

Halmazok, relációk, függvények

Egy halmazt akkor tekintünk adotttnak, ha bármely tárgyról, fogalomról stb. el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak.

Halmazok, relációk, függvények

Egy halmazt akkor tekintünk adotttnak, ha bármely tárgyról, fogalomról stb. el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak.

Halmaz megadása:

- (1) felsoroljuk (ha lehetséges) a halmazhoz tartozó összes elemet,
- (2) pontosan megfogalmazzuk azt a tulajdonságot, amely alapján bármely dologról eldönthetjük, hogy eleme-e a halmaznak.

Halmazok, relációk, függvények

Egy halmazt akkor tekintünk adotttnak, ha bármely tárgyról, fogalomról stb. el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak.

Halmaz megadása:

- (1) felsoroljuk (ha lehetséges) a halmazhoz tartozó összes elemet,
- (2) pontosan megfogalmazzuk azt a tulajdonságot, amely alapján bármely dologról eldönthetjük, hogy eleme-e a halmaznak.

Legyen T olyan tulajdonság, amely alapján tetszőleges x „dologról” el lehet dönteni, hogy rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal vagy sem. A T tulajdonsággal rendelkező elemek halmazát a következőképpen adjuk meg:

$$\{x : x \text{ a } T \text{ tulajdonsággal rendelkezik}\}.$$

Ha az A és B halmaz elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a **két halmaz egyenlő**. Jele: $A = B$.

Ha az A és B halmaz elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a **két halmaz egyenlő**. Jele: $A = B$.

A halmazok elemeit csak egyszer vesszük figyelembe és a sorrendre nem vagyunk tekintettel.

Ha az A és B halmaz elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a **két halmaz egyenlő**. Jele: $A = B$.

A halmazok elemeit csak egyszer vesszük figyelembe és a sorrendre nem vagyunk tekintettel.

Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a B **részhalmazának** nevezzük. Jele: $A \subset B$.

Ha az A és B halmaz elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a **két halmaz egyenlő**. Jele: $A = B$.

A halmazok elemeit csak egyszer vesszük figyelembe és a sorrendre nem vagyunk tekintettel.

Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a B **részalmazának** nevezzük. Jele: $A \subset B$.

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.

Ha az A és B halmaz elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a **két halmaz egyenlő**. Jele: $A = B$.

A halmazok elemeit csak egyszer vesszük figyelembe és a sorrendre nem vagyunk tekintettel.

Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a B **részhalmazának** nevezzük. Jele: $A \subset B$.

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.

Alaptételek

- (1) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
- (2) Minden halmaz részhalmaza önmagának.
- (3) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.
- (4) Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

Műveletek halmazokkal

Az A és B halmazok **unióján** mindazon elemek $A \cup B$ -vel jelölt halmazát értjük, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Műveletek halmazokkal

Az A és B halmazok **unióján** mindazon elemek $A \cup B$ -vel jelölt halmazát értjük, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Az A és B halmazok **metszetén** mindazon elemek halmazát értjük amelyek A -nak is és B -nek is elemei. Jele: $A \cap B$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A -t és B -t **diszjunkt** halmazoknak nevezzük.

Műveletek halmazokkal

Az A és B halmazok **unióján** mindazon elemek $A \cup B$ -vel jelölt halmazát értjük, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Az A és B halmazok **metszetén** mindazon elemek halmazát értjük amelyek A -nak is és B -nek is elemei. Jele: $A \cap B$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A -t és B -t **diszjunkt** halmazoknak nevezzük.

Az A és a B halmaz **különbségén** mindazon elemek halmazát értjük, melyek elemei A -nak, de B -nek nem. Jele: $A \setminus B$.

Műveletek halmazokkal

Az A és B halmazok **unióján** mindazon elemek $A \cup B$ -vel jelölt halmazát értjük, melyek az A és B halmazok közül legalább az egyiknek elemei.

Az A és B halmazok **metszetén** mindazon elemek halmazát értjük amelyek A -nak is és B -nek is elemei. Jele: $A \cap B$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A -t és B -t **diszjunkt** halmazoknak nevezzük.

Az A és a B halmaz **különbségén** mindazon elemek halmazát értjük, melyek elemei A -nak, de B -nek nem. Jele: $A \setminus B$.

Legyen az X halmaznak az A részhalmaza. Az A halmaz X -re vonatkozó **komplementer** halmazán értjük az $X \setminus A$ halmazt. Jele: $\overline{A}$.

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

(1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

(1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),
- (4) ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$ és $A \cap B = A$,

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),
- (4) ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$ és $A \cap B = A$,
- (5) $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, és $\overline{\overline{A}} = A$,

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),
- (4) ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$ és $A \cap B = A$,
- (5) $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, és $\overline{\overline{A}} = A$,
- (6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morgan azonosságok)

Műveleti tulajdonságok

Legyenek az A , B , C halmazok az X halmaz részhalmazai.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás),
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asszociativitás),
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),
- (4) ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$ és $A \cap B = A$,
- (5) $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, és $\overline{\overline{A}} = A$,
- (6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morgan azonosságok)
- (7) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Az x és y elemekből készített **rendezett elempáron** egy olyan (x, y) szimbólumot értünk, melyre igaz, hogy $(x, y) = (u, v)$ pontosan akkor, ha $x = u$ és $y = v$. Ekkor x -et a rendezett elempár **első**, míg y -t a **második komponensének** nevezzük.

Az x és y elemekből készített **rendezett elempáron** egy olyan (x, y) szimbólumot értünk, melyre igaz, hogy $(x, y) = (u, v)$ pontosan akkor, ha $x = u$ és $y = v$. Ekkor x -et a rendezett elempár **első**, míg y -t a **második komponensének** nevezzük.

Az A és B halmaz **Descartes-szorzatának** nevezzük mindazon rendezett párok halmazát, melyek első komponense A -beli, második komponense B -beli elem. Jelölése: $A \times B$.

Az x és y elemekből készített **rendezett elempáron** egy olyan (x, y) szimbólumot értünk, melyre igaz, hogy $(x, y) = (u, v)$ pontosan akkor, ha $x = u$ és $y = v$. Ekkor x -et a rendezett elempár **első**, míg y -t a **második komponensének** nevezzük.

Az A és B halmaz **Descartes-szorzatának** nevezzük mindazon rendezett párok halmazát, melyek első komponense A -beli, második komponense B -beli elem. Jelölése: $A \times B$.

Legyenek A és B adott halmazok. Az $A \times B$ egy részhalmazát **(binér) relációnak** nevezzük. Ha $R \subset A \times B$, azaz binér reláció, akkor R egy (a, b) elemét általában az aRb formulával jelöljük, és úgy olvassuk, hogy a az R relációban áll b -vel (vagy az R reláció a -hoz hozzárendeli a b -t).

Az x és y elemekből készített **rendezett elempáron** egy olyan (x, y) szimbólumot értünk, melyre igaz, hogy $(x, y) = (u, v)$ pontosan akkor, ha $x = u$ és $y = v$. Ekkor x -et a rendezett elempár **első**, míg y -t a **második komponensének** nevezzük.

Az A és B halmaz **Descartes-szorzatának** nevezzük mindazon rendezett párok halmazát, melyek első komponense A -beli, második komponense B -beli elem. Jelölése: $A \times B$.

Legyenek A és B adott halmazok. Az $A \times B$ egy részhalmazát **(binér) relációnak** nevezzük. Ha $R \subset A \times B$, azaz binér reláció, akkor R egy (a, b) elemét általában az aRb formulával jelöljük, és úgy olvassuk, hogy a az R relációban áll b -vel (vagy az R reláció a -hoz hozzárendeli a b -t).

