1. előadás

Programozás-elmélet

Ahhoz, hogy bármiről érdemben beszélhessünk, meg kell állapodnunk egy jelölésrendszerben. Az alábbiakban bevezetjük azokat a jelöléseket és alapvető definíciókat amelyeket a továbbiakban gyakran fogunk használni. Először bevezetjük a matematikában gyakran használt számhalmazok jelöléseit.

Alaphalmazok

$\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza

$\mathbb{N}_0$ a nemnegatív egészek halmaza

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza

$\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza

$\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza

$\mathbb{L}$ a logikai értékek halmaza, $\mathbb{L} = \{\text{igaz, hamis}\}$

$\emptyset$ üres halmaz

Megjegyezzük továbbá, hogy $[a..b]$-vel fogjuk jelölni, a valós $[a, b]$ intervallum egész elemeinek halmazát, azaz

$$[a..b] := [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Természetesen használni fogjuk a matematikában megszokott halmazelméleti műveleteket:

$$\begin{array}{lll} \cup & - & \text{unió}, \qquad A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ vagy } x \in B\} \\ \cap & - & \text{metszet}, \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\} \end{array}$$

és relációkat:

$$\begin{array}{lll} \in & - & \text{eleme} \\ \notin & - & \text{nem eleme} \\ \subseteq & - & \text{részhalmaz} \\ \subset & - & \text{valódi részhalmaz} \\ |\cdot| & - & \text{a halmaz elemszáma, számossága} \end{array}$$

Direkt szorzat

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tetszőleges halmazok direkt, vagy Descartes féle szorzata:*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots n\}.$$

Jelölés: $\times_{i=1}^{n} A_i$.
A direkt szorzat elemei rendezett elem *n-esek.*

Definíció

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Tetszőleges $S \subseteq A \times B$ részhalmazt (bináris) relációnak nevezzük. Az $a \in A$ és $b \in B$ elemek S relációban állnak egymással (jelölés aSb) akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in S$.
A definíció rövidebben:

$$aSb \Longleftrightarrow (a, b) \in S.$$

Definíció

Reláció értelmezési tartománya:

$$D_S = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Reláció értékkészlete:

$$R_S = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Reláció értéke agy adott helyen:
$$S(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in S\}.$$

Definíció

Az S relációt determinisztikus, vagy parciális függvénynek nevezzük, ha
$$|S(a)| \leq 1 \quad (\forall a \in A).$$

Determinisztikus reláció esetén $S(a)$ vagy üres, vagy egyelemű halmaz.

Definíció

Az S relációt függvénynek nevezzük, ha
$$|S(a)| = 1 \quad (\forall a \in D_S).$$

Definíció

Az $S^{(-1)}$ reláció az $S \subseteq A \times B$ reláció inverze, ha

$$S^{(-1)} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in S\}.$$

Definíció

A $H \subseteq B$ halmaz S reláció szerinti inverz képe:

$$S^{(-1)}(H) = \{a \in A \mid S(a) \cap H \neq \emptyset\}.$$

Definíció

Az

$$R^{-1}(H) = \{a \in D_R | R(a) \subseteq H\}$$

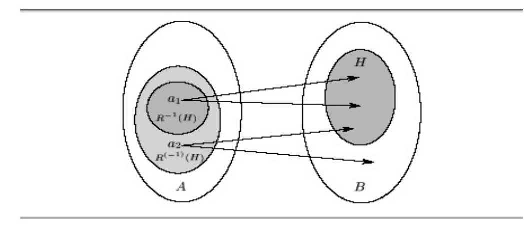
halmazt a H halmaz R reláció szerinti ősképének nevezzük.

Definíció

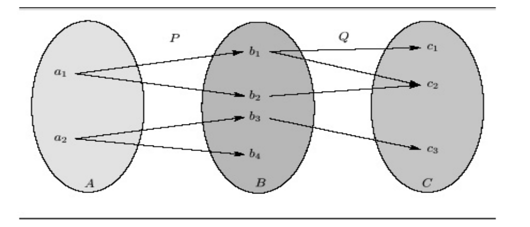
Az $R \subseteq A \times C$ reláció a $P \subseteq A \times B$ és $Q \subseteq B \times C$ relációk kompozíciója (szorzata) (jelölés: $R = Q \circ P$), ha

$$R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q\} .$$

Inverz kép és őskép



Kompozíció



Definíció

Legyen $R \subseteq A \times A$ és $n \in \mathbb{N}$. Az R reláció n-edik hatványa ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} R^{(n)} &= \{(a, a') \in A \times A \mid \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in A : \\ &\quad (\forall i \in [1..n] : (a_{i-1}, a_i) \in R) \wedge a_0 = a \wedge a_n = a'\} . \end{aligned}$$

Az R reláció 0-adik hatványa (tkp. id_A):

$$R^{(0)} = \{(a, a') \in A \times A \mid a = a'\} .$$

$R^{(n)} = R \circ R^{(n-1)}$, $R^{(1)} = R$ és $(id_A)^{(n)} = id_A$.

$$\begin{aligned} R^{(n)}(a) &= \{a' \in A \mid \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in A : \\ &\quad (\forall i \in [1..n] : (a_{i-1}, a_i) \in R) \wedge a_0 = a \wedge a_n = a'\} , \end{aligned}$$

$$R^{(1)}(a) = R(a) , \quad R^{(0)}(a) = \{a\} .$$

Definíció

Legyen A ($A \neq \emptyset$) egy tetszőleges halmaz. Ekkor

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$$

($\alpha_i \in A$) egy A-beli véges sorozat.

