

2. előadás

Programozás-elmélet

Öt alapvető fogalmat definiálunk:

1. *Állapottér* (a számítógép memória modellje)
2. *Feladat* (a programozási feladat modellje)
3. *Program* (a program futásának a modellje)
4. *Programfüggvény* (a program futásának eredménye)
5. *Feladat megoldása* (a feladat és a program viszonyának modellezése).

Az előként bevezetendő absztrakt fogalom tulajdonképpen a számítógép memóriájának ad egy a továbbiakban kényelmesen használható megfelelőt.

Definíció

Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmazok. Az $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ halmazt állapottérnek nevezzük, az A_i halmazokat pedig típusérték-halmazoknak.

Az előként bevezetendő absztrakt fogalom tulajdonképpen a számítógép memóriájának ad egy a továbbiakban kényelmesen használható megfelelőt.

Definíció

Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmazok. Az $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ halmazt állapottérnek nevezzük, az A_i halmazokat pedig típusérték-halmazoknak.

Az állapottér fenti definíciójában az egyes komponenseket tekintsük úgy, mint egyes jellemzők lehetséges értékeinek halmazát. A típusérték-halmaz elnevezés arra utal, hogy ezek a halmazok bizonyos közös tulajdonsággal rendelkező elemekből állnak. A későbbiekben majd kitérünk arra is, hogy ez a közös tulajdonság mit is jelent. Mivel a jellemzők érték-halmaza lehet azonos, az állapottér komponensei között egy halmaz többször is szerepelhet.

Az állapottér fogalmának segítségével könnyen megfogalmazhatjuk, hogy mit értünk programozási feladaton. Azt kell megfogalmaznunk, hogy a memória egy adott állapotából (azaz az állapottér egy pontjából) milyen memóriaállapotba (azaz az állapottér mely pontjába) akarunk eljutni.

Definíció

Legyen A állapottér. Az $F \subseteq A \times A$ relációt (programozási) feladatnak nevezzük.

A feladat egy „leképezés” az állapottéren: az állapottér minden D_F -beli pontjára megmondjuk, hogy hova kell belőle eljutni.

A gyakorlatban azt mondjuk, egy program fut, akkor amögött azt értjük, hogy a számítógép memóriájának tartalma folyamatosan változik. A programfutás egy időben dinamikus folyamat. Vezessünk be egy könnyebben kezelhető statikus modellt! Az időben változó folyamatot egy statikus állapotsorozattal írjuk le.

Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt programnak nevezzük, ha

1. $D_S = A$,
2. $\forall a \in A : \forall \alpha \in S(a) : \alpha_1 = a$,
3. $\forall \alpha \in R_S : \alpha = red(\alpha)$.

A fenti megszorítások értelemszerűek: azt kívánjuk meg, hogy a program futását jellemző sorozat abból a pontból induljon el, amihez hozzárendeltük.

A programnak tetszőleges állapotból el kell indulnia, hiszen egy program és annak sincs értelme, hogy a program egy állapotban egymás után véges sokszor lehessen. Tehát olyan sorozat, amelyben az állapotok nem ismétlődnek.

Összefoglalva: A program egy reláció, amelynek értékkészlete az állapottéren értelmezett sorozatokból áll. Ezek a sorozatok egy-egy konkrét program végrehajtást jellemeznek.

Ahhoz, hogy egy program és egy feladat viszonyát megvizsgáljuk, elegendő, ha a programról tudjuk, hogy az állapottér egy adott pontjából kiindulva, az állapottér mely pontjába jut, mert a megoldás szempontjából a közbülső állapotok lényegtelenek. Természetesen vannak olyan - a programok minőségére vonatkozó - további kritériumok, amelyek szempontjából egyáltalán nem mindegy, hogy a program hogyan oldja meg a feladatot (ilyen lehet például a hatékonyság, program idő- és tárigénye), de mi a továbbiakban ezekkel nem foglalkozunk. Ezért vezetjük be a programfüggvény fogalmát, amely tehát csak a program futásának eredményét jellemzi.

Definíció

A $p(S) \subseteq A \times A$ relációt az $S \subseteq A \times A^{**}$ program programfüggvényének nevezzük, ha

1. $D_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^*\},$
2. $p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}.$

Definíció

A $p(S) \subseteq A \times A$ relációt az $S \subseteq A \times A^{**}$ program programfüggvényének nevezzük, ha

1. $D_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^*\}$,
2. $p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}$.

A definíció jelentése a következő:

1. Csak olyan pontokban vizsgáljuk azt, hogy hova jut el a program, amelyekben a futás véges (a program nem száll el);
2. Tetszőleges $b \in A$ ponthoz, amelyre $(a, b) \in p(S)$, létezik véges, a program által előállított $\alpha \in A^*$ sorozat $((a, \alpha) \in S)$, amelynek utolsó eleme (utolsó programállapota) éppen b .

A programfüggvény a program futásának eredményét jellemzi. A függvény jelző nem igazán korrekt, ui. nem feltétlenül függvény, de a hagyomány ezt követeli.

$$p(S)(a) = \{\tau(\alpha) \mid \alpha \in S(a)\} = \tau(S(a)) = (\tau \circ S)(a).$$

Vegyük észre, hogy a programfüggvény ugyanolyan típusú reláció mint a feladat volt. Így tehát a programfüggvény fogalmának bevezetésével lehetőségünk nyílik arra, hogy kapcsolatot teremtsünk egy adott feladat és egy adott program között. Természetesen ennek a kapcsolatnak azt kell leírnia, hogy mikor mondjuk egy programról azt, hogy megold egy adott feladatot.