Egy adott R reláció esetén a relációbeli rendezett párok első komponenseinek a halmazát a reláció **értelmezési tartományának** ($\text{Dom } R$), a második komponensek halmazát a reláció **értékkészletének** ($\text{Rng } R$) nevezzük.

Az R **inverzének** nevezzük és R^{-1} -el jelöljük azt az $R^{-1} \subset B \times A$ relációt, amelyre $yR^{-1}x$ akkor és csak akkor teljesül, ha xRy .

Az R **inverzének** nevezzük és R^{-1} -el jelöljük azt az $R^{-1} \subset B \times A$ relációt, amelyre $yR^{-1}x$ akkor és csak akkor teljesül, ha xRy .

Legyenek A, B, C adott halmazok. Az $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ relációk **kompozícióján** azt a $G \circ F$ -fel jelölt relációt értjük, melynek az (x, z) rendezett elempár pontosan akkor eleme, ha $x \in A, z \in C$ és van olyan $y \in B$, hogy xFy és yGz .

Az R **inverzének** nevezzük és R^{-1} -el jelöljük azt az $R^{-1} \subset B \times A$ relációt, amelyre $yR^{-1}x$ akkor és csak akkor teljesül, ha xRy .

Legyenek A, B, C adott halmazok. Az $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ relációk **kompozícióján** azt a $G \circ F$ -fel jelölt relációt értjük, melynek az (x, z) rendezett elempár pontosan akkor eleme, ha $x \in A, z \in C$ és van olyan $y \in B$, hogy xFy és yGz .

Legyenek A és B adott halmazok, és f egy binér reláció A és B között. Ha az f olyan tulajdonságú, hogy minden A -beli x elemhez legfeljebb egy B -beli y elem létezik, amelyre xfy teljesül, akkor az f relációt **függvénynek** nevezzük (egyértelmű hozzárendelés). Ha f értelmezési tartománya az A halmaz, akkor az A halmazon értelmezett B -beli értékű függvényről beszélünk, és ezt $f: A \rightarrow B$ -vel jelöljük. Ha xfy , akkor azt mondjuk, hogy f az x -hez az y -t rendeli, és y egyértelműsége miatt y -t $f(x)$ -szel jelöljük és az f függvény **x -beli értékének** (vagy az x elem képének) nevezzük.

Az f függvény **invertálható**, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor az f^{-1} -et az f **inverz függvényének** nevezzük.

Az f függvény **invertálható**, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor az f^{-1} -et az f **inverz függvényének** nevezzük.

Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ kompozíciót **összetett függvénynek** nevezzük, az f -et **belső**, míg a g -t pedig **külső** függvénynek.

Az f függvény **invertálható**, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor az f^{-1} -et az f **inverz függvényének** nevezzük.

Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ kompozíciót **összetett függvénynek** nevezzük, az f -et **belső**, míg a g -t pedig **külső** függvénynek.

Legyen $f: A \rightarrow B$ egy függvény. Ha $\text{Rng}_f = B$, akkor f -et az A -t B -re képező függvénynek, vagy más szóval **szürjektív** függvénynek nevezzük.

Az f függvény **invertálható**, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor az f^{-1} -et az f **inverz függvényének** nevezzük.

Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ kompozíciót **összetett függvénynek** nevezzük, az f -et **belső**, míg a g -t pedig **külső** függvénynek.

Legyen $f: A \rightarrow B$ egy függvény. Ha $\text{Rng}_f = B$, akkor f -et az A -t B -re képző függvénynek, vagy más szóval **szürjektív** függvénynek nevezzük.

Ha pedig f olyan tulajdonságú, hogy különböző A -beli elemek képei is különböznek, akkor f -et **injektív**, vagy egyértelmű függvénynek nevezzük.

Az f függvény **invertálható**, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor az f^{-1} -et az f **inverz függvényének** nevezzük.

Legyen adott az f és g függvény. A $g \circ f$ kompozíciót **összetett függvénynek** nevezzük, az f -et **belső**, míg a g -t pedig **külső** függvénynek.

Legyen $f: A \rightarrow B$ egy függvény. Ha $\text{Rng}_f = B$, akkor f -et az A -t B -re képző függvénynek, vagy más szóval **szürjektív** függvénynek nevezzük.

Ha pedig f olyan tulajdonságú, hogy különböző A -beli elemek képei is különböznek, akkor f -et **injektív**, vagy egyértelmű függvénynek nevezzük.

Ha az f szürjektív is és injektív is, akkor az f függvényt **bijektívnek**, magyarul **kölcsönösen egyértelműnek** nevezzük.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B halmaz számosságánál, ha A egyenlő számosságú B valamely részhalmazával.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B halmaz számosságánál, ha A egyenlő számosságú B valamely részhalmazával.

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz kisebb számosságú, mint B , ha A kisebb vagy egyenlő számosságú, mint B , de nem egyenlő számosságúak.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B halmaz számosságánál, ha A egyenlő számosságú B valamely részhalmazával.

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz kisebb számosságú, mint B , ha A kisebb vagy egyenlő számosságú, mint B , de nem egyenlő számosságúak.

Azt mondjuk, hogy A végtelen halmaz, ha egyenlő számosságú valamely valódi részhalmazával. Az A halmazt véges halmaznak nevezzük, ha nem végtelen.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B halmaz számosságánál, ha A egyenlő számosságú B valamely részhalmazával.

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz kisebb számosságú, mint B , ha A kisebb vagy egyenlő számosságú, mint B , de nem egyenlő számosságúak.

Azt mondjuk, hogy A végtelen halmaz, ha egyenlő számosságú valamely valódi részhalmazával. Az A halmazt véges halmaznak nevezzük, ha nem végtelen.

Azt mondjuk, hogy egy halmaznak n eleme van, ha az egyenlő számosságú az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal.

Az A halmaz egyenlő számosságú a B halmazzal, ha A kölcsönösen egyértelműen leképezhető a B halmazra.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő a B halmaz számosságánál, ha A egyenlő számosságú B valamely részhalmazával.

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz kisebb számosságú, mint B , ha A kisebb vagy egyenlő számosságú, mint B , de nem egyenlő számosságúak.

Azt mondjuk, hogy A végtelen halmaz, ha egyenlő számosságú valamely valódi részhalmazával. Az A halmazt véges halmaznak nevezzük, ha nem végtelen.

Azt mondjuk, hogy egy halmaznak n eleme van, ha az egyenlő számosságú az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal.

Egy halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha egyenlő számosságú a pozitív egész számok halmazával.

Hilbert-szálloda: van egy szálloda, abban végtelen sok szoba és minden szoba foglalt. Mit tegyen a hotel vezetője ha

- egy új vendég érkezik;
- több új vendég érkezik;
- végtelen sok új vendég érkezik?

Hilbert-szálloda: van egy szálloda, abban végtelen sok szoba és minden szoba foglalt. Mit tegyen a hotel vezetője ha

- egy új vendég érkezik;
- több új vendég érkezik;
- végtelen sok új vendég érkezik?

Az egész számok halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen.

Hilbert-szálloda: van egy szálloda, abban végtelen sok szoba és minden szoba foglalt. Mit tegyen a hotel vezetője ha

- egy új vendég érkezik;
- több új vendég érkezik;
- végtelen sok új vendég érkezik?

Az egész számok halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen.

A racionális számok halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen (ld. Hilbert-szálloda: emeletráépítés).

Hilbert-szálloda: van egy szálloda, abban végtelen sok szoba és minden szoba foglalt. Mit tegyen a hotel vezetője ha

- egy új vendég érkezik;
- több új vendég érkezik;
- végtelen sok új vendég érkezik?

Az egész számok halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen.

