

3. előadás

Programozás-elmélet

Definíció

Legyen $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ állapotter. A $pr_{A_i} : A \rightarrow A_i$ projekciós függvényeket változóknak nevezzük:

$$pr_{A_i}(a) = a_i \quad (\forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A).$$

A változók jelölése: $v_i = pr_{A_i}$.

Definíció

Legyen $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ állapottér. A $pr_{A_i} : A \rightarrow A_i$ projekciós függvényeket változóknak nevezzük:

$$pr_{A_i}(a) = a_i \quad (\forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A).$$

A változók jelölése: $v_i = pr_{A_i}$.

A változókra fennáll, hogy

$$D_{v_i} = A = D_{pr_{A_i}}, \quad R_{v_i} = A_i = R_{pr_{A_i}}.$$

Az $R_{v_i} = A_i$ összefüggés miatt beszélünk a változó típusáról, amely azonos A_i típusával.

Legyen $B = A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}$. Ekkor a $pr_B : A \rightarrow B$ projekciót a $pr_B = (v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$, azaz a $pr_B(a) = (v_{i_1}(a), \dots, v_{i_m}(a))$ előírással adhatjuk meg. Tetszőleges $f \circ pr_B = f \circ (v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$ alakú összetett függvényt, ha ez nem okoz félreértést, az $f(v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$ alakban is írunk.

Korábban bevezetük a program és a feladatot fogalmát, és definiáltuk az azonos állapottéren levő feladat - program párok között a megoldás fogalmát. A gyakorlatban általában azonban a feladat és a program különböző állapottéren van: példaként megemlíthetjük azt az esetet, amikor egy feladat megoldására a programban további változókat kell bevezetni, azaz a feladat állapotterét újabb komponensekkel kell bővíteni.

A továbbiakban tehát a program és a feladat fogalmát fogjuk általánosítani, és megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani a különböző állapottéren adott programok és feladatok viszonyáról. A "megoldás" fogalma leírja, hogy mit is jelent az, hogy egy program megold egy feladatot. Ezért ezt a megoldásfogalmat megtartjuk, és megpróbáljuk a különböző állapottéren levő feladatot és programot egy „közös állapottérre hozni”.

Ha egy megoldó program állapottere bővebb, mint a feladaté, akkor a feladat állapotterét kibővítjük újabb komponensekkel, de „értelemszerűen” azok értékére nem adunk semmilyen korlátozást.

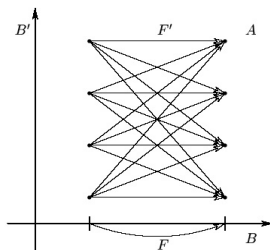
Definíció

Legyen a B állapotter altere az A állapotternek. Az $F' \subseteq A \times A$ relációt az $F \subseteq B \times B$ feladat kiterjesztésének nevezzük, ha

$$F' = \{(x, y) \in A \times A \mid (pr_B(x), pr_B(y)) \in F\}.$$

Vegyük észre, hogy a feladat kiterjesztése az összes olyan $A \times A$ -beli pontot tartalmazza, aminek B -re vett projekciója benne van F -ben, azaz a kiterjesztett feladat az új állapotter-komponensekre nem fogalmaz meg semmilyen megszorítást.

Feladat kiterjesztése



A program kiterjesztésének definíciójában az új komponensekre azt a kikötést tesszük, hogy azok nem változnak meg a kiterjesztett programban. Ezzel azt a gyakorlati követelményt írjuk le, hogy azok a változók, amelyeket a program nem használ, nem változnak meg a program futása során.

