol{A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C}$	disztributív
$\boldsymbol{(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A}$	disztributív
$(\lambda \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \lambda \cdot (\boldsymbol{A \cdot B})$	skalár asszociatív
$\boldsymbol{A \cdot E = E \cdot A = A}$	

A mátrixszorzás azért sem lehet általában kommutatív, mert a méretek nem megfelelőek. Például ha $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3x4}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4x2}$, akkor az $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ elvégezhető, de a $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ már nem. Ha esetleg el is végezhető a $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ fordított sorrendbeli szorzás (pl. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3x4}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4x3}$), akkor nem biztos, hogy az eredménymátrix ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3x3}$) azonos rendű az BA mátrix-szal ($\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4x4}$). Két $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$-es mátrix (pl. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3x3}$) esetén nincs probléma sem az elvégezhetőséggel sem a méretekkel, de a két mátrix elemei általában nem azonosak. A mátrixszorzás asszociativitása lehetővé teszi a tetszőleges zárójelezhetőséget.

Megjegyezés: Másféle mátrixszorzás is elképzelhető, például a Hadamard szorzás, amelynél $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} \cdot \boldsymbol{b_{ij}}$. Hasonlóan az összeadáshoz, ekkor a két mátrixnak azonos méretűnek kell lenni és a kommutativitás is érvényes.

Példa: Legyen adott két mátrix, az $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3x4}$ és a $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4x2}$ mátrixok. Határozzuk meg a $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ szorzatmátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A művelet elvégezhető, mivel az $\boldsymbol{A}$ mátrix oszlopmérete megegyezik a $\boldsymbol{B}$ mátrix sorméretével, amit az alábbiak szerint szemléltetünk:

$$(3 \times \underbrace{4)(4}_{} \times 2) \xrightarrow{\text{eredmény}} (3 \times 2)$$

Számítsuk ki az eredménymátrix $\boldsymbol{c_{21}}$ elemét: az $\boldsymbol{A}$ mátrix második sorában lévő sorvektort kell megszorozni skalárisan a $\boldsymbol{B}$ mátrix első oszlopában lévő oszlopvektorral. Ezt az alábbiakban szemléltetjük. Az egyszerűség miatt csak a $\boldsymbol{c_{21}}$ elem számításához szükséges számokat tüntettük fel. A skaláris szorzás eredménye, azaz $\boldsymbol{c_{21}} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 3 + 3 - 4 + 2 = 4$.

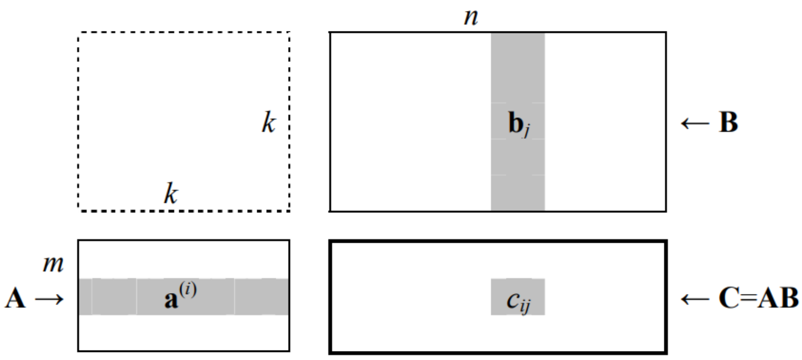
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & . \\ \mathbf{3} & . \\ \mathbf{4} & . \\ \mathbf{1} & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . \\ \mathbf{4} & . \\ . & . \end{bmatrix}$$

Az eredménymátrix többi elemét is hasonló módon számítjuk ki. A kapott eredmény:

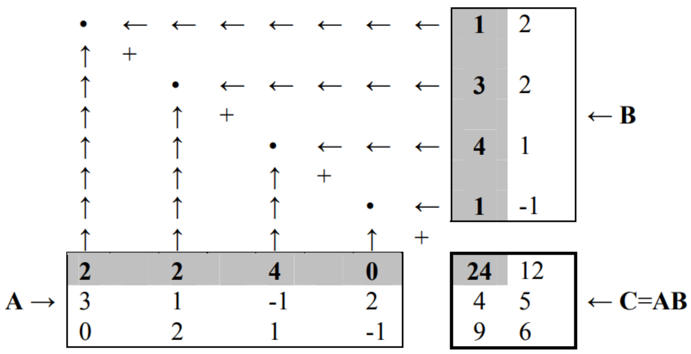
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 4 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Képzeljük el, hogy nagyobb méretűek a mátrixok, ekkor a skaláris szorzásban szereplő elemek „összepárosítása” nem olyan egyszerű. Célszerű ezért a mátrixszorzást az alábbi sémában felrajzolni és ekkor világosan látszanak a méretviszonyok és a művelet is sokkal szemléletesebben végezhető el. Legyen az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$ méretű, a $\boldsymbol{B}$ mátrix $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}$ méretű.