A racionális számok halmazának számossága is megszámlálhatóan végtelen (ld. Hilbert-szálloda: emeletráépítés).

Valahol egy távoli galaxisban a lakosok nagyon szeretnek bizottságokba tömörülni. Minden lehetséges módon alkotnak egy bizottságot. Van olyan bizottság, amiben a galaxis összes lakója tag és olyan is van, melyben egyáltalán nincsenek tagok (ebben a bizottságban bizonyára nem kerül sor éles vitára). A galaxis egy jegyzője elhatározta, hogy számba veszi a bizottságokat és úgy döntött, elnevezi őket a galaxis lakóiról. Végére érhet-e a jegyző ennek a munkának, vagy akárhogy is igyekszik, nem tud minden bizottságnak nevet adni? (*Raymond Smullyan*)

Valahol egy távoli galaxisban a lakosok nagyon szeretnek bizottságokba tömörülni. Minden lehetséges módon alkotnak egy bizottságot. Van olyan bizottság, amiben a galaxis összes lakója tag és olyan is van, melyben egyáltalán nincsenek tagok (ebben a bizottságban bizonyára nem kerül sor éles vitára). A galaxis egy jegyzője elhatározta, hogy számba veszi a bizottságokat és úgy döntött, elnevezi őket a galaxis lakóiról. Végére érhet-e a jegyző ennek a munkának, vagy akárhogy is igyekszik, nem tud minden bizottságnak nevet adni? (*Raymond Smullyan*)

Minden halmaz számosságánál nagyobb a részhalmazainak a számossága.

A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen számosságú.
A valós számok halmazát és a vele egyenlő számosságú halmazokat **kontinuum számosságú halmazoknak** nevezzük.

A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen számosságú. A valós számok halmazát és a vele egyenlő számosságú halmazokat **kontinuum számosságú halmazoknak** nevezzük.

Kontinuum hipotézis: Van-e a valós számoknak olyan részhalmaza, melyek számossága nagyobb mint a természetes számoké, de kisebb, mint a valós számoké?

Korlátos halmazok

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- **H alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$ esetén $x \geq k$ teljesül. Ekkor k -t a H **alsó korlátjának** nevezzük.

Korlátos halmazok

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- **H alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$ esetén $x \geq k$ teljesül. Ekkor k -t a H **alsó korlátjának** nevezzük.
- **H felülről korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$ esetén $x \leq k$ teljesül. Ekkor k -t a H **felső korlátjának** nevezzük.

Korlátos halmazok

Legyen $H \subset \mathbb{R}$.

- H **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$ esetén $x \geq k$ teljesül. Ekkor k -t a H **alsó korlátjának** nevezzük.
- H **felülről korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$ esetén $x \leq k$ teljesül. Ekkor k -t a H **felső korlátjának** nevezzük.
- H **korlátos**, ha alulról is és felülről is korlátos.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, úgy $\alpha \in \mathbb{R}$ **pontos alsó korlátja H -nak**, ha alsó korlátja H -nak, és a H minden alsó korlátjánál nagyobb vagy egyenlő. Jele: $\inf H$.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, úgy $\alpha \in \mathbb{R}$ **pontos alsó korlátja H -nak**, ha alsó korlátja H -nak, és a H minden alsó korlátjánál nagyobb vagy egyenlő. Jele: $\inf H$.

Ha H alulról nem korlátos, akkor az H **pontos alsó korlátja**: $\inf H = -\infty$.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, úgy $\alpha \in \mathbb{R}$ **pontos alsó korlátja H -nak**, ha alsó korlátja H -nak, és a H minden alsó korlátjánál nagyobb vagy egyenlő. Jele: $\inf H$.

Ha H alulról nem korlátos, akkor az H **pontos alsó korlátja**: $\inf H = -\infty$.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor $\beta \in \mathbb{R}$ **pontos felső korlátja H -nak**, ha felső korlátja H -nak, és a H minden felső korlátjánál kisebb vagy egyenlő. A H pontos felső korlátját $\sup H$ -val jelöljük.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, úgy $\alpha \in \mathbb{R}$ **pontos alsó korlátja H -nak**, ha alsó korlátja H -nak, és a H minden alsó korlátjánál nagyobb vagy egyenlő. Jele: $\inf H$.

Ha H alulról nem korlátos, akkor az H **pontos alsó korlátja**: $\inf H = -\infty$.

Ha $H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor $\beta \in \mathbb{R}$ **pontos felső korlátja H -nak**, ha felső korlátja H -nak, és a H minden felső korlátjánál kisebb vagy egyenlő. A H pontos felső korlátját $\sup H$ -val jelöljük.

Ha H felülről nem korlátos, akkor a H **pontos felső korlátja**: $\sup H = +\infty$.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, továbbá

$$]a, b[= \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ és } a < x < b \},$$

$$[a, b[:= \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ és } a \leq x < b \},$$

$$]a, b] := \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ és } a < x \leq b \},$$

$$[a, b] := \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ és } a \leq x \leq b \}.$$

$]a, b[$ -t **nyílt intervallumnak**, $[a, b[$ -t és $]a, b]$ -t **félig nyílt** (vagy **félig zárt**) **intervallumnak**, $[a, b]$ -t **zárt intervallumnak**, a -t és b -t pedig ezen intervallumok **végpontjainak** nevezzük.

Egy függvényt **valós függvénynek** nevezünk, ha értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok egy-egy részhalmaza. Az $(x, f(x))$ rendezett elempárok halmazát a **függvény gráfjának** nevezzük.

Egy függvényt **valós függvénynek** nevezünk, ha értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok egy-egy részhalmaza. Az $(x, f(x))$ rendezett elempárok halmazát a **függvény gráfjának** nevezzük.

Egy valós függvényt **korlátosnak** nevezünk, ha értékkészlete korlátos halmaz.

Egy függvényt **valós függvénynek** nevezünk, ha értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok egy-egy részhalmaza. Az $(x, f(x))$ rendezett elempárok halmazát a **függvény gráfjának** nevezzük.

Egy valós függvényt **korlátosnak** nevezünk, ha értékkészlete korlátos halmaz.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$.

- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.

Egy függvényt **valós függvénynek** nevezünk, ha értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok egy-egy részhalmaza. Az $(x, f(x))$ rendezett elempárok halmazát a **függvény gráfjának** nevezzük.

Egy valós függvényt **korlátosnak** nevezünk, ha értékkészlete korlátos halmaz.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$.

- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.
- Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = -f(x)$.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Az f függvényt **monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Az f függvényt **monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Az f függvényt **monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Az f függvényt **monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.
- Az f függvény **monoton** H_1 -en, ha ott monoton növekvő vagy monoton csökkenő.

Valós függvények monotonitása és szélsőértékei

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvényt **monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Az f függvényt **monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton növekvőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
- Az f függvényt **szigorúan monoton csökkenőnek** nevezzük H_1 -en, ha minden $x_1, x_2 \in H_1$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.
- Az f függvény **monoton** H_1 -en, ha ott monoton növekvő vagy monoton csökkenő.
- Az f függvény **szigorúan monoton** H_1 -en, ha ott szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 pontban **helyi maximuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 pontban **helyi maximuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút minimuma** van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 pontban **helyi maximuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút minimuma** van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút maximuma** van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 pontban **helyi maximuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút minimuma** van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút maximuma** van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi szélsőértéke** van, ha ott helyi minimuma vagy helyi maximuma van.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$.

- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi minimuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 pontban **helyi maximuma** van, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút minimuma** van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút maximuma** van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in H$ esetén.
- Az f függvénynek x_0 -ban **helyi szélsőértéke** van, ha ott helyi minimuma vagy helyi maximuma van.
- Az f függvénynek x_0 -ban **abszolút szélsőértéke** van, ha ott abszolút minimuma vagy abszolút maximuma van.

