6. előadás

Numerikus analízis

Tekintsük az
$$Ax = b \tag{1}$$
lineáris egyenletrendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$.
Feladat: Keressük az egyenletrendszer közelítő megoldását.
A **direkt módszer-típus** a feladat paramétereinek felhasználásával előállítja, megkonstruálja a módszer által szolgáltatott közelítő megoldást.
Az **iterációs módszer-típus** a feladat paramétereinek felhasználásával előállít, képez valamilyenfajta iterációs képletet és bizonyos ún. kezdeti értékből kiindulva, az iterációs képlet alkalmazásával közelítő megoldások sorozatát állítja elő.
Ekkor az alábbi kérdéseket kell megválaszolni:

- az előállított közelítő megoldások sorozata konvergens-e;
- ha a konvergencia teljesül, hová tart ez a sorozat;
- ha a sorozat az egzakt megoldáshoz tart, milyen a konvergencia sebessége.

Célunk az, hogy az $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdeti vektorból kiindulva olyan $x^{(r)} \in \mathbb{R}^n$, $r = 1, 2, \ldots$ vektor-sorozatot generáljunk, melyre

$$\lim_{r \to \infty} x^{(r)} = x^*$$

teljesül, ahol x^* az egyenletrendszer egzakt megoldása.

Tekintsük az

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$.
A fenti lineáris egyenletrendszer. iterációs megoldásához tekintsük a

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(A, b)\\
&\Phi_1(x^{(0)}, A, b)\\
&\Phi_2(x^{(1)}, x^{(0)}, A, b)\\
&\vdots\\
&\Phi_r(x^{(r-1)}, \ldots, x^{(1)}, x^{(0)}, A, b)
\end{aligned}$$

függvényeket, melyek révén az $x^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots$ sorozatot az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \Phi_0(A,b) \\ x^{(1)} &= \Phi_1(x^{(0)},A,b) \\ x^{(2)} &= \Phi_2(x^{(1)},x^{(0)},A,b) \\ &\vdots \\ x^{(r)} &= \Phi_r(x^{(r-1)},\dots,x^{(1)},x^{(0)},A,b) \end{aligned}$$

Gyakran $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ vektorok az önkényesen választott $\Phi_0, \Phi_1 \dots, \Phi_{s-1}$ függvényekre, valamely $s \geq 0$ esetén $\Phi = \Phi_s = \Phi_{s+1} = \dots, \Phi_k$ teljesül. Ha minden $r \geq s$ esetén a Φ_r függvény r-től független, ahol s valamely pozitív egész szám, akkor a módszert **starcionárius**-nak nevezzük.
Stacionárius esetben legyen $\Phi = \Phi_s = \Phi_{s+1} = \dots$. Ekkor $x^{(r+1)}$ legfeljebb az előző $x^{(r)}, x^{(r-1)}, \dots, x^{(r-s+1)}$ darab vektortól függ.

$s = 1$ esetén:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \Phi_0(A, b) \\ x^{(r)} &= \Phi(x^{(r-1)}, A, b) \qquad (r = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$s = 2$ esetén:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \Phi_0(A, b) \\ x^{(1)} &= \Phi_0(x^{(0)}, A, b) \\ x^{(r)} &= \Phi(x^{(r-1)}, x^{(r-2)}, A, b) \qquad (r = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

A fentiekben definiált módszerek foka legfeljebb 1, ill. 2.

Ha Φ_r az $x^{(r-1)}, \dots, x^{(1)}, x^{(0)}$ vektorok lineáris függvénye, akkor a módszert lineárisnak nevezzük. Egyébként a módszer nemlineáris.
Elsőfokú, lineáris stacionárius módszer esetén $x^{(r)} = \Phi(x^{(r-1)}, A, b)$ a következő alakot ölti:

$$x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k \tag{2}$$

ahol $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{R}^n$ az eredeti lineáris egyenletrendszer paramétereiből valamilyen módon képezett mátrixot, ill. vektort jelöl. Ezt az alakot **iteratív alak**nak is nevezik.

Megvizsgáljuk, hogy a fenti iteratív alak alkalmazásával nyert vektor-sorozatot milyen feltételek mellett konvergens, mikor konvergál a megoldáshoz, s milyen a konvergencia sebessége. Vezessük be az ún. kapcsolt lineáris egyenletrendszert:

$$(E - G)x = k \tag{3}$$

ahol $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix.
Megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat az eredeti lineáris egyenletrendszer és a kapcsolt lineáris egyenletrendszer. között, s ezáltal elemezzük az iteratív alak által definiált módszert.
Jelölje $\zeta(A, b)$ az $Ax = b$ megoldás-halmazát és jelölje $\zeta(E - G, k)$ a kapcsolt $(E - G)x = k$ megoldás-halmazát.
Legyen $x^* \in \mathbb{R}^n$ az $Ax = b$ egyenlet egzakt megoldása (azaz $x^* = A^{-1}b$).