Készítsünk a művelet elvégzéséhez olyan sémát, amelyben a ***B*** mátrix sémáját ne az ***A*** mátrix sémája mellé, hanem felcsúsztatva írjuk fel. Szemléletesen látszik, hogy a mátrixszorzás művelete csak akkor végezhető el, ha az ***A*** mátrix felett és a ***B*** mátrix melletti terület négyzet ***(k*** × ***k)*** alakú. Az ***A*** mátrix mellett és a ***B*** mátrix alatti terület pontosan a ***C*** szorzatmátrix helyét ***(m*** × ***n)*** jelöli ki. Ezt a sémát, amelyet Falk-sémának nevezünk, az alábbi ábra mutatja.



Az ***A*** mátrix ***i***-edik sorvektorát ($\boldsymbol{a}^{(i)}$) így könnyebben össze lehet szorozni skalárisan a ***B*** mátrix ***j***-edik oszlopvektorával ($\boldsymbol{b}_j$), a skaláris szorzás eredményét (c_{ij}) pedig az ***i***-edik sor és a ***j***-edik oszlop metszéspontjába kell írni. Végezzük el a fenti példában szereplő mátrixszorzást a Falk-séma segítségével. Az alábbi ábrában c_{11} elem számítását szemléltettük.



A számítás menete a következő: $c_{11} = 2\cdot1 + 2\cdot3 + 4\cdot4 + 0\cdot1 = 2 + 6 + 16 + 0 = 24$.

Speciális mátrixok

Négyzetes mátrix

Az ***A*** mátrix négyzetes vagy más szóval kvadratikus, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az ***A n x n***-es négyzetes mátrix rendje ***n***. Egy négyzetes mátrix a_{11} és a_{nn} elemeit összekötő „vonalat” a mátrix főátlójának nevezzük. A főátlóbeli elemeket tehát azok a mátrixelemek alkotják, amelyeknek sor- és oszlopindexe azonos. (Az a_{1n} és a_{n1} elemeit összekötő „vonalat” pedig a mátrix mellékátlójának nevezzük).

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix

Egy négyzetes mátrix szimmetrikus, ha $a_{ij} = a_{ji}$, azaz a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek azonosak.

Egy négyzetes mátrix ferdén szimmetrikus, ha $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek ellenkező előjelüek, de abszolút értékük azonos.

Mátrixjelöléssel megfogalmazva a fentieket: az $A \in R$ n×n mátrix szimmetrikus, ha $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$, ferdén szimmetrikus, ha $\boldsymbol{A}= -\boldsymbol{A}^T$.

Egységmátrix

Az egységmátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlójában 1-es, a többi helyen pedig zérus áll. Az egységmátrix sorai és oszlopai is egységvektorok úgy, hogy az 1. sorvektor és az 1. oszlopvektor az első egységvektor, a 2. sorvektor és a 2. oszlopvektor a második egységvektor, stb. Jele: ***E*** vagy ***I***.

Példa: Egy ***3x3***-as egységmátrix az alábbi:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzmátrix

Az egységmátrixhoz kapcsolódóan definiáljuk az inverz mátrixot. Az ***A*** négyzetes mátrix inverz mátrixán (vagy röviden inverzén) azt az ***X*** négyzetes mátrixot értjük, amelyre

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E},$$

ahol ***E*** az egységmátrix. Az ***A*** mátrix inverzének jelölésére szokás az $\boldsymbol{A}^{-1}$ jelölést használni.

Diagonális mátrix

A diagonális mátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek diagonális (főátlóban lévő) elemein kívüli elemei zérusok.

Példa: Egy ***3x3***-as diagonális mátrix az alábbi:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixot vektor segítségével is meg lehet adni úgy, hogy a vektor elemei a diagonális mátrix elemei. A példabeli ***D*** mátrixot a ***d***=(5, 3, -2) vektorral is megadhatjuk. A diagonális mátrixot ekkor a < ***d*** > szimbólummal jelöljük, azaz D=< ***d*** >.

Háromszögmátrixok

A háromszögmátrix olyan négyzetes mátrix melynek a főátlója alatti összes elem vagy a főátlója feletti összes elem zéró.

Az **alsó háromszögmátrix** felépítése:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

vagyis olyan mátrix, melyre igaz, hogy $l_{ij}=0$ ha $j>i$.

A **felső háromszögmátrix**:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix},$$

vagyis egy olyan mátrix, melyre igaz: $u_{ij}=0$ ha $j<i$.