Definíció

Az $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ véges sorozat hossza $|\alpha|$.

Tulajdonképpen $|\alpha| = n$, illetve a sorozat, mint halmaz számossága.

Definíció

Az A halmazbeli véges sorozatok halmaza A^*.

A^* az $\langle \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle, \dots$ sorozatok összessége.

Definíció

A-beli végtelen sorozat:

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots \rangle,$$

ahol $\alpha_i \in A$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.

Definíció

A-beli végtelen sorozatok halmaza A^∞.

Definíció

Az A-beli véges és végtelen sorozatok halmaza A^{**}.

Megjegyzés

$$A^{**} = A^* \cup A^\infty$$

Definíció

Az $\alpha \in A^{**}$ sorozat értelmezési tartománya D_α, ahol

$$D_\alpha = \begin{cases} [1..|\alpha|], & \text{ha } \alpha \in A^* \\ \mathbb{N}, & \text{ha } \alpha \in A^\infty \end{cases}$$

A sorozat egy $\mathbb{N} \to A$ típusú függvény értékkészlete.

Definíció

Az $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \in A^*$ és $\alpha^n \in A^{**}$ sorozatok egymásután írása, konkatenációja

$$kon\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n\right).$$

Ha $\alpha^i = \left\langle \alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_{k_i}^i \right\rangle$ $(1 \leq i \leq n-1)$ és $\alpha^n = \langle \alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots \rangle$, akkor a konkatenáció alakja:

$$\langle \underbrace{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{k_1}^1}_{\alpha^1}, \underbrace{\alpha_1^2, \ldots, \alpha_{k_2}^2}_{\alpha^2}, \ldots, \underbrace{\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{k_{n-1}}^{n-1}}_{\alpha^{n-1}}, \underbrace{\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots}_{\alpha^n} \rangle.$$

Definíció

Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozat redukáltja az a sorozat, amelyet úgy kapunk, hogy az α sorozat minden azonos elemből álló véges részsorozatát a részsorozat egyetlen elemével helyettesítjük.
Jelölése: $red(\alpha)$.

Definíció

Utolsó elem függvény $\tau : A^* \to A$, ahol $\tau(\alpha) = \alpha_{|\alpha|}$ $(\alpha \in A^*)$.

$\tau(\alpha) = \alpha_n$, ha $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$. Az utolsó elem függvényt csak véges sorozatokra értelmezzük!

Definíció

Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_m \leq n$, $A = \times_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \times_{j=1}^{m} A_{i_j}$. A $pr_B : A \to B$ függvényt projekciónak nevezzük (A ortogonális projekciója B-re), ha

$$pr_B(a) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}) \quad (\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A).$$

A definícióban szereplő B-t az A alterének nevezzük. Ha $m < n$, akkor valódi altér. Csak $m \neq 0$ lehetséges, mivel az $\emptyset$ nem altere egyetlen direkt szorzatnak sem!

Definíció

(Projekció kiterjesztése „terek" direkt szorzataira): Legyen A és B olyan, mint az előző definícióban, $(a_1, a_2) \in A \times A$. Ekkor

$$pr_B((a_1, a_2)) = (pr_B(a_1), pr_B(a_2)) \in B \times B.$$

Definíció

(Projekció kiterjesztése „sorozatterekre”): Legyen A és B olyan, mint az előző definícióban, $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots \rangle \in A^{**}$. Ekkor

$$pr_B(\alpha) = \langle pr_B(\alpha_1), pr_B(\alpha_2), \dots, pr_B(\alpha_i), \dots \rangle \in B^{**}.$$

vagy másképp:

$$pr_B(\alpha) = \beta \in B^{**}, \text{ ahol } \beta_i = pr_B(\alpha_i) \quad (\forall i \in D_\beta = D_\alpha).$$

Definíció

Az $R \subseteq A \times A$ reláció lezártján az $\overline{R} \subseteq A \times A$ relációt értjük, amelyre

$$D_{\overline{R}} = \{a \in A \mid \nexists \alpha \in A^{\infty} : (a, \alpha_1) \in R \wedge \forall i \in \mathbb{N} : (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in R\}$$

és minden $a \in D_{\overline{R}}$ esetén

$$\overline{R}(a) = \left\{ b \in A \mid b \notin D_R \wedge \exists k \in \mathbb{N}_0 : b \in R^{(k)}(a) \right\}.$$

A reláció lezártja olyan pontokban van értelmezve, amelyekből kindulva a relációt nem lehet végtelen sokszor egymás után alkalmazni (a pontból nem indulhat végtelen „lánc”, csak véges). Ezekhez a $D_{\overline{R}}$-beli pontokhoz olyan pontokat rendel, amelyek nincsenek benne az eredeti reláció értelmezési tartományában. A véges láncok kivezetnek D_R-ből. Tehát $D_R \cap R_{\overline{R}} = \emptyset$.