

Extremális pontok, irányok meghatározása

1. Adott az alábbi konvex poliéder. Határozza meg a konvex poliéder egyik extremális pontját! Határozza meg a konvex poliéder egyik extremális irányát! Hangsúlyozzuk, hogy nem az összes, hanem csak egy extremális pontot és irányt kell meghatározni! A számításokat pivotálással végezze, lehetőleg a legkönnyebb számolást ígérő pivotelem választással!

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 50$$

$$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 20x_4 = 70$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Adott az alábbi konvex poliéder. Határozza meg a konvex poliéder összes extremális pontját! Határozza meg a konvex poliéder összes extremális irányát! A számításokat pivotálással végezze, lehetőleg a legkönnyebb számolást ígérő pivotelem választással!

$$3x_1 - 50x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 140$$

$$2x_1 - 40x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Adott az alábbi konvex poliéder.

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$10x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 24$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Határozza meg a konvex poliéder összes extremális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extremális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extremális pontjai és extremális irányai segítségével!

4. Adott az alábbi konvex poliéder.

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Határozza meg a konvex poliéder összes extremális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extremális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extremális pontjai és extremális irányai segítségével!

5. Adott az alábbi konvex poliéder.

$$2x_1 - 6x_2 \leq 12$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extrémális pontjai és extrémális irányai segítségével!

6. Adott az alábbi konvex poliéder.

$$6x_1 - 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 - 2x_2 \geq -8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extrémális pontjai és extrémális irányai segítségével!

7. Egy konvex poliéder $x \in R^3, x \geq 0$ pontjait az alábbi módon adjuk meg: A vektor első két koordinátájának összege pontosan 20-al nagyobb, mint a harmadik koordináta. Az első koordináta legalább 16-al nagyobb legyen a második koordinátánál.

- Írja fel a konvex poliédert matematikai formában!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális pontját!
- Határozza meg a konvex poliéder összes extrémális irányát!
- Írja fel a konvex poliédert az extrémális pontjai és extrémális irányai segítségével!

Lineáris programozás

1. Egy üzem kis ill. közepes televíziókészülékeket gyárt. Minden kis TV-n 4 pénzegység a nyereség, míg a közepeseken 5 pénzegység. A TV-eket három különböző részlegben készítik. Egy kis TV elkészítéséhez az egyes részlegekben rendre 2, 1, 1 óra szükséges. Ugyanezek az értékek a közepes TV esetében rendre 1, 3, 2 óra. Az első két részleg kapacitása legfeljebb napi 64-64 óra, míg a harmadik részleg kapacitása legfeljebb napi 44 óra.
 - a) Milyen napi termelés maximalizálja az üzem nyereségét?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik részleg kapacitására!
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot a kis TV nyereségére!
 - e) A harmadik részleg kapacitásának milyen megváltoztatása esetén lehet 5 %-os nyereségnövekedést elérni?
2. Egy vállalat két termékének gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek megmunkálása négy gépen történik. Az első termék egy darabjának megmunkálási ideje a gépeken rendre 1, 0, 2, 3 óra, a második terméké pedig 2, 1, 0, 4 óra. A gépek kapacitása legfeljebb rendre 320, 140, 120, 800 óra. A termékek eladási egységára rendre 8, 2 pénzegység.
 - a) Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha maximális árbevételre törekszünk?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását! Mit jelentenek ezek az értékek?
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a második termék eladási árára!
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első gép kapacitására!
 - e) Az első gép kapacitásának milyen módosítása esetén csökken 10 %-kal az árbevétel? Mi lesz ekkor az optimális termelés?
 - f) A harmadik gép kapacitásának milyen módosítása esetén nő 10 %-kal az árbevétel? Mi lesz ekkor az optimális termelés?
3. Egy cukrász legfeljebb 1500 kg lisztet, 220 kg cukrot és 280 kg vajat használhat fel kétféle cukrászsütemény (S1, S2) elkészítéséhez. Egy tucat S1 cukrászsütemény elkészítéséhez 3 kg lisztre, 1 kg cukorra és 1 kg vajra, míg egy tucat S2 cukrászsüteményhez 6 kg lisztre, 0.5 kg cukorra és 1 kg vajra van szükség. A cukrász nyeresége egy tucat S1 süteményen 200 pénzegység, egy tucat S2 süteményen pedig 300 pénzegység.
 - a) Milyen mennyiségben célszerű előállítani az egyes cukrászsüteményeket, hogy a cukrász összes nyeresége maximális legyen?
 - b) Mi az optimális megoldás, ha a raktárban csak 260 kg vaj van?
 - c) Hogyan változik meg az optimális termelés és a nyereség, ha a cukrász legfeljebb 320 kg vajat használhat fel?
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot a S1 cukrászsütemény nyereségére!
 - e) Hogyan termeljen a cukrász, ha egy tucat S2 süteményen a nyeresége 10 %-kal csökken?
4. Három nemnegatív számot kell meghatározni úgy, hogy az elsőt héttel, a másodikat tizennégygel, a harmadikat hattal szorozva és ezeket a szorzatokat összeadva az így keletkezett szám minél nagyobb legyen. Az első számot kettővel, a másodikat négygel, a harmadikat eggyel szorozva és ezeket a szorzatokat összeadva az így keletkezett szám nem lehet háromszáznál nagyobb. Az első számot hárommal, a másodikat kettővel, a harmadikat

