1. Pivotálás

Az alábbiakban bemutatjuk a lineáris algebra egyik legfontosabb számolási eszközét a pivotálást (amelyet báziscsere transzformációnak is szokás nevezni). Ezt a módszert is alkalmazhatjuk lineáris egyenletrendszerek megoldására, mátrix inverzének és determinánsának meghatározására is. Első lépésként szükségünk lesz néhány lineáris algebrából vett fogalomra.

Definíció: (Generáló rendszer)

Az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J_G\ (J_G \subset J)\}$ vektorhalmazt az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektorrendszer *generáló rendszerének* nevezzük, ha minden $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektor előáll az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J_G\}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Definíció: (Bázis)

Ha az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J_B\}$ vektorrendszer lineárisan független és az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektorrendszer generáló rendszere, akkor az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektorrendszer *bázisrendszerének* (*bázisának*) nevezzük.

Az előző állításaink értelmében egy vektorrendszer minden vektora egyértelműen állítható elő a vektorrendszer egy adott bázisrendszerének lineáris kombinációjaként, röviden szólva a báziselőállítás egyértelmű.

Tekintsük az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, tetszőleges vektorokat. Legyen adott az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektorrendszernek egy $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J_B\}$ bázisrendszere és legyen előállítva az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J\}$ vektorrendszer összes vektora a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Jelölje t_{ij} az $\mathbf{a}_i$ $(i \in J_B)$ vektor együtthatóját az $\mathbf{a}_j$ $(j \in J)$ vektor előállításában, azaz

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \in J_B} t_{ij} \mathbf{a}_i, \quad j \in J.$$

Az egyszerűség kedvéért a fenti báziselőállítást az alábbi táblázatba foglalhatjuk:

$$\begin{array}{c|cc|}
 & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_s \\
\hline
\mathbf{a}_i & t_{ij} & t_{is} \\
\mathbf{a}_r & t_{rj} & t_{rs} \\
\hline
\end{array}$$

A táblázat felső szegélye a vektorrendszer vektorait, a bal szegélye a bázisrendszer vektorait, a táblázat belseje pedig az előállításban szereplő együtthatókat tartalmazza. Az egyes oszlopokból olvasható ki a vektorok báziselőállítása. A báziselőállítást tartalmazó táblázatot *bázistáblázatnak* vagy *pivot táblázatnak* nevezzük.

A következőkben megmutatjuk, hogy a bázisrendszer egy vektorát hogyan lehet kicserélni egy nem bázisbeli vektorral és az így adódó új bázisrendszerrel hogyan állíthatók elő a vektorrendszer vektorai.

A módszert az alábbi formában mondjuk ki (pivot technika).

Ha $t_{rs}\neq 0$, akkor a J_B bázisrendszerben szereplő $\mathbf{a}_r$ vektort kicserélhetjük a bázisrendszerben nem szereplő $\mathbf{a}_s$ vektorral az alábbi módon:

$$t'_{sj} = \frac{t_{rj}}{t_{rs}} \qquad j \in J$$

$$t'_{ij} = t_{ij} - \frac{t_{rj}t_{is}}{t_{rs}} \qquad j \in J,\, i \in J_B \setminus \{r\}$$

ahol t'_{ij} a $J'_B = J_B \setminus(\{r\} \cup \{s\})$ új bázisrendszerrel történő előállítás együtthatói.

A t_{rs} elemet *pivotelemnek*, az $r\in J_B$ sort *pivot sornak*, az $s\notin J_B$ oszlopot *pivot oszlopnak* és magát a báziscsere transzformációt *pivot technikának* (*pivotálásnak*) nevezzük. A pivotelemet bekarikázással szoktuk jelölni.

