

5. előadás

Programozás-elmélet

Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ program elemi, ha

$$\forall a \in A : S(a) \subseteq \{ \langle a \rangle, \langle a, a, a, \dots \rangle, \langle a, b \rangle \mid b \neq a \}.$$

A definíció alapján könnyen látható, hogy egy elemi program tényleg program. Speciális elemi programok a következők:

Definíció

üres, vagy skip program:

$$\forall a \in A : SKIP(a) = \{ \langle a \rangle \}.$$

A SKIP program nem csinál semmit.

Definíció

A törlődés, vagy abort program:

$$\forall a \in A : ABORT(a) = \{\langle a, a, a, \dots \rangle\}.$$

Az ABORT program soha nem terminál (soha nem fejeződik be).

Definíció

Legyen $F \subseteq A \times A$. Az S programot általános értékadásnak nevezzük, ha

$$S = \{(a, red(\langle a, b \rangle)) \mid a, b \in A \wedge a \in D_F \wedge b \in F(a)\} \cup \{(a, \langle a, a, a, \dots \rangle) \mid a \in A \wedge a \notin D_F\}.$$

Definíció

Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ általános értékadás program.

- (a) Ha $D_F = A$, akkor az S programot érték kiválasztásnak nevezzük és $a := F(a)$ -val jelöljük.
- (b) Ha az F reláció függvény, akkor az S programot értékadásnak nevezzük és $a := F(a)$ -val jelöljük.
- (c) Ha $D_F \subset A$, akkor S parciális érték kiválasztás.
- (d) Ha $D_F \subset A$ és F determinisztikus (F parciális függvény), akkor S parciális értékadás.

Definíció

Identitásfüggvény:

$$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A.$$

Tétel

Az elemi programok programfüggvényei:

- (a) $p(SKIP) = id_A$,
- (b) $p(ABORT) = \emptyset$,
- (c) $p(a := F(a)) = F$,
- (d) $p(a \in F(a)) = F$.

Elemi programok leggyengébb előfeltételei

Legyen R egy tetszőleges utófeltétel. Ekkor $p(SKIP)(a) = \{a\}$ miatt

$$\begin{aligned} [If (SKIP, R)] &= \{a \in A \mid p(SKIP)(a) \subseteq [R]\} \\ &= \{a \in A \mid \{a\} \subseteq [R]\} = [R] \end{aligned}$$

és

$$If (SKIP, R) = R.$$

Hasonlóan $p(ABORT)(a) = \emptyset$ miatt

$$If (ABORT, R) = HAMIS.$$

Az általános értékadás leggyengébb előfeltétele a négy esetben

(a) $F : A \rightarrow A$ függvény, $D_F = A$.

$$[If(a := F(a), R)] = \{a \in A \mid F(a) \subseteq [R]\} = F^{(-1)}([R]).$$

(b) $F : A \rightarrow A$ függvény, $D_F \subset A$.

$$[If(a := F(a), R)] = \{a \in A \mid F(a) \subseteq [R]\} \cap D_F = F^{(-1)}([R]) \cap D_F.$$

(c) $F \subseteq A \times A$, $D_F = A$, F nem determinisztikus.

$$[If(a \in F(a), R)] = \{a \in A \mid F(a) \subseteq [R]\} = F^{(-1)}([R]).$$

(d) $F \subseteq A \times A$, $D_F \subset A$, F nem determinisztikus.

$$[If(a \in F(a), R)] = \{a \in A \mid F(a) \subseteq [R]\} \cap D_F = F^{(-1)}([R]) \cap D_F.$$

Mint ahogy definíció alapján $F^{(-1)}([R]) = [R \circ F]$, azért az (a) és (c) esetekben a leggyengébb előfeltétel $R \circ F$.