Definíció

Az $S \subseteq A \times A^{**}$ program megoldja az $F \subseteq A \times A$ feladatot, ha

1. $D_F \subseteq D_{p(S)}$,
2. $\forall a \in D_F : p(S)(a) \subseteq F(a)$.

A definíció jelentése a következő:

1. A

$$D_F = \{a \in A \mid \exists b \in A : (a, b) \in F\}$$

$$\subseteq D_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^*\}$$

feltétel miatt az állapottér azon pontjaihoz, ahol a feladat értelmezve van, a program csak véges sorozatokat rendelhet;

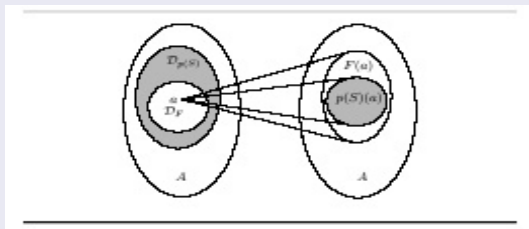
2. A

$$p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}$$

$$\subseteq F(a) = \{c \in A \mid (a, c) \in F\}$$

feltétel azt fejezi ki, hogy a sorozatok végpontjait a feladat hozzárendeli a kezdőponthoz. Tehát a program által generált „véges” sorozatok végpontjai a feladat megoldásai.

Megoldás



Feladat

Legyen $A = \mathbb{Z}$ és az $x \rightarrow y(x) = (x^2 - 1)^2 + 1$ leképezés kiszámítása a "feladat". Ekkor

$$F = \left\{ (x, y) \mid y = (x^2 - 1)^2 + 1 \right\} \subset A \times A,$$

$$D_F = A \text{ és } \forall a \in A \text{ esetén } F(a) = \left\{ (a^2 - 1)^2 + 1 \right\}.$$

Tekintsük a következő "programot":

$$x \xrightarrow{f_1} x^2 - 1 \xrightarrow{f_2} (x^2 - 1)^2 + 1.$$

A fenti formába átírva ez a következőképpen néz ki:

$$S = \left\{ (x, \alpha) \mid \alpha = \langle x, x^2 - 1, (x^2 - 1)^2 + 1 \rangle \right\} \subset A \times A^* \subset A \times A^{**}.$$

Igazoljuk, hogy S program, adjuk meg a programfüggvényét és vizsgáljuk meg, hogy megoldja-e az F feladatot!

Megoldás

1. $D_S = A$ nyilvánvaló.

Megoldás

1. $D_S = A$ nyilvánvaló.
2. $\forall \alpha \in S(a) = \left\{ \langle a, a^2 - 1, (a^2 - 1)^2 + 1 \rangle \right\}$ esetén $\alpha_1 = a$.

Megoldás

- $D_S = A$ nyilvánvaló.
- $\forall \alpha \in S(a) = \left\{ \langle a, a^2 - 1, (a^2 - 1)^2 + 1 \rangle \right\}$ esetén $\alpha_1 = a$.
- Vegyük észre, hogy

$$\alpha \in R_S \Leftrightarrow \exists a \in A : \alpha = \langle a, a^2 - 1, (a^2 - 1)^2 + 1 \rangle.$$

Egy α sorozat akkor és csak akkor redukált, ha $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ ($\forall i$).
Ebben az esetben

$$a = a^2 - 1 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin A$$

és

$$a^2 - 1 = (a^2 - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} - 1} \notin A.$$

Tehát az $\alpha \in R_S$ sorozatok redukáltak. Így S program.

Megoldás II.

A programfüggvény:

$$p(S) = \{(a, b) \mid S(a) \subset A^*, \exists \alpha \in S(a) : \tau(\alpha) = b\}.$$

Mivel $\forall a \in D_F = D_S = A$ esetén

$S(a) = \left\{ \left\langle a, a^2 - 1, (a^2 - 1)^2 + 1 \right\rangle \right\}$, ezért $\alpha \in S(a)$ esetén

$\tau(\alpha) = (a^2 - 1)^2 + 1$. Tehát $D_{p(S)} = A$.

Továbbá $p(S)(a) = \left\{ (a^2 - 1)^2 + 1 \right\}$.

Megoldás III.

Könnyen látható, hogy $D_F = A \subseteq D_{p(S)} = A$ (1. tulajdonság). A korábbiakhoz hasonlóan adódik, hogy

$$\forall a \in D_F : p(S)(a) = \{(a^2 - 1)^2 + 1\} \subseteq F(a) = \{(a^2 - 1)^2 + 1\}.$$

Megoldás III.

Könnyen látható, hogy $D_F = A \subseteq D_{p(S)} = A$ (1. tulajdonság). A korábbiakhoz hasonlóan adódik, hogy

$$\forall a \in D_F : p(S)(a) = \{(a^2 - 1)^2 + 1\} \subseteq F(a) = \{(a^2 - 1)^2 + 1\}.$$

Feladat

Kérdés: Miért nem program az

$$S' = \{(x, \alpha) \mid \alpha = \langle x, (x^2 - 1)^2 + 1 \rangle\} \subseteq A \times A^{**} \text{ reláció?}$$

Példa

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S \subseteq A \times A^{**}$.

$$S = \{(1, \langle 1251 \rangle), (1, \langle 14352 \rangle), (1, \langle 132222 \dots \rangle), \\ (2, \langle 21 \rangle), (3, \langle 3333 \dots \rangle), (4, \langle 41514 \rangle), \\ (4, \langle 415142 \rangle), (4, \langle 4312351 \rangle), (5, \langle 5425 \rangle), \\ (5, \langle 534 \rangle)(5, \langle 51234 \rangle)\}$$

$$F = \{(2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 5)\}$$

- Adjuk meg $p(S)$ -t!
- Megoldja-e S az F feladatot?