eggyel szorozva és ezeket a szorzatokat összeadva az így keletkezett szám legfeljebb kétszáz lehet.

- a) Írja fel a feladat matematikai megfogalmazását és oldja meg a feladatot szimplex módszerrel!
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a kétszáz korlátra!
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik számra vonatkozó célfüggvénybeli együtthatóra!
 - e) Mennyivel kell megváltoztatni a kétszáz korlátot, hogy a célfüggvény 20 %-kal növekedjen?
5. Egy üzem kétféle termék (T1, T2) előállításával foglalkozik. A termékeket három alkatrészből (A1, A2, A3) szerelik össze. A T1 termék összeszereléséhez 2 db A1, 1 db A2 és 1 db A3 alkatrész szükséges. A T2 termék összeszereléséhez pedig rendre 9, 3, 2 alkatrész kell. Az alkatrészekből rendre 315, 120, 110 db van raktáron. A termékek egységára rendre 16, 54 pénzegység.
- a) Írja fel a gyártandó termékmennyiségekre vonatkozó matematikai modellt, amelynél az árbevétel maximális! Vegye figyelembe, hogy a raktáron lévő alkatrészeknél többet nem használhatunk fel!
 - b) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első termék egységárára vonatkozóan!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első alkatrész raktári mennyiségére vonatkozóan!
 - d) Az árbevétel 1%-os növeléséhez mennyivel kell megváltoztatni az A2 alkatrész raktári mennyiségét?
6. Egy vállalat három termékének (T1, T2, T3) gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek megmunkálása két gépen történik. A T1 termék egy darabjának megmunkálási ideje a gépeken rendre 2, 8 óra, a T2 terméké rendre 1, 2 óra, a T3 terméké pedig rendre 5, 3 óra. A gépek rendre 60, 160 óra kapacitással rendelkeznek. A termékek eladási egységára rendre 18, 8, 4 pénzegység.
- a) Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha maximális árbevételre törekszünk úgy, hogy az első gép teljes kapacitással dolgozik, a második gép kapacitását pedig nem lépjük túl?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a második gép kapacitására!
 - d) A második gép kapacitásának milyen megváltoztatása esetén lehet 1 %-os nyereségnövekedést elérni?
 - e) Mi az optimális megoldás, ha a gépkapacitások megváltoznak, rendre 50, 180 órára? A megoldást az a) pontban kapott optimális szimplex táblából kiindulva végezze!
7. Egy vállalat két termékének (T1, T2) gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek megmunkálása két gépen történik. A T1 termék egy darabjának megmunkálási ideje a gépeken rendre 3, 4 óra, a T2 terméké pedig rendre 4, 6 óra. A gépek rendre 130, 195 óra kapacitással rendelkeznek. A termékek szerelési ideje rendre 1, 2 óra. A szerelde kapacitása 60 óra. A termékek eladási egységára rendre 4, 5 pénzegység.
- a) Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha maximális árbevételre törekszünk úgy, hogy a gépek kapacitását nem lépjük túl és a szerelde teljes kapacitással dolgozik?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a szerelde kapacitására! Mi a gazdasági tartalma a szerelde árnyékárának?
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első termék eladási árára!

