1. Leontief-féle input-output modell

1.1. A modell definiálása és elemzése

Tekintsünk egy gazdaság termelési modelljét, amelyben különböző szektorok (termelőágazatok, termelési folyamatok) különböző termékek előállításával foglalkoznak. Tételezzük fel, hogy a modellben a termékek és a szektorok (termelőágazatok) között **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés** van. Ezt a fajta termelési modellt **Leontief-féle input-output modellnek** nevezzük. Tehát az alábbi fontos feltevésekkel élünk:

- minden terméket egyetlenegy szektor (termelési folyamat) állít elő és fordítva,

- minden szektor (termelési folyamat) csak egyetlenegy terméket termel.

A szektorok, amelyek a termékeket gyártják, a termelés során felhasználnak termékeket és elsődleges erőforrásokat. Feltételezzük, hogy a ráfordítások szintje (inputok) egyenes arányban változik a termelés szintjével (output), így a ráfordításokat **egységnyi** szintű termelésre lehet vonatkoztatni.

A termékek termeléséhez szükséges termékfelhasználást (ráfordítást) is és az elsődleges erőforrás-felhasználást (ráfordítást) is egy-egy mátrix segítségével adjuk meg.

Jelölje a **termékek közvetlen ráfordítási mátrixát** a B mátrix.

A B mátrix b_{ij} eleme azt mutatja, hogy a j-edik szektor (S_j) az általa előállított **termék egységének előállításához** az i-edik **termékből** (T_i) mennyit használ fel **közvetlenül**. Mivel kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a szektorok és a termékek között, ezért az általánosság megsértése nélkül mondhatjuk azt, hogy az S_1 szektor a T_1, az S_2 szektor a T_2 termék, … előállításával foglalkozik. Innentől kezdve a szektorok helyett termékeket is mondhatunk. Ebben a megfogalmazásban a b_{ij} **elem** azt mutatja, hogy a j-edik termék (T_j) **egységének** előállítás**ához** az i-edik termék**ből** (T_i) mennyi a közvetlen felhasználás.

Tehát a B mátrix **oszlopai** az **előállított termékekre** (szektorokra), **sorai** pedig a **felhasznált termékekre** vonatkoznak. Fordítva is lehetett volna definiálni, akkor az alábbi vizsgálatokban levezetett képleteknek hasonló, de más formája lenne!

Adott a szektorok termelése (kibocsátása), jelölje ezt a q vektor, továbbá adott a termékek egységára (röviden ára), jelölje ezt a p vektor. A q_j a j-edik termékből (T_j) a **bruttó kibocsátást** jelenti, a q vektort a **bruttó kibocsátás vektorának** nevezzük. A p_i az i -edik termék (T_i) egységára. A B mátrixot és a p,q vektorokat az alábbi sémában is közöljük, amely remélhetőleg majd megkönnyíti a következőkben elvégzendő modell-elemzést. Több kérdést is felvethetünk, amelyekre a választ mátrixműveletekkel fogjuk megadni. (Az ábrán a b_{ij} elemeket r_{ij}-vel jelölték)

$$
\begin{array}{cc|cccccc|}
\cline{3-8}
 & & q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \\
\cline{3-8}
 & & T_1 & T_2 & \cdots & T_j & \cdots & T_n \\
\cline{1-1}\cline{3-8}
\multicolumn{1}{|c|}{p_1} & T_1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\
\multicolumn{1}{|c|}{p_2} & T_2 & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\
\multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\multicolumn{1}{|c|}{p_i} & T_i & r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\
\multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\multicolumn{1}{|c|}{p_n} & T_n & r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \\
\cline{1-1}\cline{3-8}
\end{array}
$$

1.1.1. Anyagköltség mátrix

Első lépésként arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a közvetlen felhasználás **pénzben** kifejezve. Ha a *B* mátrix mindegyik **sorvektorát** megszorozzuk a megfelelő termék árával, akkor a keletkező *R* mátrix r_{ij} eleme azt mutatja, hogy a *j*-edik termék egységének előállításához az *i*-edik termékből hány **pénzegység értékű** mennyiséget használunk fel közvetlenül. Ezt a ***R*** mátrixot nevezzük **anyagköltség mátrixnak**.

Ismeretes, hogy egy ilyen műveletet egy **diagonális mátrix**-szal való **balról szorzással** lehet előállítani. A *p* árvektor elemeiből készítsünk egy diagonális ***P*** mátrixot (ármátrix) és ha ezzel balról megszorozzuk a ***B*** mátrixot, akkor az anyagköltség mátrixot kapjuk, azaz

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{B}$$

vagy vektorosan

$$\boldsymbol{R}=\langle \boldsymbol{p}\rangle\cdot\boldsymbol{B}$$

Az anyagköltség mátrix ismeretében a közvetlen ráfordítás mátrixot a

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}$$

összefüggéssel számíthatjuk ki.

1.1.2. Bruttó termeléshez tartozó közvetlen ráfordítás mátrix

Ha a ***B*** mátrix mindegyik **oszlopvektorát** megszorozzuk a megfelelő bruttó termeléssel, akkor a keletkező mátrix *ij*-edik eleme azt mutatja, hogy a *j*-edik termék **bruttó termelésének** megfelelő mennyiségű termék előállításához az *i*-edik termékből mennyit használunk fel közvetlenül.