A pivotálás - a képletekből kiolvasva - az alábbiak szerint fogalmazható meg szavakban:

1) Pivot sor elemeit (az első formula alapján) úgy számoljuk, hogy a pivot sor minden elemét elosztjuk a pivotelemmel.
2) A többi elemet (a második formula alapján) többféleképpen is számolhatjuk:

   a) Elemenkénti számolás (Téglalap-szabállyal)
   A számítandó t_{ij} elem és a t_{rs} pivot elem alkotta téglalap 4 csúcsán lévő elemet használjuk fel a számításra. A t_{ij} elemből kivonjuk a téglalap két sarkán lévő elem (t_{rj} és t_{is}) szorzatának és a t_{rs} pivotelemnek a hányadosát.

   b) Elemenkénti számolás (Determináns módszer)
   Az a) pontban definiált téglalapnak a pivotelemet tartalmazó két ellentétes sarkán lévő elem (t_{ij} és t_{rs}) szorzatából kivonjuk a másik két sarkán lévő elem (t_{rj} és t_{is}) szorzatát és ezt a különbséget osztjuk a t_{rs} pivotelemmel. Mintha egy 2×2-es determinánst számítanánk és azt osztanánk a pivotelemmel.

   c) Soronkénti számolás (Sor módszer)
   Az i-edik sor összes elemének számításakor a a második formulában szereplő t_{is}/t_{rs} hányadosok megegyeznek, így a számolást úgy is végezhetjük, hogy az i-edik sor minden eleméből kivonjuk a pivot sor megfelelő elemének t_{is}/t_{rs}-szorosát. A

szóbanforgó hányados nem más mint a pivot oszlopban az *i*-edik sorbeli elem és a pivotelem hányadosa. Úgy is megfogalmazhatjuk a sorok számítását, hogy egy adott sorból a pivot sor annyiszorosát vonjuk ki, hogy a pivotelem oszlopának eleme zérus legyen.

d) Oszloponkénti számolás (Oszlop módszer)
A *j*-edik oszlop összes elemének számításakor a a második formulában szereplő t_{rj}/t_{rs} hányadosok megegyeznek, így a számolást úgy is végezhetjük, hogy a *j*-edik oszlop minden eleméből kivonjuk a pivot oszlop megfelelő elemének t_{rj}/t_{rs}-szorosát. A szóbanforgó hányados nem más mint a pivot sorban a *j*-edik oszlopbeli elem és a pivotelem hányadosa.

Azt mindenki maga dönti el, hogy melyiket alkalmazza ezek közül. Szerintem a leghatékonyabb a téglalap szabály, amelyet későbbiekben (például a lineáris programozási feladatok esetén) a legkönnyebb lesz használni. Az alábbiakban egy példán mutatjuk be a pivotálást.

1. PÉLDA:

Legyen adott az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_7$ azonos dimenziójú vektor és tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_7$, $\mathbf{a}_4$ vektorok bázisrendszerét alkotják a vektorrendszernek. A hét vektor előállítását a három bázisvektorral az alábbi bázistáblázat mutatja.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	5	4	1	0	3	1	0
$\mathbf{a}_7$	1	2	0	0	-4	2	1
$\mathbf{a}_4$	3	-1	0	1	5	-3	0

Vigyük be a bázisba az $\mathbf{a}_2$ vektort az $\mathbf{a}_7$ vektor helyett! A pivotelem a bázisból kiviendő $\mathbf{a}_7$ vektor sorában és a bázisba behozandó $\mathbf{a}_2$ vektor oszlopában álló 2-es szám lesz. A pivotálás után az alábbi bázistáblát nyerjük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	3	0	1	0	11	-3	-2
$\mathbf{a}_2$	1/2	1	0	0	-2	1	1/2
$\mathbf{a}_4$	7/2	0	0	1	3	-2	1/2

A sor módszernél az első sorból a pivot sor 4/2=2-szeresét, a harmadik sorból pedig a pivot sor -1/2-szeresét kell kivonni (az utóbbinál más szavakkal a felét hozzáadni). A négyszög módszernél pedig például az $\mathbf{a}_4$ vektor sorában és az $\mathbf{a}_5$ vektor oszlopában lévő elem számítása: 5-(-1)·(-4)/2. A determináns módszernél pedig az utóbbi elem számítása: [5·2-(-1)·(-4)]/2. Az oszlop módszernél például az első oszlopból kivonjuk a pivot oszlop 1/2-szeresét. Vigyázzunk, mert a pivotsorbeli elemre nem vonatkozik ez a szabály.