8. Egy vállalat a termékei gyártásához két erőforrást használ fel. A gyártási folyamat négy tevékenységből (eljárásból) áll. Az egyes tevékenységek végzése igénybe veszi az erőforrásokat. Az első tevékenység egységnyi szintű működtetése az első erőforrásból négy, a második erőforrásból pedig hét időegységet vesz igénybe. A második tevékenység egységnyi szintű működtetésének erőforrásigénye egy-egy időegység. A harmadik tevékenység egységnyi szintű működtetésének erőforrásigénye rendre 3, 4 időegység. A negyedik tevékenység egységnyi szintű működtetésének erőforrásigénye 1, 2 időegység. Az egyes tevékenységek egységnyi szintű működtetésének költsége rendre 5, 4, 6, 2 pénzegység. Az egyes erőforrásokból rendre 210, 270 időegység áll rendelkezésünkre.
- Milyen tevékenységi szinten működtessük az egyes tevékenységeket, ha azt akarjuk, hogy a tevékenységek működtetésének összköltsége minél kisebb legyen és az egyes erőforrásokból a rendelkezésre álló mennyiséget használjuk fel?
 - Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - Végezzen érzékenységvizsgálatot az első erőforrás rendelkezésre álló mennyiségére!
 - Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik tevékenység egységnyi szintű működtetésének költségére!
 - Az első erőforrásból mennyi időegységnek kell rendelkezésre állni, hogy a működtetési költség 10 %-kal csökkenjen?
9. Egy kis cég a Húsvéti Ünnepekre négy csokoládé figurát akar készíteni. Rendelkezésre áll 1800 mennyiségű csokoládémassza, amelyet teljes egészében fel akar használni. Az egyes csokoládé figurák elkészítéséhez rendre 8, 2, 14, 4 mennyiségű csokoládémassza kell. Az egyes figurák elkészítésének költsége rendre 6, 4, 5, 2 pénzegység. Az egyes figurákon a nyereség rendre 6, 2, 8, 2 pénzegység. A cég pontosan 1400 pénzegység nyereséget akar elérni.
- Milyen termékösszetételben érdemes gyártani a csokoládé figurákat, ha a cég minél kisebb gyártási költségre törekszik?
 - Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - Végezzen érzékenységvizsgálatot az előírt nyereségre!
 - Az előírt nyereség milyen megváltoztatása esetén lehet 10 %-os gyártási költség csökkenést elérni? Mi az optimális megoldás?
 - Végezzen érzékenységvizsgálatot a második csokoládé figura gyártási költségére!
 - Mi az optimális megoldás, ha az előírt nyereség 1200-ra, a rendelkezésre álló csokoládé mennyiség pedig 2000-re változik? A megoldást az a) pontban kapott optimális szimplex táblából kiindulva végezze!
10. Egy vállalat három terméket gyárt két alapanyag felhasználásával. Az első termékhez az alapanyag-felhasználás rendre 4, 6 mennyiség, a második termékhez rendre 0.2, 0.5 mennyiség, a harmadik termékhez pedig rendre 16, 22 mennyiség. Nem ismerjük az alapanyagok egységárát, ezt keressük. Tudjuk viszont, hogy az első termék egységének alapanyag-felhasználása 400 pénzegység. A második termékből 10 mennyiség előállításának alapanyag-felhasználása 300 pénzegység.
- Az alapanyagok milyen árai mellett lesz a harmadik termék egységének alapanyag-költsége a legkisebb, figyelembe véve a fenti feltételeket? Írja fel a megoldandó lineáris programozási feladatot és oldja meg szimplex módszerrel!
 - Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - Végezzen érzékenységvizsgálatot az első termék egységének alapanyag-felhasználására!

- d) Végezzen érzékenységvizsgálatot a harmadik termék egységéhez a második alapanyagból szükséges mennyiségre!
- e) Mi az optimális megoldás, ha az első termék egységének alapanyag-felhasználása 800 pénzegységre, a 10 darab második termék alapanyag-felhasználása 400 pénzegységre változik? A megoldást az a) pontban kapott optimális szimplex táblából kiindulva végezze!
- f) Mi az optimális megoldás, ha a harmadik termék alapanyag-felhasználása 20, 30 értékre változik? A megoldást az a) pontban kapott optimális szimplex táblából kiindulva végezze!

11. Egy vállalat három termékének gyártásával kapcsolatban az alábbiak ismertek. A termékek szerelési költsége rendre 16, 2, 8 pénzegység. A termékek egy-egy darabján a nyereség rendre 8, 2, 3 pénzegység. Egy bizonyos anyagból a felhasználás termékenként rendre 2, 1, 5 mennyiség. Az anyagból a raktáron 60 mennyiség van. Az előírt nyereség 160 pénzegység.
- a) Milyen termékösszetételben érdemes gyártani, ha minél kisebb szerelési költségre törekszünk úgy, hogy legalább az előírt nyereséget elérjük és a raktáron lévő anyagmennyiséget teljes mértékben felhasználjuk?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot a raktáron lévő anyagmennyiségre!
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot a második termék szerelési költségére!
 - e) A raktáron lévő anyagmennyiség milyen megváltoztatása esetén lehet 5 %-os szerelési költség csökkenést elérni?