Az értékadást változókkal is leírjuk. Legyen $A = \times_{i=1}^n A_i$,
 $F \subseteq A \times A$ és

$$F(a) = F_1(a) \times F_2(a) \times \dots \times F_n(a) \quad (a \in D_F),$$

ahol $F_i \subseteq A \times A_i$. Legyenek az állapottér változói x_1, x_2, \dots, x_n .
 Ekkor az $a := F(a)$ program jelölése:

$$x_1, \dots, x_n := F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n).$$

A jelölésből elhagyhatjuk az x_i -t és $F_i(x_1, \dots, x_n)$ -t, ha $F_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Ha valamely F_j nem függ valamelyik x_i -től, akkor ezt is elhagyhatjuk a jelölésből. Ha a fenti értékadásban csak egy komponens szerepel, akkor egyszerű, egyébként pedig szimultán értékadásról beszélünk.

Példa

Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{L}$, x a \mathbb{Z} , l pedig az \mathbb{L} állapotter komponenshez tartozó változó. Legyenek az értékadás komponensei:

$\forall a = (a_1, a_2) \in A$:

$$F_1(a_1, a_2) = a_1, \text{ azaz } F_1 = pr_{\mathbb{Z}}, \text{ és}$$

$$F_2(a_1, a_2) = (a_1 > 0).$$

Ekkor az $a := F(a)$ értékadás változókkal felírva:

$$x, l := x, (x > 0).$$

A jelölés fent leírt egyszerűsítéseit elvégezve az

$$l := (x > 0)$$

egyszerű értékadást kapjuk.



Olyan műveletekkel foglalkozunk, amelyekkel meglévő programjainkból újakat állíthatunk elő. Sokféle konstrukció képzelhető el, de mi csak háromféle konstrukciós műveletet fogunk megengedni:

- szekvencia (sorozat),
- elágazás,
- ciklus.

A struktúrált programozás alaptétele (Böhm-Jacopini, 1966) kimondja: bármely program megadható ekvivalens struktúrált program formájában is, amelyben csak a fenti három konstrukciós művelet szerepel. Két program ekvivalens, ha ugyanazon input értékekre ugyanazon output értékeket számolják ki.

Szekvencia (sorozat)

Itt két program közvetlen egymásután való végrehajtásáról van szó. Legyen S_1 és S_2 a két program, $a \in A$ és $\alpha \in S_1(a) \cap A^*$ az S_1 program által előállított véges sorozat. Az S_2 program az S_1 program $\tau(\alpha)$ végállapotából indul és a $\beta \in S_2(\tau(\alpha))$ véges, vagy végtelen sorozatot állítja elő. Tehát az $a \in A$ állapotból kiindulva a két program egymásután végreajtása a $kon(\alpha, \beta)$ egyesített sorozatot eredményezi. Ez azonban nem redukált, mert $\tau(\alpha) = \beta_1$. Ezért az egyesített sorozat redukáltját tekintjük a szekvencia eredményének. Legyen $\alpha \in A^*$, $\beta \in A^{**}$ és

$$\chi_2(\alpha, \beta) = red(kon(\alpha, \beta)).$$

Definíció

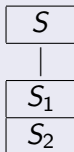
Legyenek $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_1 és S_2 programok szekvenciájának nevezzük, és $(S_1; S_2)$ -vel jelöljük, ha minden $a \in A$ esetén

$$S(a) = \{\alpha \in A^\infty \mid \alpha \in S_1(a)\} \cup \\ \cup \{\chi_2(\alpha, \beta) \in A^{**} \mid \alpha \in S_1(a) \cap A^* \wedge \beta \in S_2(\tau(\alpha))\}.$$

Ha a két program értékkészlete csak véges sorozatokat tartalmaz, akkor a szekvencia is csak véges sorozatokat rendel hozzá az állapottér pontjaihoz.

Determinisztikus programok szekvenciája is determinisztikus reláció (függvény).