Definíció

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A -ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren. Ekkor az S' A -beli relációt az S program kiterjesztésének nevezzük, ha

$$S'(a) = \{\alpha \in A^{**} \mid pr_B(\alpha) \in S(pr_B(a)) \\ \text{és } \forall i \in D_\alpha : pr_{B'}(\alpha_i) = pr_{B'}(a)\}.$$

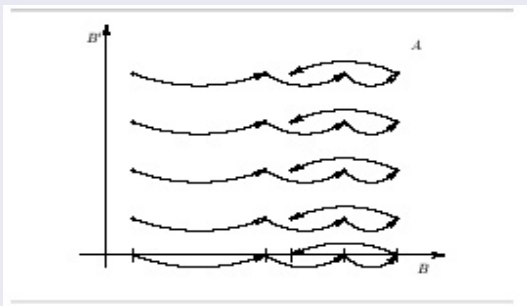
A fenti definíció alapján a kiterjesztett program értékkészletében csak olyan sorozatok vannak, amelyek „párhuzamosak” valamely sorozattal az eredeti program értékkészletéből.

Vajon a kiterjesztés megtartja a program-tulajdonságot? Erre a kérdésre válaszol az alábbi tétel.

Tétel

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A -ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren, és S' az S kiterjesztése A -ra. Ekkor S' program.

Program kiterjesztés



Legyenek $S_1 \subseteq A_1 \times A_1^{**}$ és $S_2 \subseteq A_2 \times A_2^{**}$ programok, B altere mind A_1 mind A_2 -nek. Azt mondjuk, hogy S_1 ekvivalens A_2 -vel B -n ha

$$pr_B(p(S_1)) = pr_B(p(S_2)).$$

A fenti definíció annak formális leírása, hogy két program ugyanakkor terminál, és ha terminál, akkor ugyanazt az eredményt adja.

A definíciónak egyszerű következménye az is, hogy a két ekvivalens program a közös altéren pontosan ugyanazokat a feladatokat oldja meg.

Valójában attól, hogy két program ekvivalens – azaz megegyezik a programfüggvényük – egyéb tulajdonságaik nagyon eltérőek lehetnek!

Bővített identitás

Legyen B altere A -nak, B' a B kiegészítő altere A -ra, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G bővített identitás B' felett, ha minden $(a, a') \in G$ esetén létezik $a'' \in A$, hogy $(a, a'') \in G$ és $pr_{B'}(a) = pr_{B'}(a'')$ és $pr_B(a') = pr_B(a'')$.

Ez a definíció tulajdonképpen azt írja le, hogy a feladat altérre vett projekciójának - mint relációnak - tartalmaznia kell az identikus leképezés megszorítását a projektált feladat értelmezési tartományára.

Vetítéstartás

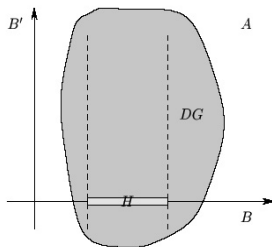
Legyen B altere A -nak, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G vetítéstartó B felett, ha minden $a_1, a_2 \in D_G$ esetén

$$\text{pr}_B(a_1) = \text{pr}_B(a_2) \Rightarrow \text{pr}_B(G(a_1)) = \text{pr}_B(G(a_2)).$$

Félkiterjesztés

Legyen B altere A -nak, $G \subseteq A \times A$ feladat, $H \subseteq B$. Azt mondjuk, hogy a G félkiterjesztés H felett, ha $\text{pr}_B^{-1}(H) \subseteq D_G$.

Félkiterjesztés



Tétel

Legyen B altere A -nak, B' a B kiegészítő altere A -ra, S program B -n, $F \subseteq B \times B$ feladat, S' illetve F' S -nek illetve F -nek a kiterjesztése A -ra. Legyen továbbá $\bar{F} \subseteq A \times A$ olyan feladat, melyre $p_B(\bar{F}) = F$ és \bar{S} pedig olyan program, amely ekvivalens S -sel B -n. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:

- (1) ha S' megoldása F' -nek, akkor S megoldása F -nek,
- (2) ha S' megoldása \bar{F} -nek, akkor S megoldása F -nek,
- (3) ha \bar{S} megoldása F' -nek, akkor S megoldása F -nek,
- (4) ha \bar{S} megoldása \bar{F} -nek és $p(\bar{S})$ vetítéstartó B felett, vagy \bar{F} félkiterjesztés D_F felett, akkor S megoldása F -nek,
- (5) ha S megoldása F -nek, akkor S' megoldása F' -nek,
- (6) ha S megoldása F -nek és \bar{F} bővített identitás B' felett és vetítéstartó B felett, akkor S' megoldása \bar{F} -nek,
- (7) ha S megoldása F -nek és $p(\bar{S})$ félkiterjesztés D_F felett, akkor \bar{S} megoldása F' -nek

Megoldás általánosítása

Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat és $S \subseteq B \times B^{**}$ program. Azt mondjuk, hogy a S megoldása F -nek, ha létezik olyan C állapotter, aminek A és B is altere és S kiterjesztése C -re az F C -re való kiterjesztésének megoldása.

