

Határozatlan integrál

Tankönyv: Matematika nem matematika szakosoknak, EKF
Líceum Kiadó, Eger. Szerkesztette: Mátyás Ferenc.

Definíció:

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ha $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in [a, b]$ -re, akkor F függvényt az f függvény primitív függvényének nevezzük. Az $F(x) + c$ függvények összességét az f függvény határozatlan integráljának nevezzük.

Jelölés:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \int f = F + c.$$

Tétel: (Alapintegrálok)

- $\int c dx = cx + d.$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},$ ha $\alpha \neq -1.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$ ($\alpha = -1$ eset).
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ($0 < a, a \neq 1$).
- $\int e^x dx = e^x + c.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x dx = \sin x + c.$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c.$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c.$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c.$

Tétel: (Integrálási szabályok)

Ha az alábbi határozatlan integrálok léteznek a vizsgált intervallumon, akkor

- $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R}).$

Tétel: ($f'f^\alpha$ alakú integrandus)

- $\int f'(x)f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \text{ } (\alpha = -1 \text{ eset}).$

Tétel: (Lineáris helyettesítés)

Ha $f(x)$ primitív függvénye $F(x)$, akkor minden a, b valós szám esetén ($a \neq 0$)

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c.$$

Tétel: (Parciális integrálás tétele)

Ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, akkor

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$