A programkonstrukciókat többféleképpen is ábrázolhatjuk. Ezek egyike a *struktogram*. Legyen S_1 , S_2 program. Az $S = (S_1; S_2)$ szekvencia struktogramja:



A második konstrukciós technika az *elágazás* (feltételes utasítás, case szerkezet), ahol más-más programot hajtunk végre feltételtől függően.

Definíció

Legyenek $\pi_1, \dots, \pi_m : A \rightarrow \mathbb{L}$ feltételek, S_1, \dots, S_m programok A -n. Ekkor az $IF \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_i -kből képezett π_i -k által meghatározott elágazásnak nevezzük, és $(\pi_1 : S_1, \dots, \pi_m : S_m)$ -vel jelöljük, ha minden $a \in A$ esetén

$$IF(a) = (\cup_{i=1}^m w_i(a)) \cup w_0(a),$$

ahol $\forall i \in [1..m]$:

$$w_i(a) = \begin{cases} S_i(a), & \text{ha } a \in [\pi_i] \\ \emptyset, & \text{különben} \end{cases}$$

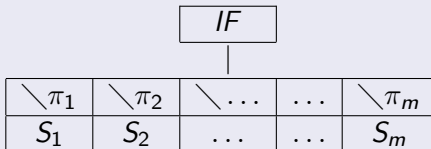
és

$$w_0(a) = \begin{cases} \langle a, a, a, \dots \rangle, & \text{ha } a \notin \cup_{i=1}^m [\pi_i] \\ \emptyset, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha a feltételek nem diszjunktak, akkor az elágazás bármelyik olyan S_i ág választását megengedi, amelyre π_i igaz.

Az elágazásoktól a gyakorlatban azt is megköveteljük, hogy a feltételek diszjunktak legyenek és $\cup_{i=1}^m [\pi_i] = A$ teljesüljön.

Az $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_m : S_m)$ elágazás struktogramja:



A harmadik konstrukciós technika a *ciklus*, amelyben egy meglévő programot egy adott feltételtől függően valahányszor végrehajtunk. Legyen S a program és π az adott feltétel. Ezután a következőképpen járunk el:

1. Ha az $a \in A$ kiinduló pontban π nem igaz, akkor az S programot nem hajtjuk végre és a ciklusból kilépünk.
2. Ha π igaz, akkor az S programot végrehajtjuk és eredményül kapunk egy α sorozatot.
3. Ha α véges és a $\tau(\alpha)$ pontban π nem igaz, akkor kilépünk a ciklusból.
4. Ha α véges és a $\tau(\alpha)$ pontban π igaz, akkor a $\tau(\alpha)$ pontból indulva megismételjük az előző lépéseket a 2. ponttól.

A vázolt eljárással - n ismétlést (iterációt) feltéve- az $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ sorozatokat kapjuk, amelyekre fennáll, hogy $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \in A^*$, $\alpha^1 \in S(a)$, $\alpha^2 \in S(\tau(\alpha^1))$, \dots , $\alpha^n \in S(\tau(\alpha^{n-1}))$. Ha α^n végtelen, akkor sem S , sem a ciklus nem fejeződik be. Ha α^n véges, akkor két eset lehetséges. Ha π igaz a $\tau(\alpha^n)$ pontban, akkor folytatjuk a ciklust a $\tau(\alpha^n)$ pontból kiindulva. Ha π nem igaz, akkor a ciklust befejezzük. Ez esetben a ciklus a $kon(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ egyesített sorozatot eredményezi. Ez a sorozat a szekvencia esetéhez hasonlóan nem redukált, mert $\tau(\alpha^1) = \alpha_1^2$, $\tau(\alpha^2) = \alpha_1^3$, stb. Ezért az egyesített sorozat redukáltját tekintjük a ciklus, vagy iteráció eredményének.