12. Egy állatállomány etetésére háromféle takarmány (TK) áll rendelkezésre, amelyek ugyanazt a kétféle tápanyagot (TA) tartalmazzák, de más-más arányban. Az alábbi táblázat mutatja, hogy 1 zsák takarmányban hány kg tápanyag van. Az egyes takarmányok zsákonkénti ára rendre 16, 20, 14 pénzegység.
- a) Hány zsák takarmányt vásároljunk, ha azt akarjuk, hogy a kiadásunk minél kisebb legyen és az állatok etetéséhez az első tápanyagból legalább 36 kg-ra, a második tápanyagból pedig pontosan 28 kg-ra van szükség?
 - b) Írja fel a feladat duálisát és adja meg ennek optimális megoldását!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első tápanyag előírt mennyiségére!
 - d) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első takarmány árára!

	TK1	TK2	TK3
TA1	4	1	1
TA2	2	1	3

13. Háromféle növény termesztési területét szeretnénk megtervezni, legfeljebb 200 területegységnyi földet felhasználva. A harmadik növényfajtát a felhasznált földterület legfeljebb 50%-án kívánjuk termesztetni. Az első növény termesztési területe legalább 40 területegységgel nagyobb legyen, mint a második növényé. A növényfajták hozama területegységenként rendre 4, 8, 4 pénzegység.
- a) Milyen nagyságú területeken termesszük az egyes növényeket, hogy az összhozam maximális legyen?
 - b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a felhasználható földterület nagyságára!
 - c) Végezzen érzékenységvizsgálatot az első növény hozamára!

14. Egy üzem kétféle termék (T1, T2) előállításával foglalkozik. A termékeket három alkatrészből (A1, A2, A3) szerelik össze. Az első táblázat az egyes termékek összeszereléséhez szükséges alkatrészek számát, a termékek szerelési idejét és a termékek egységárát tartalmazza. Az alkatrészek megmunkálását két gépen (G1, G2) végzik. A második táblázat az alkatrészek egyes gépeken történő megmunkálásának időszükségletét és a gépek kapacitását mutatja. A szerelde kapacitása 220 perc/nap.

- Meghatározandó a szerelde és a gépműhely kapacitását túl nem lépő napi termelés az egyes termékekből úgy, hogy az árbevétel maximális legyen!
- Írja fel a feladat duálisát és adja meg az optimális megoldást!
- Határozza meg és értelmezze az egyes gépek és a szerelde árnyékárát!
- Végezzen érzékenységvizsgálatot az első termék egységárára vonatkozóan!
- Mennyivel kell megváltoztatni a G1 gép kapacitását, hogy az árbevétel 1 %-kal növekedjen?
- Végezzen érzékenységvizsgálatot a második gép kapacitására vonatkozóan!

	A1	A2	A3	Szer. idő	Egységár		A1	A2	A3	Kapacitás
T1	1	0	2	2	27	G1	1	0	1	240
T2	0	1	1	1	8	G2	7	1	1	630

Maximális folyam-minimális vágás feladatpár

1. Adott az alábbi táblázattal egy hálózat. Határozza meg az 5 pontot a 3 ponttól elválasztó minimális kapacitású vágást! Adja meg a vágásbeli éleket, a vágás kapacitását, valamint írja fel a feladat párjának optimális megoldását is!

honnan	1	2	4	4	5	5	6
hova	4	4	3	6	1	2	3
kapacitás	4	3	3	3	5	2	5

2. Adott az alábbi táblázattal egy hálózat. Határozza meg az 5 pontot a 3 ponttól elválasztó minimális kapacitású vágást! Adja meg a vágásbeli éleket, a vágás kapacitását, valamint írja fel a feladat párjának optimális megoldását is!

honnan	1	2	4	4	5	5	6
hova	4	4	3	6	1	2	3
kapacitás	8	6	6	6	10	4	10

3. Adott az alábbi táblázattal egy hálózat. Határozza meg a 4 pontot a 2 ponttól elválasztó minimális kapacitású vágást! Adja meg a vágásbeli éleket, a vágás kapacitását, valamint írja fel a feladat párjának optimális megoldását is!

honnan	1	3	4	4	5	5	6
hova	5	2	1	6	2	3	5
kapacitás	3	5	2	5	3	3	4