Most végezzük el az $\mathbf{a}_4$ és az $\mathbf{a}_6$ vektorok cseréjét. Ekkor a pivotelemünk a -2 lesz.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	3	0	1	0	11	-3	-2
$\mathbf{a}_2$	1/2	1	0	0	-2	1	1/2
$\mathbf{a}_4$	7/2	0	0	1	3	-2	1/2

Eredményül az alábbi bázistáblát kapjuk:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	-9/4	0	1	-3/2	13/2	0	-11/4
$\mathbf{a}_2$	9/4	1	0	1/2	-1/2	0	3/4
$\mathbf{a}_6$	-7/4	0	0	-1/2	-3/2	1	-1/4

2. Rövid tábla

A pivotálások során megfigyelhettük, hogy a bázisban lévő vektorok előállítása triviális. Ettől a triviális előállítástól különböző előállítás nem is lehetséges, mivel lineárisan független vektorokkal történő előállítás egyértelmű, a bázisvektorok pedig lineárisan függetlenek. Ezért a felső szegélyről a bázisvektorok el is hagyhatók, hisz azok az oszlopok nyilvánvalóak, nem hordoznak különösebb információt. Azt a bázistáblát, amelyben az összes vektort szerepeltetjük a felső szegélyen *teljes* vagy *hosszú* bázistáblának nevezzük. Azt a táblát, amelyben a felső szegélyen csak a nem bázis vektorok szerepelnek *tömör* vagy *rövid* bázistáblának nevezzük.

A rövid tábla használata előnyös, mivel kevesebbet kell írni, viszont nem olyan strukturált, így nehezebb benne az eligazodás. A továbbiakban a számolást mindig rövid táblán végezzük, az összefüggéseket pedig mindig hosszú táblán mutatjuk be.

A rövid tábla használatát az előző példán mutatjuk be. Párhuzamosan használjuk a két táblázatot. A baloldali bázistáblázat a hosszú, a jobboldali pedig a rövid bázistáblázat.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	5	4	1	0	3	1	0
$\mathbf{a}_7$	1	2	0	0	-4	2	1
$\mathbf{a}_4$	3	-1	0	1	5	-3	0

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$
$\mathbf{a}_3$	5	4	3	1
$\mathbf{a}_7$	1	2	-4	2
$\mathbf{a}_4$	3	-1	5	-3

Vigyük a bázisba az $\mathbf{a}_2$ vektort az $\mathbf{a}_7$ vektor helyett! Végezzük el a pivotálást a baloldali hosszú táblán, az eredmény a következő:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$
$\mathbf{a}_3$	3	0	1	0	11	-3	-2
$\mathbf{a}_2$	1/2	1	0	0	-2	1	1/2
$\mathbf{a}_4$	7/2	0	0	1	3	-2	1/2

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$
$\mathbf{a}_3$	3	-2	11	-3
$\mathbf{a}_2$	1/2	1/2	-2	1
$\mathbf{a}_4$	7/2	1/2	3	-2

Ha rövid táblában végezzük el a pivotálást, akkor először a felső szegélyen lévő vektort is kicseréljük, hisz egy vektort csak egy helyen szerepeltetünk, az $\mathbf{a}_2$ vektor helyébe az $\mathbf{a}_7$ vektor lép. Könnyen észrevehetjük, hogy a pivotoszlopbeli elemek számolása lesz az újdonság. A számolás szabályai a hosszú tábláról könnyen leolvashatók. Ezeket vesszük most sorra:

1. A hosszú táblát nézve a pivotálás szabályai szerint az $\mathbf{a}_7$ vektor oszlopának pivotsorbeli elemét úgy számoljuk, hogy a pivotelemmel osztunk, azaz $\frac{1}{2}$ lesz.
2. A nem pivotsorbeli elemeit pedig a következőképpen számoljuk:

$$\mathbf{0}-\frac{\mathbf{1}\cdot 4}{2}, \quad \mathbf{0}-\frac{\mathbf{1}\cdot(-1)}{2}.$$