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $x^{(r+1)} = Gx^{(r)} + k$ képlettel definiált iterációs módszer az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszerrel

- konzisztens, ha $\zeta(A, b) \subseteq \zeta(E - G, k)$,
- reciprok konzisztens, ha $\zeta(E - G, k) \subseteq \zeta(A, b)$,
- teljesen konzisztens, ha $\zeta(A, b) = \zeta(E - G, k)$.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ és x^* az (1) egzakt megoldása. Ha a (2) által meghatározott $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)} \ldots \in \mathbb{R}^n$ sorozat minden $x^{(0)}$ esetén az x^* megoldáshoz konvergál, akkor (2) teljesen konzisztens. Másrészt, ha (2) teljesen konzisztens és az általa meghatározott $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)} \ldots$ sorozat konvergens, akkor ez az x^* megoldáshoz tart.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix A (2) iterációs módszer akkor és csak akkor teljesen konzisztens az (1) egyenletrendszerrel, ha konzisztens és az $E - G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix nemszinguláris. Ha $E - G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris, a teljes konzisztencia akkor és csak akkor áll fenn, ha a módszer reciprok konzisztens és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix, $b \in \mathbb{R}^n$. A (2) iterációs módszer akkor és csak akkor konzisztens az (1) lineáris egyenletrendszerrel, ha létezik olyan $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, melyre

$$G = E - MA \qquad k = Mb$$

teljesül, ahol $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemszinguláris mátrix és $b \in \mathbb{R}^n$. Ekkor (2) iterációs módszer akkor és csak akkor konzisztens (1) lineáris egyenletrendszerrel, ha

$$k = (E - G)A^{-1}b$$

teljesül.

Tekintsük

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix és $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Legyen $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ valamely kezdeti érték.

Tekintsük az

$$A = L + D + U$$

felbontást, ahol

$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó háromszög mátrix, melyre $l_{ij} = a_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j < i)$,

$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrix, melyre $d_{ii} = a_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$,

$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső háromszög mátrix, melyre $u_{ij} = a_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, i < j \leq n)$.

Ekkor

$$\begin{aligned}(L+D+U)x &= b\\ Dx &= b-(L+U)x\\ x &= D^{-1}(b-(L+U)x) = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b\end{aligned}$$

adódik, amely a

$$x = Gx + k$$

előállítást eredményezi, ahol

$$G = -D^{-1}(L+U) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad k = D^{-1}b \in \mathbb{R}^n$$

Megmutatjuk, hogy teljesül a teljes konzisztencia, azaz, van olyan $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, amelyre

$$G = E - MA \qquad k = Mb$$

teljesül.
Meghatározzuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot.

$$E-G = E+D^{-1}(L+U) = E+D^{-1}(A-D) = E+D^{-1}A-D^{-1}D = D^{-1}A$$

és

$$k = D^{-1}b$$

Fentiekből $M = D^{-1}$ következik. Így az $E - G$ nemszingularitásából következik, hogy a módszer teljesen konzisztens.

Tekintsük

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemszinguláris mátrix és $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Legyen $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ valamely kezdeti érték.
Tekintsük az

$$A = L + D + U$$

felbontást, ahol
$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó háromszög mátrix, melyre $l_{ij} = a_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j < i)$,
$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrix, melyre $d_{ii} = a_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$,
$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső háromszög mátrix, melyre $u_{ij} = a_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, i < j \leq n)$.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
(L+D+U)x &= b \\
(L+D)x &= b - Ux \\
x &= (L+D)^{-1}(b-Ux) = -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}b
\end{aligned}
$$

adódik, amely a

$$x = Gx + k$$

előállítást eredményezi, ahol

$$G = -(L+D)^{-1}U \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad k = (L+D)^{-1}b \in \mathbb{R}^n$$

Megmutatjuk, hogy teljesül a teljes konzisztencia, azaz, van olyan $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, amelyre

$$G = E - MA \qquad k = Mb$$

teljesül.
Meghatározzuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot.

$$\begin{aligned} E - G &= E + (L+D)^{-1}U = E + (L+D)^{-1}(A - (L+D)) \\ &= E + (L+D)^{-1}A - (L+D)^{-1}(L+D) \\ &= E + (L+D)^{-1}A - E = (L+D)^{-1}A \end{aligned}$$

és

$$k = (L + D)^{-1} b.$$

Fentiekből $M = (L + D)^{-1}$ következik. Így az $E - G$ nemszingularitásából következik, hogy a módszer teljesen konzisztens.