Konvex és konkáv függvények (Csak szemléletesen...)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$. Ha az f grafikonjának az $\langle a, b \rangle \subseteq H$ intervallum feletti darabja az intervallum bármely pontjában a függvény görbéjéhez húzott érintő felett halad, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény konvex az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, míg a fordított esetben **konkáv**.

Konvex és konkáv függvények (Csak szemléletesen...)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$. Ha az f grafikonjának az $\langle a, b \rangle \subseteq H$ intervallum feletti darabja az intervallum bármely pontjában a függvény görbéjéhez húzott érintő felett halad, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény konvex az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, míg a fordított esetben **konkáv**.

Az $x_0 \in H$ **inflexiós helye** f -nek, ha van olyan $r > 0$, hogy f konvex az $]x_0 - r, x_0]$ intervallumon és konkáv az $[x_0, x_0 + r[$ intervallumon vagy fordítva.

Valós számsorozatok

Egy valós függvényt **valós számsorozatnak** nevezünk, ha értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az n pozitív egész képét a_n -nel jelöljük, melyet a sorozat **n -edik tagjának** nevezzük. Ezt a sorozatot $\langle a_n \rangle$ -nel, értékkészletét $\{a_n\}$ -nel jelöljük.

Valós számsorozatok

Egy valós függvényt **valós számsorozatnak** nevezünk, ha értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az n pozitív egész képét a_n -nel jelöljük, melyet a sorozat **n -edik tagjának** nevezzük. Ezt a sorozatot $\langle a_n \rangle$ -nel, értékkészletét $\{a_n\}$ -nel jelöljük.

Legyen $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat. A $\langle b_n \rangle$ valós számsorozatot az $\langle a_n \rangle$ **részsorozatának** nevezzük, ha az eredeti sorozatból úgy kaptuk, hogy tagjai közül végtelen sokat kiválasztottunk abban a sorrendben, amely sorrendben ezek a tagok az eredeti sorozatban szerepeltek.

Informálisan: azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha a sorozat „nagy indexű” tagjai „közel vannak” A -hoz.

Informálisan: azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha a sorozat „nagy indexű” tagjai „közel vannak” A -hoz.

- „közel vannak” jelentése: bármilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ esetén a sorozat „nagy indexű” tagjai az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumban vannak.

Informálisan: azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha a sorozat „nagy indexű” tagjai „közel vannak” A -hoz.

- „közel vannak” jelentése: bármilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ esetén a sorozat „nagy indexű” tagjai az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumban vannak.
- „nagy indexű” jelentése: ha ε adott, akkor egy jól meghatározható $N(\varepsilon)$ -nál (ε -hoz tartozó küszöbszám) nagyobb indexű.

Informálisan: azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha a sorozat „nagy indexű” tagjai „közel vannak” A -hoz.

- „közel vannak” jelentése: bármilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ esetén a sorozat „nagy indexű” tagjai az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumban vannak.
- „nagy indexű” jelentése: ha ε adott, akkor egy jól meghatározható $N(\varepsilon)$ -nál (ε -hoz tartozó küszöbszám) nagyobb indexű.

Formálisan: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan A valós szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén a_n eleme az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumnak.

Informálisan: azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha a sorozat „nagy indexű” tagjai „közel vannak” A -hoz.

- „közel vannak” jelentése: bármilyen (kicsi) $\varepsilon > 0$ esetén a sorozat „nagy indexű” tagjai az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumban vannak.
- „nagy indexű” jelentése: ha ε adott, akkor egy jól meghatározható $N(\varepsilon)$ -nál (ε -hoz tartozó küszöbszám) nagyobb indexű.

Formálisan: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan A valós szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy minden $n > N(\varepsilon)$ esetén a_n eleme az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumnak.

Ekkor az A számot az $\langle a_n \rangle$ sorozat **határértékének** nevezzük, és a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ (vagy az $a_n \rightarrow A$) jelölést használjuk. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy $\langle a_n \rangle$ **A -hoz konvergál.**

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

$\langle a_n \rangle$ **divergens**, ha nem konvergens.

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

$\langle a_n \rangle$ **divergens**, ha nem konvergens.

Alaptételek:

- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

$\langle a_n \rangle$ **divergens**, ha nem konvergens.

Alaptételek:

- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.
- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és A -hoz konvergál, akkor minden részsorozata konvergens, és A -hoz konvergál.

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

$\langle a_n \rangle$ **divergens**, ha nem konvergens.

Alaptételek:

- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.
- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és A -hoz konvergál, akkor minden részsorozata konvergens, és A -hoz konvergál.
- Ha $\langle a_n \rangle$ monoton és korlátos, akkor konvergens. Sőt, monoton növekvő korlátos sorozat az értékkészlete pontos felső korlátjához konvergál, illetve monoton csökkenő korlátos sorozat az értékkészlete pontos alsó korlátjához konvergál.

Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és 0-hoz konvergál, akkor $\langle a_n \rangle$ -et **nullsorozatnak** nevezzük.

$\langle a_n \rangle$ **divergens**, ha nem konvergens.

Alaptételek:

- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.
- Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, és A -hoz konvergál, akkor minden részsorozata konvergens, és A -hoz konvergál.
- Ha $\langle a_n \rangle$ monoton és korlátos, akkor konvergens. Sőt, monoton növekvő korlátos sorozat az értékkészlete pontos felső korlátjához konvergál, illetve monoton csökkenő korlátos sorozat az értékkészlete pontos alsó korlátjához konvergál.
- **Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.** Ha az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$.

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.

Rendőr-tétel. Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$ és a $\langle b_n \rangle$ konvergens valós számsorozatok határértéke ugyanaz az A valós szám. Ha a $\langle c_n \rangle$ valós számsorozatra $a_n \leq c_n \leq b_n$ teljesül véges sok kivételtől eltekintve, akkor $\langle c_n \rangle$ konvergens, és

$$c_n \rightarrow A.$$

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot A$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$.
- Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.

Rendőr-tétel. Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$ és a $\langle b_n \rangle$ konvergens valós számsorozatok határértéke ugyanaz az A valós szám. Ha a $\langle c_n \rangle$ valós számsorozatra $a_n \leq c_n \leq b_n$ teljesül véges sok kivételtől eltekintve, akkor $\langle c_n \rangle$ konvergens, és

$$c_n \rightarrow A.$$

Egy korlátos sorozat szorzata egy nullsorozattal nullsorozat.

Azt mondjuk, hogy

- (1) $\langle a_n \rangle$ **$+\infty$ -hez divergál**, ha minden K valós számhoz van olyan $N(K)$ valós szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N(K)$ esetén $a_n > K$. Ezt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, vagy $a_n \rightarrow +\infty$ módon jelöljük.

Azt mondjuk, hogy

- (1) $\langle a_n \rangle$ **$+\infty$ -hez divergál**, ha minden K valós számhoz van olyan $N(K)$ valós szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N(K)$ esetén $a_n > K$. Ezt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, vagy $a_n \rightarrow +\infty$ módon jelöljük.
- (2) $\langle a_n \rangle$ **$-\infty$ -hez divergál**, ha minden K valós számhoz van olyan $N(K)$ valós szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N(K)$ esetén $a_n < K$. Ezt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, vagy $a_n \rightarrow -\infty$ módon jelöljük.

Legyen $\langle a_n \rangle$ nullsorozat, és $a_n \neq 0$ minden n pozitív egész esetén.
Ekkor

- ha $a_n > 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle +\infty$ -hez divergál,

Legyen $\langle a_n \rangle$ nullsorozat, és $a_n \neq 0$ minden n pozitív egész esetén.
Ekkor

- ha $a_n > 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle +\infty$ -hez divergál,
- ha $a_n < 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle -\infty$ -hez divergál.