A fenti képletekben a vastagon szedett számok a bázisban lévő $\mathbf{a}_7$ vektor triviális előállításából vett számok. Ebből könnyen látható, hogy az $\mathbf{a}_7$ vektor új előállítása, tehát a pivotoszlopbeli elemek a következők:

1. A pivotsorbeli elem a pivotelem reciproka,
2. A nem pivotsorbeli elemek pedig egyszerűen írva: -4/2 ill. -(-1)/2, azaz a pivotoszlopbeli elemeket el kell osztani a pivotelemmel és ellenkező előjellel kell venni.

Összefoglalva a rövid bázistábla használata a következő:

A bázisba bejövő vektor helyébe a bázisból kimenő vektort tesszük.

1. lépés: A pivotelem helyére a pivot elem reciprokát írjuk.

2. lépés: A pivot sor többi elemét elosztjuk a pivotelemmel.

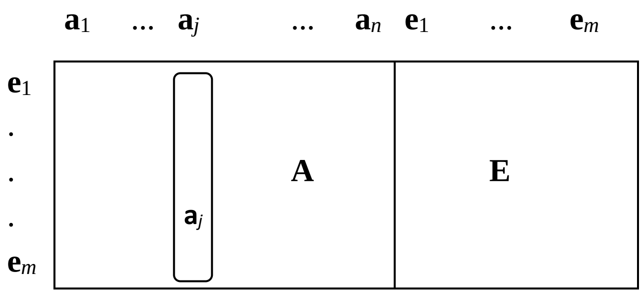
3. lépés: A pivot oszlop többi elemét elosztjuk a pivotelemmel és ellenkező előjelűre változtatjuk (vagy másképp mondva: elosztjuk a pivotelem (-1)-szeresével).

4. lépés: A táblázat fennmaradó elemeit a hosszú táblánál megismert módon számoljuk.

3. Kompozíciós tétel

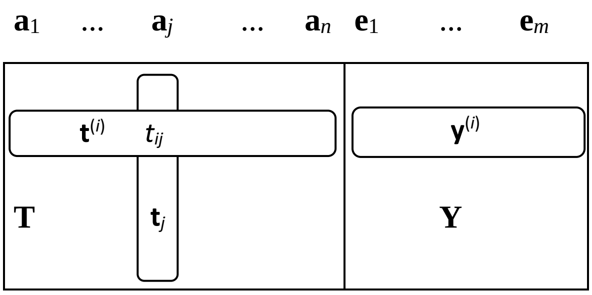
Mint ahogy láttuk, a pivotálással egy adott bázisról egy másik bázisra tértünk át. A gyakorlati problémákban az első bázist általában az egységvektorokkal tudjuk csak felírni. Legyenek adottak az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,..., \mathbf{a}_n\} \subset R^m$ és $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,..., \mathbf{e}_m\} \subset R^m$ vektorok. Tekintsük az alábbi induló bázistáblázatot, ahol az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,..., \mathbf{e}_m$ vektorok adják a bázist. Ezt *triviális bázisnak* nevezzük, lineárisan független és minden R^m-beli vektor előállítható velük (egyértelmű módon).

Induló bázistáblázat



Végezzünk tetszőleges számú pivotálást, amely után az alábbi bázistábla adódik. A bázisban lehetnek vegyesen **a** és **e** típusú vektorok is.

Pivotálás utáni bázistáblázat



Foglaljuk az induló táblában a baloldalon lévő adatokat egy **A** mátrixba, a jobboldalon lévő adatokat az **E** egységmátrixba. Hasonlóan foglaljuk a pivotálások utáni táblában a baloldalon lévő adatokat egy **T** mátrixba, a jobboldalon lévő adatokat pedig egy **Y** mátrixba.

Az alábbi tétellel adjuk meg a bázistábla egyik nagyon fontos tulajdonságát, amelyet *kompozíciós tételnek* nevezünk.

