

Többváltozós függvények

Fekete-Zoltán, Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise, Műszaki Könyvkiadó.

Riemann János: Matematikai analízis, II. kötet, EKTf Líceum Kiadó, Eger.

Definíció:

$\mathbb{R}^m$ -t m -dimenziós térnek nevezzük, pontjai $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ alakúak, ahol x_i -t az $\underline{x}$ pont (vektor) i -dik koordinátájának nevezzük. A $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ vektor hossza

$$|\underline{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}.$$

Az $(\underline{x}^{(n)})$ $\mathbb{R}^m$ -beli pontsorozatot konvergensnek nevezzük, ha minden $(x_i^{(n)})$ koordinátasorozat konvergens $(i = 1, \dots, m)$, és amennyiben az i -dik koordinátasorozat határértéke x_i

$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i, i = 1, \dots, m)$, úgy az $\underline{x} := (x_1, \dots, x_m)$ pontot az $(\underline{x}^{(n)})$ $\mathbb{R}^m$ -beli pontsorozat határértékének nevezzük.

Definíció:

Az $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényeket m -változós vektorértékű függvénynek nevezzük. Az $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény i -dik koordináta függvényének nevezzük ($i = 1, \dots, n$).

Példa:

$$f(x, y) = (x + y, x \cdot y, x)$$

Ekkor $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

koordinátafüggvényei: $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = x \cdot y$,

$f_3(x, y) = x$.

Definíció:

Egy $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $\underline{x}$ esetén, amelyre $|\underline{x} - \underline{x}_0| < \delta$ az $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$ teljesül.

Definíció:

Egy $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban, ha minden $\mathbb{R}^m \setminus \{\underline{x}_0\}$ -beli $(\underline{x}^{(n)})$ sorozatra, ha $\underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{x}_0$ úgy az $(f(\underline{x}^{(n)}))$ valós számsorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\underline{x}^{(n)}) = f(\underline{x}_0)$ teljesül.

Tétel: (Átviteli elv folytonos függvényekre)

A két folytonosság fogalom ekvivalens egymással.

Definíció:

Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban az $y_0 \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $\underline{x}$ esetén, amelyre $0 < |\underline{x} - \underline{x}_0| < \delta$ az $|f(\underline{x}) - y_0| < \varepsilon$ teljesül.

Jelölés: $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = y_0$.

Definíció:

Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban az $y_0 \in \mathbb{R}$ valós szám, ha minden $\mathbb{R}^m \setminus \{\underline{x}_0\}$ -beli $(\underline{x}^{(n)})$ sorozatra, ha $\underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{x}_0$ úgy az $(f(\underline{x}^{(n)}))$ valós számsorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\underline{x}^{(n)}) = y_0$ teljesül.

Jelölés: $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = y_0$.

Tétel: (Átviteli elv)

A két határérték fogalom ekvivalens egymással.

Definíció:

$f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt folytonosnak nevezzük az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban, ha minden egyes f_i koordinátafüggvény folytonos az $\underline{x}_0$ -ban ($i = 1, \dots, n$).

Azt mondjuk, hogy a $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény határértéke az $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban az $\underline{y}_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ pont, ha minden egyes f_i koordinátafüggvénynek létezik határértéke $\underline{x}_0$ -ban és $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_i(\underline{x}) = y_{0,i}$ ($i = 1, \dots, n$).

A fentiek szerint elegendő az $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ alakú koordináta függvényeket vizsgálni ($i = 1, \dots, m$).

A $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ vektor hossza $|\underline{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$.

Definíció:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak, $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ olyan, hogy $|\underline{v}| = 1$. Ha létezik és véges a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f -nek az $\underline{x}_0$ -ban létezik a $\underline{v}$ iránymenti deriváltja. Ezt a határértéket $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ -al, vagy $D_{\underline{v}}f(\underline{x}_0)$ -al jelöljük.

Legyen $\underline{e}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ahol az i -dik koordináta 1, a többi 0. Ha az f -nek az $\underline{x}_0$ -ban létezik a $\underline{e}_i$ iránymenti deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy az f parciálisan differenciálható az $\underline{x}_0$ -ban, az i -dik változó szerint.

Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$, $D_{\underline{x}_i}f(\underline{x}_0)$, $D_i f(\underline{x}_0)$.

Definíció:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, valamint f parciálisan differenciálható H -n minden változója szerint, ekkor az f gradiense

$$\text{grad } f = \nabla f := \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \mathbf{e}_m$$

vektor. Ezt megadhatjuk a koordinátaival is $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m})^t$.

Definíció:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha van olyan $1 \times m$ -es A mátrix, hogy

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - A(\underline{x} - \underline{x}_0)}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} = 0,$$

akkor az f -t Frechet-differenciálhatónak nevezzük az $\underline{x}_0$ pontban.
Jelölés: $A = f'(\underline{x}_0)$

Megjegyzés: Ha az f Frechet-differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor

$$A = f'(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\underline{x}_0) \right)$$

Tétel:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha az f Frechet-differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az f folytonos az $\underline{x}_0$ pontban.

