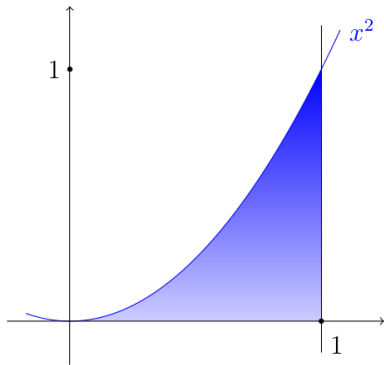


# Riemann-integrál (határozott integrál)

Tankönyv: Matematika nem matematika szakosoknak, EKF  
Líceum Kiadó, Eger. Szerkesztette: Mátyás Ferenc.

Motivációs feladat: Legyen adva egy  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.  
Szeretnénk meghatározni a függvény görbéje alatti területet.



ábra: az  $f(x) = x^2$  függvény görbéje alatti területe a  $[0, 1]$  intervallumon.

## Definíció:

Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . A  $D \subset [a, b]$  véges halmazt az  $[a, b]$  intervallum egy beosztásának nevezzük, ha  $a, b \in D$ . Az  $[a, b]$  intervallum összes beosztásainak halmazát  $\mathcal{D}([a, b])$ -vel jelöljük.

Megállapodunk abban, hogy  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  esetén  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Az  $x_i$  számokat a  $D$  beosztás osztópontjainak, az  $[x_{i-1}, x_i]$  intervallumokat a  $D$  beosztás részintervallumainak nevezzük.

A  $D$  beosztás finomsága a

$$\|D\| := \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

szám, ahol  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

A  $[a, b]$  intervallum egy  $(D_n)$  beosztássorozatát normális beosztássorozatnak nevezzük, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0.$$

## Definíció:

Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy korlátos függvény,  $D$  egy beosztása az  $[a, b]$  intervallumnak, azaz  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Legyen  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) alappontok rendszere. Az  $f$  függvény  $D$  beosztáshoz és  $\xi := \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  alappontokhoz tartozó integrálközelítő összege

$$\sigma(f, D, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

szám.

## Definíció:

Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy korlátos függvény. Az  $f$  függvényt Riemann-integrálhatónak nevezzük, ha az  $[a, b]$  intervallum minden  $(D_n)$  normális beosztássorozata és a hozzá tartozó  $\xi$  alappontrendszer esetén a  $(\sigma(f, D_n, \xi))$  (integrálközelítő összeg) sorozat konvergens.

Az integrálközelítő összeg sorozatok közös határértékét  $f$  függvény Riemann-integráljának (vagy határozott integráljának) nevezzük az  $[a, b]$  intervallumon.

Jelölés:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f$$

Megjegyezzük, hogy nem minden korlátos függvény Riemann-integrálható.

**Tétel:**

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos függvény az  $[a, b]$ -n, akkor  $f$  Riemann-integrálható  $[a, b]$ -n.
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy monoton függvény az  $[a, b]$ -n, akkor  $f$  Riemann-integrálható  $[a, b]$ -n.

**Tétel: (Newton-Leibniz-formula)**

Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy Riemann-integrálható függvény, jelölje  $F$  a  $f$  primitív függvényét. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

A  $F(b) - F(a)$  különbségre használatos még az  $[F(x)]_a^b$  jelölés is.

Térjünk vissza a motivációs feladatunkhoz!

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Térjünk vissza a motivációs feladatunkhoz!

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy a Riemann-integrál a konstrukciója miatt előjeles területet ad meg.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$



### Tétel: (Helyettesítéssel való integrálás)

*Ha  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos,  $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  folytonosan differenciálható ( $\varphi'$  létezik és folytonos), akkor*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt.$$

### Tétel:

*Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a < c < b$ . Ha az  $f$  Riemann-integrálható az  $[a, c]$  és  $[c, b]$  intervallumokon, akkor az  $f$  Riemann-integrálható az  $[a, b]$  intervallumon is, és*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

### Tétel: (Első középértéktétel)

*Legyen az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható az  $[a, b]$  intervallumon. Továbbá, az  $m, M$  olyan valós számok, hogy  $m \leq f(x) \leq M$  minden  $x \in [a, b]$  esetén. Akkor*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

*teljesül.*

# Improprius integrál

## Definíció:

*Legyen  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}_b$ ,  $a < b$ ,  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy  $f$  Riemann-integrálható minden  $x \in (a, b)$  esetén az  $[a, x]$  intervallumon. Legyen továbbá*

$$F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

*a.) Ha a  $F$  függvénynek  $b$ -ben létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(t) dt$  improprius integrál konvergens. Ekkor az*

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

*jelölést is használjuk.*

## Definíció:

*b.) Ha a  $F$  függvénynek  $b$ -ben nem létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(t)dt$  improprius integrál divergens. Ha a  $F$  függvény határértéke  $b$ -ben  $\pm\infty$ , akkor ezt*

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = \pm\infty$$

*jelöljük.*

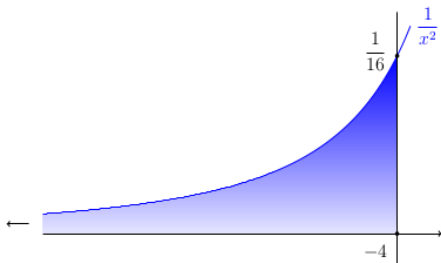
**Megjegyzés:** Hasonlóan definiáljuk a többi improprius integrált is, azaz amikor

$$a \in \mathbb{R}_b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

vagy

$$a, b \in \mathbb{R}_b, \quad a < b.$$

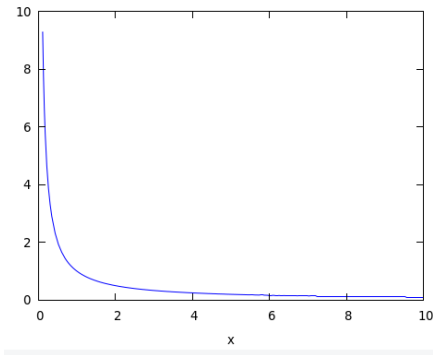
**Példa:** Számítsa ki a görbe alatti területet!



**ábra:** az  $f(x) = 1/x^2$  függvény görbéje alatti terület a  $(-\infty, -4]$  intervallumon.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-\infty}^{-4} x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-\infty}^{-4} = \left[ \frac{-1}{x} \right]_{-\infty}^{-4} = \\ &= \frac{-1}{-4} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

**Példa:** A következő függvény esetén is kiszámíthatunk több impropius integrált.



ábra: az  $f(x) = 1/x$  függvény görbéje az  $(0, \infty)$  intervallumon.

- $\int_0^{10} \frac{1}{x} dx = ?$
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$
- $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$

## Tétel: (Forgástest térfogata, felszíne)

*Legyen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  folytonos függvény. Legyen a forgástengely az  $x$ -tengely, ekkor a keletkező forgástest térfogata és felszíne:*

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Példa:** Mennyi  $f(x) = 2\sqrt{x}$  függvény  $x$ -tengely körüli forgatásával keletkezett forgási paraboloid felszíne, térfogata a  $[0, 4]$  intervallum felett?