A kiterjesztési tételekből következik, hogy a definícióban a létezik helyett minden is írható.

Példa

Adott az $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ állapottéren az $F = \{((l, k), (l', k')) \mid k' = (l \wedge k)\}$ feladat, és az $A' = \mathbb{L} \times \mathbb{L} \times \{1, 2\}$ állapottéren a következő program:

$$S = \{ (ii1, \langle ii1, ih2, hi2 \rangle), (ii2, \langle ii2, hh1, ii1 \rangle), (ii2, \langle ii2, ih2, hi1, hi2 \rangle) \\ (ih1, \langle ih1 \rangle), (ih2, \langle ih2, hi2, hh1 \rangle), (hi1, \langle hi1, ih2, ii1, hh2 \rangle) \\ (hi2, \langle hi2, ih2, ii1, hi2, ih1 \rangle), (hi2, \langle hi2, ih2, ii1, hh2 \rangle), \\ (hh1, \langle hh1, ii1, hi1, ih1 \rangle), (hh2, \langle hh2 \rangle) \}$$

Megoldja-e az S program az F feladat A' -re való kiterjesztését?

Megoldás

Írjuk fel az F feladat A' -re való kiterjesztését:

$$\begin{aligned}
 F' = \{ & (ii1, ii1), (ii1, hi1), (ii1, ii2), (ii1, hi2) \\
 & (ii2, ii1), (ii2, hi2), (ii2, ii2), (ii2, hi2) \\
 & (ih1, ih1), (ih1, hh1), (ih1, ih2), (ih1, hh2) \\
 & (ih2, ih1), (ih2, hh1), (ih2, ih2), (ih2, hh2) \\
 & (hi1, ih1), (hi1, hh1), (hi1, ih2), (hi1, hh2) \\
 & (hi2, ih1), (hi2, hh1), (hi2, ih2), (hi2, hh2) \\
 & (hh1, ih1), (hh1, hh1), (hh1, ih2), (hh1, hh2) \\
 & (hh2, ih1), (hh2, hh1), (hh2, ih2), (hh2, hh2) \}
 \end{aligned}$$

Megoldás

Az S program programfüggvénye:

$$p(S) = \{(ii1, hi2), (ii2, ii1), (ii2, hi2), (ih1, ih1), (ih2, hh1), (hi1, hh2), (hi2, ih1), (hi2, hh2), (hh1, ih1), (hh2, hh2)\}$$

Két feltétel teljesülését kell megvizsgálni:

- (1) $D_{F'} \subseteq D_{p(S)}$ teljesül, mivel mindkettő egyenlő a teljes állapottérrel.
- (2) minden $a \in D_F$ esetén $p(S)(a) \subseteq F(a)$

(2)

$$p(S)(i\bar{i}1) = \{hi2\} \subseteq \{i\bar{i}1, hi1, i\bar{i}2, hi2\} = F(i\bar{i}1)$$

$$p(S)(i\bar{i}2) = \{i\bar{i}1, hi2\} \subseteq \{i\bar{i}1, hi1, i\bar{i}2, hi2\} = F(i\bar{i}2)$$

$$p(S)(ih1) = \{ih1\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(ih1)$$

$$p(S)(ih2) = \{hh1\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(ih2)$$

$$p(S)(hi1) = \{hh2\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(hi1)$$

$$p(S)(hi2) = \{ih1, hh2\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(hi2)$$

$$p(S)(hh1) = \{ih1\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(hh1)$$

$$p(S)(hh2) = \{hh2\} \subseteq \{ih1, ih2, hh1, hh2\} = F(hh2)$$