Tétel:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha az f Frechet-differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az f az $\underline{x}_0$ pontban minden $\underline{v}$ iránymentén differenciálható ($\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ és $|\underline{v}| = 1$). Ekkor

$$D_{\underline{v}}f(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0)\underline{v}.$$

Speciálisan: Ha az f Frechet-differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az f az $\underline{x}_0$ pontban minden változója szerint parciálisan differenciálható. Valamint

$$D_{\underline{e}_i}f(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0)\underline{e}_i.$$

Többszörös függvények szélsőértéke

Definíció:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha az f függvény minden változója szerint parciálisan differenciálható az $\underline{x}_0$ -ban, valamint

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\underline{x}_0) = 0$$

akkor az $\underline{x}_0$ pontot az f stacionárius pontjának nevezzük.

Tétel: (szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha az f függvény minden változója szerint parciálisan differenciálható az $\underline{x}_0$ -ban, valamint ott az f -nek szélsőértéke van, akkor az $\underline{x}_0$ stacionárius pontja az f -nek.

Többszörös függvények szélsőértéke

Definíció:

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak. Ha a $D_j f: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény parciálisan differenciálható $\underline{x}_0$ -ban az i -dik változója szerint, akkor a $D_{j,i} f(\underline{x}_0) := D_i(D_j f)(\underline{x}_0)$ -t az f függvény másodrendű parciális deriváltjának nevezzük az $\underline{x}_0$ -ban.

Tétel: (Young-tétel (Schwarz-tétel, $m=2$ eset))

Legyen $H \subset \mathbb{R}^m$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak, az f függvény r -szer differenciálható $\underline{x}_0$ -ban. Legyen $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, m\}$, valamint $(j_1, \dots, j_r)$ az $(i_1, \dots, i_r)$ szám r -es egy átrendezése. Ekkor

$$D_{i_1, i_2, \dots, i_r} f(\underline{x}_0) = D_{j_1, j_2, \dots, j_r} f(\underline{x}_0).$$

Tétel: (szélsőérték létezésének elégséges feltétele kétváltozós függvényekre)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak, az f függvény 2-szer folytonosan differenciálható $\underline{x}_0$ -ban (az összes másodrendű parciális derivált létezik az $\underline{x}_0$ pont egy környezetében és ott folytonosak). Az $\underline{x}_0$ stacionárius pontja f -nek. Legyen

$$D(\underline{x}_0) := \det \begin{pmatrix} D_{x,x}f(\underline{x}_0) & D_{x,y}f(\underline{x}_0) \\ D_{y,x}f(\underline{x}_0) & D_{y,y}f(\underline{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Ha $D(\underline{x}_0) > 0$, akkor f -nek az $\underline{x}_0$ szélsőérték helye, $D_{x,x}f(\underline{x}_0) > 0$ esetén helyi minimum, $D_{x,x}f(\underline{x}_0) < 0$ esetén helyi maximum van. $D(\underline{x}_0) < 0$ esetén az $\underline{x}_0$ pont nem szélsőérték hely.

Tétel: (Taylor-tétel)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ belső pontja H -nak, az f függvény $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható $\underline{x}_0$ -ban (az összes $(n+1)$ -ed rendű parciális derivált létezik az $\underline{x}_0$ pont egy környezetében és ott folytonosak). Ekkor minden $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\underline{x} = (x, y)$ esetén van olyan $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ amely az $\underline{x}_0$ -t és az $\underline{x}$ -t összekötő szakaszon van, hogy

$$f(\underline{x}) = T_n(f)(\underline{x}) + R_n(f)(\underline{\xi}, \underline{x}).$$

Speciálisan $n = 2$ esetén

$$\begin{aligned} T_2(f)(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + D_1 f(\underline{x}_0)(x - x_0) + D_2 f(\underline{x}_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} D_{1,1} f(\underline{x}_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} D_{2,2} f(\underline{x}_0)(y - y_0)^2 \\ &+ \frac{1}{2!} (D_{1,2} f(\underline{x}_0)(x - x_0)(y - y_0) + D_{2,1} f(\underline{x}_0)(x - x_0)(y - y_0)). \end{aligned}$$

az f függvény $\underline{x}_0$ körüli másodrendű Taylor-polinomja.

$$R_2(f)(\underline{\xi}, \underline{x}) = \frac{1}{3!} \sum_{j_1, j_2, j_3} D_{j_1, j_2, j_3} f(\underline{\xi})(\underline{x} - \underline{x}_0)_{j_1}(\underline{x} - \underline{x}_0)_{j_2}(\underline{x} - \underline{x}_0)_{j_3}$$

a maradék tagja, ahol $(\underline{x} - \underline{x}_0)_j$ az $(\underline{x} - \underline{x}_0)$ pont j -dik koordinátája.