Legyen $\langle a_n \rangle$ nullsorozat, és $a_n \neq 0$ minden n pozitív egész esetén. Ekkor

- ha $a_n > 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ $+\infty$ -hez divergál,
- ha $a_n < 0$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ $-\infty$ -hez divergál.

Az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ halmazt a **valós számok kibővített halmazának** nevezzük. Ebben a halmazban $-\infty < +\infty$, és minden x valós számra $-\infty < x < +\infty$ teljesül.

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$ és
 $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$ és
 $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

- ha $x > 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$ és $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

- ha $x > 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

- ha $x < 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty,$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$ és $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

- ha $x > 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

- ha $x < 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty,$$

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ és $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$ és
 $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,

- ha $x > 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

- ha $x < 0$, úgy

$$x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \text{ és } x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty,$$

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ és $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

A $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$, $(+\infty)0$, $(-\infty)0$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ szimbólumokat nem értelmezzük.

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

Nevezetes határértékek:

- (1) Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a_n = q^n$ (mértani sorozat). Ekkor
- $q > 1$ esetén $a_n \rightarrow +\infty$.

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

Nevezetes határértékek:

(1) Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a_n = q^n$ (mértani sorozat). Ekkor

- $q > 1$ esetén $a_n \rightarrow +\infty$.
- $q = 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ konvergens és $a_n \rightarrow 1$,

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

Nevezetes határértékek:

(1) Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a_n = q^n$ (mértani sorozat). Ekkor

- $q > 1$ esetén $a_n \rightarrow +\infty$.
- $q = 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ konvergens és $a_n \rightarrow 1$,
- $|q| < 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ nullsorozat,

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

Nevezetes határértékek:

(1) Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a_n = q^n$ (mértani sorozat). Ekkor

- $q > 1$ esetén $a_n \rightarrow +\infty$.
- $q = 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ konvergens és $a_n \rightarrow 1$,
- $|q| < 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ nullsorozat,
- $q \leq -1$ esetén $\langle a_n \rangle$ divergens.

A **határátmeneti szabályok** ezek alapján újragondolhatók. Például igaz, hogy

- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- ha $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$;
- $\vdots$

Nevezetes határértékek:

(1) Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a_n = q^n$ (mértani sorozat). Ekkor

- $q > 1$ esetén $a_n \rightarrow +\infty$.
- $q = 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ konvergens és $a_n \rightarrow 1$,
- $|q| < 1$ esetén $\langle a_n \rangle$ nullsorozat,
- $q \leq -1$ esetén $\langle a_n \rangle$ divergens.

Példa. Egy populáció kezdetben n_0 számú egyedet tartalmaz, és évről évre q szorosára növekszik az egyedszám. Lehetséges-e, hogy a populáció egyedszáma az eredeti kétszerese körül stabilizálódik?

(2) Minden a pozitív való szám esetén az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(2) Minden a pozitív való szám esetén az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(3) Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(2) Minden a pozitív való szám esetén az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(3) Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(4) Az $a_n = \sqrt[n]{n!}$ sorozat $+\infty$ -hez divergál.

(2) Minden a pozitív való szám esetén az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(3) Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(4) Az $a_n = \sqrt[n]{n!}$ sorozat $+\infty$ -hez divergál.

(5) Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens. A határértékét e -vel jelöljük. $e \approx 2,71$

(2) Minden a pozitív való szám esetén az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(3) Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(4) Az $a_n = \sqrt[n]{n!}$ sorozat $+\infty$ -hez divergál.

(5) Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens. A határértékét e -vel jelöljük. $e \approx 2,71$

(6) Az $a_n = \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n$ sorozat konvergens és határértéke e^b .

Valós számsorok

Legyen adott az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot az $\langle a_n \rangle$ tagjaiból képzett **valós számsornak** nevezzük, és $\sum_1^\infty a_n$ -nel jelöljük. s_n -et a sor n -**edik részletösszegének** nevezzük.

Valós számsorok

Legyen adott az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot az $\langle a_n \rangle$ tagjaiból képzett **valós számsornak** nevezzük, és $\sum_1^\infty a_n$ -nel jelöljük. s_n -et a sor **n -edik részletösszegének** nevezzük.

- A $\sum_1^\infty a_n$ sort **konvergensnek** mondjuk, ha az $\langle s_n \rangle$ sorozat konvergens, **divergensnek**, ha $\langle s_n \rangle$ divergens.

Valós számsorok

Legyen adott az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot az $\langle a_n \rangle$ tagjaiból képzett **valós számsornak** nevezzük, és $\sum_1^\infty a_n$ -nel jelöljük. s_n -et a sor **n -edik részletösszegének** nevezzük.

- A $\sum_1^\infty a_n$ sort **konvergensnek** mondjuk, ha az $\langle s_n \rangle$ sorozat konvergens, **divergensnek**, ha $\langle s_n \rangle$ divergens.
- Ha $s_n \rightarrow A$, ahol $A \in \mathbb{R}_b$, akkor A -t a sor **összegének** nevezzük, melyre a $\sum_{n=1}^\infty a_n = A$ jelölést használjuk.

Valós számsorok

Legyen adott az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot az $\langle a_n \rangle$ tagjaiból képzett **valós számsornak** nevezzük, és $\sum_1^\infty a_n$ -nel jelöljük. s_n -et a sor **n -edik részletösszegének** nevezzük.

- A $\sum_1^\infty a_n$ sort **konvergensnek** mondjuk, ha az $\langle s_n \rangle$ sorozat konvergens, **divergensnek**, ha $\langle s_n \rangle$ divergens.
- Ha $s_n \rightarrow A$, ahol $A \in \mathbb{R}_b$, akkor A -t a sor **összegének** nevezzük, melyre a $\sum_{n=1}^\infty a_n = A$ jelölést használjuk.
- A $\sum_1^\infty a_n$ sort **abszolút konvergensnek** mondjuk, ha a $\sum_1^\infty |a_n|$ sor konvergens.

A mértani sor összege

Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

.

A mértani sor összege

Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

Példa. Az uralkodó, akinek a feltaláló átadta a sakkot, igen elégedett volt. A feltaláló kérhetett bármit. Mire azzal a furcsa kéréssel fordult az uralkodóhoz, hogy csak egy kis búzát kér: a sakktábla első kockájára kér egy szemet, a másokra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább.

A mértani sor összege

Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

Példa. Az uralkodó, akinek a feltaláló átadta a sakkot, igen elégedett volt. A feltaláló kérhetett bármit. Mire azzal a furcsa kéréssel fordult az uralkodóhoz, hogy csak egy kis búzát kér: a sakktábla első kockájára kér egy szemet, a másikkra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább.

Ez pontosan

18.446.744.073.709.551.615

db szem.

„Teleszkopikus” sorok

Határozzuk meg a

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sor összegét!

„Teleszkopikus” sorok

Határozzuk meg a

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sor összegét!

Alaptételek

- Ha $\sum_1^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\langle a_n \rangle$ nullsorozat.
- Ha $\sum_1^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens.

Legyenek $\sum_1^{\infty} a_n$ és $\sum_1^{\infty} b_n$ adott valós számsorok, melyekre

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül véges sok n pozitív egész kivételével.

Legyenek $\sum_1^{\infty} a_n$ és $\sum_1^{\infty} b_n$ adott valós számsorok, melyekre

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül véges sok n pozitív egész kivételével.

- **(Majoránskritérium.)** Ha $\sum_1^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_1^{\infty} a_n$ is konvergens.