TÉTEL: (Kompozíciós tétel)

> Tetszőleges számú pivotálás utáni táblában a bal oldal mátrixa (**T**) megegyezik a jobboldal mátrixának (**Y**) és az induló tábla baloldali mátrixának (**A**) szorzatával, azaz
>
> $$\mathbf{T} = \mathbf{Y}\,\mathbf{A},$$

amelyből a mátrixszorzás ismert tulajdonságai alapján az alábbi összefüggések is következnek. Az összefüggésekben az *i* index akár **a**, akár **e** típusú sorban is lehet.

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{Y}\,\mathbf{a}_j\ ,$$

$$\mathbf{t}^{(i)} = \mathbf{y}^{(i)}\,\mathbf{A}\ ,$$

$$t_{ij} = \mathbf{y}^{(i)}\,\mathbf{a}_j\ .$$

4. Mátrix inverzének meghatározása

Tegyük fel, hogy az **A** mátrix $n\times n$-es méretű (négyzetes mátrix). Amennyiben minden **a** típusú vektort behoztunk a bázisba (ill. minden **e** típusú vektort kivittünk a bázisból), azaz az **A** mátrix rangja megegyezik a méretével (*azaz a mátrix sor és oszlopvektorai lineárisan függetlenek*), úgy a **T** mátrix egységmátrix lesz. A bázistáblázatra vonatkozó kompozíciós tétel (**T**=**YA**) szerint az **Y** mátrix az **A** mátrix inverze. Tehát mátrix inverzének meghatározására is használhatjuk a pivotálást. (Ha nem tudjuk az összes vektort kicserélni, azaz a sor és oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek, akkor nem létezik az **A** mátrixnak inverze.)

<u>PÉLDA</u>: Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -24 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Induljunk ki az egységvektorok alkotta bázisból. A pivotálásokat rövid táblán végeztük el. Javasoljuk, hogy az olvasó hosszú táblán is végezze el a pivotálást.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	2	-1	-24
$\mathbf{e}_2$	3	1	3
$\mathbf{e}_3$	-1	0	4

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	5	1	-21
$\mathbf{a}_2$	3	1	3
$\mathbf{e}_3$	-1	0	4

	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	5	1	-1
$\mathbf{a}_2$	3	1	15
$\mathbf{a}_1$	-1	0	-4

	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{a}_3$	-5	-1	-1
$\mathbf{a}_2$	78	16	15
$\mathbf{a}_1$	-21	-4	-4

Ha hosszú táblán dolgoztunk volna, akkor az alábbi bázistáblát kapjuk. Ezen a táblán a tájékozódás ugyan sokkal könnyebb, de mint tudjuk és tapasztalhatjuk is, hogy feleslegesen írunk le oszlopokat.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-1	-1	-5
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	15	16	78
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	-4	-4	-21

A hosszú táblán az a bizonyos **Y** mátrix csak akkor lehet az **A** mátrix inverze, ha az a bizonyos **T** mátrix egységmátrix. Ez, mint említettük csak akkor képzelhető el, ha mindegyik egységvektort kivittük a bázisból, ill. mindegyik oszlopvektort behoztuk a bázisba. Jelen esetben tehát létezik inverz. Ahhoz azonban, hogy a **T** mátrix egységmátrix legyen sorcseréket kell végrehajtani. A sorcserék elvégzése után az egységvektorok alól kiolvasható az **A** mátrix inverze.

Visszatérve a rövid táblára, itt a sorcseréken kívül oszlopcserékre is szükség van. Úgy kell a sorcserét és az oszlopcserét elvégezni, hogy a rövid táblában a bal szegélyen lévő **a** típusú bázisvektorok indexei is és a felső szegélyen lévő **e** egységvektorok indexei is növekvő sorrendben legyenek. A táblázat átrendezés után:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$	-4	-4	-21
$\mathbf{a}_2$	15	16	78
$\mathbf{a}_3$	-1	-1	-5

Ebből az átrendezett táblázatból pedig a mátrix inverze egyszerűen kiolvasható:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -21 \\ 15 & 16 & 78 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$