Szükségünk van a következő jelölésekre: Legyen

$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1} \in A^*$ és $\alpha^n \in A^{**}$. Ekkor

$$\chi_n(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) = \text{red}(\text{kon}(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)).$$

Ha $\alpha^i \in A^*$ ($i \in \mathbb{N}$), akkor

$$\chi_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \dots) = \text{red}(\text{kon}(\alpha^1, \alpha^2, \dots)).$$

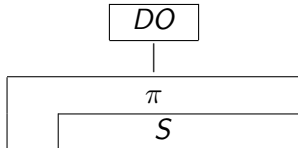
Definíció

Legyen π feltétel és S program A -n. A $DO \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S -ből a π feltétellel képezett ciklusnak nevezzük, és (π, S) -sel jelöljük, ha

1. $\forall a \notin [\pi] : DO(a) = \{\langle a \rangle\}$,
2. $\forall a \in [\pi] :$

$$\begin{aligned}
 DO(a) = & \{ \alpha \in A^{**} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \alpha = \chi_n(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) \\
 & \wedge \alpha^1 \in S(a) \wedge \forall i \in [1..n-1] : \\
 & \alpha^{i+1} \in S(\tau(\alpha^i)) \wedge \tau(\alpha^i) \in [\pi] \wedge \\
 & \wedge (\alpha^n \in A^\infty \vee (\alpha^n \in A^* \wedge \tau(\alpha^n) \notin [\pi])) \} \cup \\
 & \cup \{ \alpha \in A^\infty \mid \alpha = \chi_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \dots) \wedge \alpha^1 \in S(a) \wedge \\
 & \wedge \forall i \in \mathbb{N} : \alpha^{i+1} \in S(\tau(\alpha^i)) \wedge \tau(\alpha^i) \in [\pi] \} .
 \end{aligned}$$

1. Determinisztikus programból képezett ciklus is determinisztikus.
 2. A ciklus értékészlete tartalmazhat végtelen sorozatot akkor is, ha az S program csak véges sorozatokat generál (soha nem jutunk ki a π feltétel igazsághalmazából).
- A $DO = (\pi, S)$ ciklus struktogramja:



Tétel

A szekvencia, az elágazás és a ciklus program.

Bizonyítás

Mindhárom program $A \times A^{**}$ típusú reláció és mindhárom esetben $D_S = A$. A másik két tulajdonság igazolása a következő:

1. Szekvencia: $a \in A$, $\alpha \in S(a)$. Ha $\alpha \in S_1(a)$, akkor S_1 program volta miatt $\alpha_1 = a$ és $\alpha = \text{red}(\alpha)$. Ha $\alpha = \chi_2(\alpha^1, \alpha^2)$, ahol $\alpha^1 \in S_1(a)$ és $\alpha^2 \in S_2(\tau(\alpha^1))$, akkor χ_2 definíciója miatt α redukált és $\alpha_1 = \alpha_1^1 = a$.

Bizonyítás

2. Elágazás: $a \in A$, $\alpha \in IF(a)$. Ekkor

$$\alpha \in \bigcup_{i=0}^m w_i(a).$$

Ha $\alpha \in w_0(a)$, akkor $\alpha = \langle a, a, \dots \rangle$ kielégíti a két kritériumot. Ha $\exists i \in [1..m] : \alpha \in w_i(a)$, akkor $\alpha \in S_i(a)$ és mivel S_i program, $\alpha_1 = a$ és $\alpha = red(\alpha)$.

3. Ciklus: $a \in A$, $\alpha \in DO(a)$. Ha $a \notin [\pi]$, akkor $\alpha = \langle a \rangle$, ami teljesíti a program követelményeit. Ha $a \in [\pi]$, akkor két eset lehetséges:

(a) Ha $\alpha \in A^{**}$ és $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha = \chi_n(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$, $\alpha^1 \in S(a)$, akkor χ_n definíciója miatt α redukált és $\alpha_1 = \alpha_1^1 = a$.

(b) Ha $\alpha \in A^\infty$ és $\alpha = \chi_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \dots)$, $\alpha^1 \in S(a)$, akkor χ_n definíciója miatt α redukált és $\alpha_1 = \alpha_1^1 = a$.