Legyenek $\sum_1^{\infty} a_n$ és $\sum_1^{\infty} b_n$ adott valós számsorok, melyekre

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül véges sok n pozitív egész kivételével.

- **(Majoránskritérium.)** Ha $\sum_1^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_1^{\infty} a_n$ is konvergens.
- **(Minoránskritérium)** Ha $\sum_1^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_1^{\infty} b_n$ is divergens.

Legyenek $\sum_1^{\infty} a_n$ és $\sum_1^{\infty} b_n$ adott valós számsorok, melyekre

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül véges sok n pozitív egész kivételével.

- **(Majoránskritérium.)** Ha $\sum_1^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_1^{\infty} a_n$ is konvergens.
- **(Minoránskritérium)** Ha $\sum_1^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_1^{\infty} b_n$ is divergens.

Példa. Mutassuk meg, hogy a $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ úgynevezett harmonikus sor divergens.

Cauchy-féle gyökkritérium

Az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

esetén abszolút konvergens,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

esetén pedig divergens.

Cauchy-féle gyökkritérium

Az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

esetén abszolút konvergens,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

esetén pedig divergens.

Példa. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

sor?

D'Alembert-féle hányadoskritérium

Legyen $\sum_1^{\infty} a_n$ adott valós számsor és $a_n \neq 0$ minden n pozitív egészre.

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

akkor a sor abszolút konvergens, míg ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

akkor a sor divergens.

D'Alembert-féle hányadoskritérium

Legyen $\sum_1^{\infty} a_n$ adott valós számsor és $a_n \neq 0$ minden n pozitív egészre.

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

akkor a sor abszolút konvergens, míg ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

akkor a sor divergens.

Példa. Konvergens-e a

$$\sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

sor?

Példa. Egy hibás gén minden egyed esetén $p < 1$ valószínűséggel jut el a következő generációba, $1 - p$ valószínűséggel pedig kiküszöbölődik a populációból oly módon, hogy letalitásra vezet. Valószínűségszámítási megfontolások szerint a gén átlagosan

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}(1-p)$$

-edik populációban tűnik el. Mikor is?

Példa. Egy hibás gén minden egyed esetén $p < 1$ valószínűséggel jut el a következő generációba, $1 - p$ valószínűséggel pedig kiküszöbölődik a populációból oly módon, hogy letalitásra vezet. Valószínűségszámítási megfontolások szerint a gén átlagosan

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}(1-p)$$

-edik populációban tűnik el. Mikor is?

Leibniz-kritérium

Ha $\langle a_n \rangle$ monoton csökkenő nullsorozat, akkor a

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

sor konvergens.

Példa. Az eddigiek alapján látható, hogy a

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

Valós függvények határértéke és folytonossága

Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

- $x_0 \in \mathbb{R}$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r > 0$ esetén az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallum tartalmaz x_0 -tól különböző H -beli elemet.

Valós függvények határértéke és folytonossága

Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

- $x_0 \in \mathbb{R}$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r > 0$ esetén az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallum tartalmaz x_0 -tól különböző H -beli elemet.
- $+\infty$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r \in \mathbb{R}$ esetén az $]r, +\infty[$ intervallum tartalmaz H -beli elemet, azaz ha H felülről nem korlátos halmaz.

Valós függvények határértéke és folytonossága

Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

- $x_0 \in \mathbb{R}$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r > 0$ esetén az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallum tartalmaz x_0 -tól különböző H -beli elemet.
- $+\infty$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r \in \mathbb{R}$ esetén az $]r, +\infty[$ intervallum tartalmaz H -beli elemet, azaz ha H felülről nem korlátos halmaz.
- A $-\infty$ **torlódási pontja** H -nak, ha minden $r \in \mathbb{R}$ esetén az $] -\infty, r[$ intervallum tartalmaz H -beli elemet, azaz ha H alulról nem korlátos halmaz.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Mivel a függvények határértékét sorozatok határértéke segítségével definiáltuk, belátható, hogy a függvények határértéke ugyanolyan viszonyban van a műveletekkel, mint a sorozatoké.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Mivel a függvények határértékét sorozatok határértéke segítségével definiáltuk, belátható, hogy a függvények határértéke ugyanolyan viszonyban van a műveletekkel, mint a sorozatoké.

Példa végtelenben vett határértékre

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0;$

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Mivel a függvények határértékét sorozatok határértéke segítségével definiáltuk, belátható, hogy a függvények határértéke ugyanolyan viszonyban van a műveletekkel, mint a sorozatoké.

Példa végtelenben vett határértékre

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$;
- Polinomok határértéke.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Mivel a függvények határértékét sorozatok határértéke segítségével definiáltuk, belátható, hogy a függvények határértéke ugyanolyan viszonyban van a műveletekkel, mint a sorozatoké.

Példa végtelenben vett határértékre

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$;
- Polinomok határértéke.
- Racionális törtfüggvények határértéke.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontja H -nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek nem tagja x_0 , és $x_n \rightarrow x_0$, az teljesül, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Mivel a függvények határértékét sorozatok határértéke segítségével definiáltuk, belátható, hogy a függvények határértéke ugyanolyan viszonyban van a műveletekkel, mint a sorozatoké.

Példa végtelenben vett határértékre

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$;
- Polinomok határértéke.
- Racionális törtfüggvények határértéke.
- Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$) exponenciális függvény határértéke.

Példa véges helyen vett határértékre

Legyen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \neq 1; \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Példa véges helyen vett határértékre

Legyen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \neq 1; \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

Példa véges helyen vett határértékre

Legyen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \neq 1; \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek a 0 pontban nem **létezik határértéke**.

Példa véges helyen vett határértékre

Legyen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \neq 1; \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek a 0 pontban nem **létezik határértéke**.

Valóban, ha $\langle x_n \rangle$ pozitív, $\langle y_n \rangle$ pedig negatív tagú nullsorozatok, úgy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

Egyoldali határérték

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $H \cap]-\infty, x_0[$ halmaznak. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **baloldali határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden x_0 -hoz konvergáló olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek tagjai kisebbek, mint x_0 , az $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Egyoldali határérték

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $H \cap]-\infty, x_0[$ halmaznak. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **baloldali határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden x_0 -hoz konvergáló olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek tagjai kisebbek, mint x_0 , az $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Hasonlóan értelmezhető az f x_0 -beli **jobboldali határértéke**, melyet $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ jelöl.

Egyoldali határérték

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $H \cap]-\infty, x_0[$ halmaznak. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **baloldali határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden x_0 -hoz konvergáló olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek tagjai kisebbek, mint x_0 , az $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Hasonlóan értelmezhető az f x_0 -beli **jobboldali határértéke**, melyet $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ jelöl.

Az előbb beláttuk: $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Egyoldali határérték

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $H \cap]-\infty, x_0[$ halmaznak. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a **baloldali határértéke** $A \in \mathbb{R}_b$, ha minden x_0 -hoz konvergáló olyan H -beli értékű $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén, melynek tagjai kisebbek, mint x_0 , az $f(x_n) \rightarrow A$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Hasonlóan értelmezhető az f x_0 -beli **jobboldali határértéke**, melyet $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ jelöl.

Az előbb beláttuk: $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Ha az f függvénynek az x_0 -beli bal- és jobboldali határértéke is $A \in \mathbb{R}_b$ akkor f -nek x_0 -beli határértéke is A . Amennyiben f x_0 -beli bal- és jobboldali határértéke is létezik, de különböznek, akkor f -nek nem létezik határértéke x_0 -ban.

Folytonosság

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$. Az f függvény **folytonos** az x_0 pontban, ha minden x_0 -hoz konvergáló $\langle x_n \rangle$ H -beli értékű sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Az x_0 **szakadási helye** f -nek ha f nem folytonos x_0 -ban.

Folytonosság

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$. Az f függvény **folytonos** az x_0 pontban, ha minden x_0 -hoz konvergáló $\langle x_n \rangle$ H -beli értékű sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Az x_0 **szakadási helye** f -nek ha f nem folytonos x_0 -ban.

A jobb, illetve bal oldali határértékhez hasonlóan definiálható jobb, illetve bal oldali folytonosság is.

Folytonosság

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in H$. Az f függvény **folytonos** az x_0 pontban, ha minden x_0 -hoz konvergáló $\langle x_n \rangle$ H -beli értékű sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. Az x_0 **szakadási helye** f -nek ha f nem folytonos x_0 -ban.

A jobb, illetve bal oldali határértékhez hasonlóan definiálható jobb, illetve bal oldali folytonosság is.

Vizsgáljuk most az alábbi függvények folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \neq 1; \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ torlódási pontja H -nak. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos x_0 -ban, ha ott létezik határértéke, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ torlódási pontja H -nak. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos x_0 -ban, ha ott létezik határértéke, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$. f **folytonos** H_1 -en, ha a H_1 minden pontjában folytonos. f **folytonos**, ha folytonos H -n.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ torlódási pontja H -nak. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos x_0 -ban, ha ott létezik határértéke, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$. f **folytonos** H_1 -en, ha a H_1 minden pontjában folytonos. f **folytonos**, ha folytonos H -n.

A folytonosság kapcsolata a műveletekkel ugyanaz mint a sorozatok határértékének.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ torlódási pontja H -nak. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos x_0 -ban, ha ott létezik határértéke, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$. f **folytonos** H_1 -en, ha a H_1 minden pontjában folytonos. f **folytonos**, ha folytonos H -n.

A folytonosság kapcsolata a műveletekkel ugyanaz mint a sorozatok határértékének.

Bolzano-tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ha f folytonos, és $f(a) \neq f(b)$, akkor minden olyan λ valós számhoz, amely az $f(a)$ és az $f(b)$ által meghatározott nyílt intervallumban van, létezik olyan $x_0 \in]a, b[$, amelyre $f(x_0) = \lambda$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ torlódási pontja H -nak. Az f függvény akkor és csak akkor folytonos x_0 -ban, ha ott létezik határértéke, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$. f **folytonos** H_1 -en, ha a H_1 minden pontjában folytonos. f **folytonos**, ha folytonos H -n.

A folytonosság kapcsolata a műveletekkel ugyanaz mint a sorozatok határértékének.

Bolzano-tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ha f folytonos, és $f(a) \neq f(b)$, akkor minden olyan λ valós számhoz, amely az $f(a)$ és az $f(b)$ által meghatározott nyílt intervallumban van, létezik olyan $x_0 \in]a, b[$, amelyre $f(x_0) = \lambda$.

Példa. Egyenletek megoldása.

Differenciálszámítás

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és

$$\varphi: H \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ha x_0 belső pontja H -nak (azaz H tartalmaz egy x_0 középpontú nyílt intervallumot), és φ -nek x_0 -ban létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f **differenciálható x_0 -ban**. Az $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ valós számot az f x_0 -**beli differenciálhányadosának** nevezzük, és az

$$f'(x_0) = A$$

jelölést használjuk.

Differenciálszámítás

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és

$$\varphi: H \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ha x_0 belső pontja H -nak (azaz H tartalmaz egy x_0 középpontú nyílt intervallumot), és φ -nek x_0 -ban létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f **differenciálható x_0 -ban**. Az $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ valós számot az f x_0 -beli **differenciálhányadosának** nevezzük, és az

$$f'(x_0) = A$$

jelölést használjuk.

A φ függvényt az f x_0 -hoz tartozó **differenciahányados-függvényének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő $f'(x_0)$ meredekségű egyenest az f függvény gráfjának adott pontjához húzott **érintőjének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő $f'(x_0)$ meredekségű egyenest az f függvény gráfjának adott pontjához húzott **érintőjének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő $f'(x_0)$ meredekségű egyenest az f függvény gráfjának adott pontjához húzott **érintőjének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Példa.

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

Deriválási szabályok

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő $f'(x_0)$ meredekségű egyenest az f függvény gráfjának adott pontjához húzott **érintőjének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Példa.

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

Deriválási szabályok

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő $f'(x_0)$ meredekségű egyenest az f függvény gráfjának adott pontjához húzott **érintőjének** nevezzük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Példa.

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

Deriválási szabályok

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

- ha $0 \notin R_g$,akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

- ha $0 \notin R_g$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Összetett függvény: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

- ha $0 \notin R_g$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Összetett függvény: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvény **differenciálható a H_1 halmazon**, ha f a H_1 minden pontjában differenciálható. Az f függvény **differenciálható**, ha f differenciálható H -n.

- ha $0 \notin R_g$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Összetett függvény: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$.

- Az f függvény **differenciálható a H_1 halmazon**, ha f a H_1 minden pontjában differenciálható. Az f függvény **differenciálható**, ha f differenciálható H -n.

- Ha

$$H_2 = \{ x : x \in H \text{ és } f \text{ differenciálható } x\text{-ben} \}$$

nem üres halmaz, akkor a $g: H_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$ függvényt az f **differenciálhányados függvényének** vagy **deriváltjának** nevezzük, és f' -vel jelöljük.

Alapderiváltak

- Ha $a \in \mathbb{R}^+$, és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = a^x \ln a$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $a = e$ esetben $f'(x) = e^x$.

Alapderiváltak

- Ha $a \in \mathbb{R}^+$, és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = a^x \ln a$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $a = e$ esetben $f'(x) = e^x$.
- Az a alapú *logaritmus* függvény differenciálható, és

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Az $a = e$ esetben $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Alapderiváltak

- Ha $a \in \mathbb{R}^+$, és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = a^x \ln a$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $a = e$ esetben $f'(x) = e^x$.

- Az a alapú *logaritmus* függvény differenciálható, és

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Az $a = e$ esetben $\ln' x = \frac{1}{x}$.

- Ha $a \in \mathbb{R}$, és $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = ax^{a-1}$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén.

Alapderiváltak

- Ha $a \in \mathbb{R}^+$, és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = a^x \ln a$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $a = e$ esetben $f'(x) = e^x$.

- Az a alapú logaritmus függvény differenciálható, és

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Az $a = e$ esetben $\ln' x = \frac{1}{x}$.

- Ha $a \in \mathbb{R}$, és $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, akkor f differenciálható, és $f'(x) = ax^{a-1}$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén.

- A *sinus* és a *cosinus* függvény differenciálható, továbbá

$$\sin' x = \cos x \quad \text{és} \quad \cos' x = -\sin x$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

L'Hospital-szabály (Csak a dallama...)

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az f és g differenciálható, továbbá az f'/g' függvénynek x_0 -ban (tágabb értelemben) létezik határértéke, és egyenlő az A -val. Ekkor, ha f -nek és g -nek x_0 -ban létezik határértéke, és mindkettő 0, vagy ha a $|g|$ függvény határértéke x_0 -ban $+\infty$, úgy az f/g függvénynek is létezik határértéke x_0 -ban, és egyenlő A -val.

L'Hospital-szabály (Csak a dallama...)

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az f és g differenciálható, továbbá az f'/g' függvénynek x_0 -ban (tágabb értelemben) létezik határértéke, és egyenlő az A -val. Ekkor, ha f -nek és g -nek x_0 -ban létezik határértéke, és mindkettő 0, vagy ha a $|g|$ függvény határértéke x_0 -ban $+\infty$, úgy az f/g függvénynek is létezik határértéke x_0 -ban, és egyenlő A -val.

A tétel érvényes jobb- és baloldali határértékekre, továbbá $+\infty$ -beli, illetve $-\infty$ -beli határértékekre is.

L'Hospital-szabály (Csak a dallama...)

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az f és g differenciálható, továbbá az f'/g' függvénynek x_0 -ban (tágabb értelemben) létezik határértéke, és egyenlő az A -val. Ekkor, ha f -nek és g -nek x_0 -ban létezik határértéke, és mindkettő 0, vagy ha a $|g|$ függvény határértéke x_0 -ban $+\infty$, úgy az f/g függvénynek is létezik határértéke x_0 -ban, és egyenlő A -val.

A tétel érvényes jobb- és baloldali határértékekre, továbbá $+\infty$ -beli, illetve $-\infty$ -beli határértékekre is.

Példa.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,
- f akkor és csak akkor monoton csökkenő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,
- f akkor és csak akkor monoton csökkenő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,
- f akkor és csak akkor szigorúan monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén, és nem létezik olyan $\langle c, d \rangle$ részintervalluma $\langle a, b \rangle$ -nek, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \in \langle c, d \rangle$ pontban,

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,
- f akkor és csak akkor monoton csökkenő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén,
- f akkor és csak akkor szigorúan monoton növekvő $\langle a, b \rangle$ -n, ha teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén, és nem létezik olyan $\langle c, d \rangle$ részintervalluma $\langle a, b \rangle$ -nek, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \in \langle c, d \rangle$ pontban,
- f akkor és csak akkor szigorúan monoton csökkenő $\langle a, b \rangle$ -n, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in \langle a, b \rangle$ esetén, és nem létezik olyan $\langle c, d \rangle$ részintervalluma $\langle a, b \rangle$ -nek, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \in \langle c, d \rangle$ pontban.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, és f -nek x_0 -ban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, és f -nek x_0 -ban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H -nak, és tegyük fel, hogy f differenciálható az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon valamely $r > 0$ esetén.

- Ha $f'(x) \leq 0$ az $]x_0 - r, x_0[$ -on és $f'(x) \geq 0$ az $]x_0, x_0 + r[$ -en, akkor f -nek x_0 -ban helyi minimuma van.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, és f -nek x_0 -ban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H -nak, és tegyük fel, hogy f differenciálható az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon valamely $r > 0$ esetén.

- Ha $f'(x) \leq 0$ az $]x_0 - r, x_0[$ -on és $f'(x) \geq 0$ az $]x_0, x_0 + r[$ -en, akkor f -nek x_0 -ban helyi minimuma van.
- Ha $f'(x) \geq 0$ az $]x_0 - r, x_0[$ -on és $f'(x) \leq 0$ az $]x_0, x_0 + r[$ -en, akkor f -nek x_0 -ban helyi maximuma van.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és x_0 belső pontja H -nak. Ha f differenciálható x_0 -ban, és f -nek x_0 -ban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H -nak, és tegyük fel, hogy f differenciálható az $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon valamely $r > 0$ esetén.

- Ha $f'(x) \leq 0$ az $]x_0 - r, x_0[$ -on és $f'(x) \geq 0$ az $]x_0, x_0 + r[$ -en, akkor f -nek x_0 -ban helyi minimuma van.
- Ha $f'(x) \geq 0$ az $]x_0 - r, x_0[$ -on és $f'(x) \leq 0$ az $]x_0, x_0 + r[$ -en, akkor f -nek x_0 -ban helyi maximuma van.

Példa. Egy növény magasságát a jelenlegi pillanattól kezdve x év múlva az $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{8}x$ függvény adja meg. Mikor lesz a növény a legmagasabb?

Magasabbrendű deriváltak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és f differenciálható függvény. Az f' függvény deriváltját az f második deriváltjának nevezzük és f'' -vel, vagy $f^{(2)}$ -vel jelöljük. Hasonlóan értelmezhetjük a harmadik, negyedik, stb. deriváltjait az f -nek.

Magasabbrendű deriváltak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és f differenciálható függvény. Az f' függvény deriváltját az f második deriváltjának nevezzük és f'' -vel, vagy $f^{(2)}$ -vel jelöljük. Hasonlóan értelmezhetjük a harmadik, negyedik, stb. deriváltjait az f -nek.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

Magasabbrendű deriváltak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és f differenciálható függvény. Az f' függvény deriváltját az f második deriváltjának nevezzük és f'' -vel, vagy $f^{(2)}$ -vel jelöljük. Hasonlóan értelmezhetjük a harmadik, negyedik, stb. deriváltjait az f -nek.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor konvex $\langle a, b \rangle$ -n, ha f' monoton növekvő az $\langle a, b \rangle$ intervallumon,

Magasabbrendű deriváltak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ és f differenciálható függvény. Az f' függvény deriváltját az f második deriváltjának nevezzük és f'' -vel, vagy $f^{(2)}$ -vel jelöljük. Hasonlóan értelmezhetjük a harmadik, negyedik, stb. deriváltjait az f -nek.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle \subset H$, és f differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n.

- f akkor és csak akkor konvex $\langle a, b \rangle$ -n, ha f' monoton növekvő az $\langle a, b \rangle$ intervallumon,
- f akkor és csak akkor konkáv $\langle a, b \rangle$ -n, ha f' monoton csökkenő az $\langle a, b \rangle$ intervallumon.

Teljes függvényvizsgálat

- (1) Zérushelyek meghatározása. x_0 **zérushelye** f -nek, ha $f(x_0) = 0$.

Teljes függvényvizsgálat

(1) Zérushelyek meghatározása. x_0 **zérushelye** f -nek, ha $f(x_0) = 0$.

(2) Paritás megállapítása.

- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.

Teljes függvényvizsgálat

(1) Zérushelyek meghatározása. x_0 **zérushelye** f -nek, ha $f(x_0) = 0$.

(2) Paritás megállapítása.

- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.
- Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = -f(x)$.

Teljes függvényvizsgálat

- (1) Zérushelyek meghatározása. x_0 **zérushelye** f -nek, ha $f(x_0) = 0$.
- (2) Paritás megállapítása.
- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.
 - Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = -f(x)$.
- (3) Periodicitás. Az f függvény **periodikus**, ha van olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy minden $x \in H$ esetén $x + p \in H$ és $f(x + p) = f(x)$. Ekkor a p számot az f **periódusának**, f -et p **szerint periodikusnak** is nevezzük.

Teljes függvényvizsgálat

(1) Zérushelyek meghatározása. x_0 **zérushelye** f -nek, ha $f(x_0) = 0$.

(2) Paritás megállapítása.

- Az f függvény **páros**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$.
- Az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = -f(x)$.

(3) Periodicitás. Az f függvény **periodikus**, ha van olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy minden $x \in H$ esetén $x + p \in H$ és $f(x + p) = f(x)$. Ekkor a p számot az f **periódusának**, f -et p **szerint periodikusnak** is nevezzük.

(4) Határértékek kiszámítása.

(5) Monotonitás, szélsőértékek.

(5) Monotonitás, szélsőértékek.

(6) Görbület, inflexiós pont.

(5) Monotonitás, szélsőértékek.

(6) Görbület, inflexiós pont.

(7) A függvény grafikonja.

- (5) Monotonitás, szélsőértékek.
- (6) Görbület, inflexiós pont.
- (7) A függvény grafikonja.
- (8) Értékkészlet meghatározása.

- (5) Monotonitás, szélsőértékek.
- (6) Görbület, infelxiós pont.
- (7) A függvény grafikonja.
- (8) Értékkészlet meghatározása.

Példa. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvény-nél:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$