A ***q*** bruttó termelés vektor elemeiből készítsünk egy diagonális ***Q*** mátrixot és ha ezzel jobbról megszorozzuk a ***B*** mátrixot, akkor eredményül $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q}$, vagy vektorosan $\boldsymbol{B}\cdot\langle \boldsymbol{q}\rangle$

1.1.3. Bruttó termeléshez tartozó nettó kibocsátás

A $\boldsymbol{B}$ közvetlen ráfordítás mátrix $\boldsymbol{b_j}$ oszlopvektora azt mutatja meg, hogy a j-edik termék egységének előállításához az egyes termékekből közvetlenül mennyit használnak fel. Ha a j-edik termékből $\boldsymbol{q_j}$ mennyiséget termelnek (állítanak elő), akkor a közvetlen felhasználás vektora $\boldsymbol{q_j \cdot b_j}$. A felhasználás a többi termékre is hasonlóan írható fel, így a $\boldsymbol{q}$ bruttó termeléshez a felhasználás vektora

$$\sum_{j=1}^{n} q_j b_j$$

azaz az $\boldsymbol{B}$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációja, amely a $\boldsymbol{B \cdot q}$ szorzásnak felel meg. Jelölje a nettó kibocsátást a $\boldsymbol{r}$ vektor Ha tehát a $\boldsymbol{q}$ bruttó termeléshez $\boldsymbol{B \cdot q}$ mennyiséget felhasználunk, akkor a nettó termelés, vagy nettó kibocsátás vektora

$$\boldsymbol{r = q - B \cdot q}.$$

A nettó kibocsátás tehát megmutatja, hogy a termelés során felhasznált termékek után a termékekből mennyi marad ún. végső felhasználási célokra (fogyasztásra, felhalmozásra).

1.1.4. Nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó termelés

Az $\boldsymbol{r = q - B \cdot q}$ összefüggésből induljunk ki és ebből rendezéssel fejezzük ki a $\boldsymbol{q}$ vektort. A következők adódnak:

$$\boldsymbol{r = q - B \cdot q = E \cdot q - B \cdot q = (E - B) \cdot q} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{q = (E - B)^{-1} \cdot r}$$

amennyiben létezik az inverzmátrix. Az inverz létezésének vizsgálatával később fogunk foglalkozni. Az $\boldsymbol{(E-B)^{-1}}$ inverzmátrixnak nagy jelentősége van a modellben, ezért ezt **Leontief-féle inverznek** nevezik és $\boldsymbol{T}$ -vel jelölik, ahol tehát

$$\boldsymbol{T = (E - B)^{-1}}$$

így a bruttó termelés és a nettó termelés közötti kapcsolatot a

$$\boldsymbol{q = T \cdot r} \quad \text{illetve az} \quad \boldsymbol{r = q - B \cdot q = T^{-1} \cdot q}$$

formulák adják. Megjegyezzük, hogy az $\boldsymbol{E-B}$ mátrixot **Leontief-féle mátrixnak** is szokás nevezni.

1.1.5. Az egyes termékek egységnyi mennyiségű előállítása során keletkező új érték (hozzáadott érték vagy nettó érték)

A $\boldsymbol{B}$ közvetlen ráfordítás mátrix $\boldsymbol{b^{(i)}}$ sorvektora megmutatja, hogy az i-edik termékből mennyit használnak fel az egyes termékek egységnyi mennyiségének előállításához. Ha az i-edik termék egységára $\boldsymbol{p_i}$, akkor felhasználás pénzbeli értéke $\boldsymbol{p_i \cdot b^{(i)}}$. A pénzben kifejezett felhasználás a többi termékre is hasonlóan írható fel, így a $\boldsymbol{p}$ árvektorhoz a pénzbeli felhasználás vektora

$$\sum_{j=1}^{n} p_i \, b^{(i)}$$

azaz a ***B*** mátrix sorvektorainak lineáris kombinációja, amely a $\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B}$ szorzásnak felel meg (amelynek eredménye egy sorvektor lesz). A ***p*** árvektor esetén a pénzben kifejezett felhasználás tehát $\boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B}$, a kettő különbsége a keletkező hozzáadott érték (szokás új értéknek vagy nettó értéknek is nevezni). A hozzáadott érték vektora $\boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B}$. Jelölje a hozzáadott értéket az ***m*** vektor, így

$$\boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B}.$$

A hozzáadott érték tehát megmutatja, hogy az egyes termékek egységnyi mennyiségű előállítása során felhasznált anyagköltségéhez mennyi értéket kell **hozzáadni**, hogy megkapjuk a termékek árát.

1.1.6. A hozzáadott értékhez tartozó árvektor

Az $\boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B}$ összefüggésből induljunk ki és ebből rendezéssel fejezzük ki a ***p*** vektort. A következők adódnak:

$$\boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}^T \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})$$

A ***p*** vektor ebből az összefüggésből

$$\boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{m}^T \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{m}^T \cdot \boldsymbol{T}$$

Az árvektor és a hozzáadott érték vektora közötti kapcsolatot a

$$\boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{m}^T \cdot \boldsymbol{T} \qquad \text{illetve a} \qquad \boldsymbol{m}^T = \boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$$

formulák adják.

1.1.7. A közvetlen ráfordítások pénzegységben kifejezett formája

A közvetlen ráfordítást úgy is értelmezhetjük, hogy egy pénzegységnyi mennyiséghez mennyi a felhasználás pénzegységben kifejezve. A közvetlen felhasználás mátrixa

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{P}^{-1}$$

vagy

$$\boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{p} \rangle \cdot \boldsymbol{B} \cdot \langle \boldsymbol{p} \rangle^{-1}$$

Példa

Feladat: Egy üzem három termékkel foglalkozik. Az első termék egységének előállításához a második termékből négyet használ fel közvetlenül. A harmadik termék egységének előállításához az első termékből kettőt, a második termékből hetet használ fel közvetlenül. A termékek bruttó termelése rendre 8, 60, 2. A termékek egységára rendre 45, 8, 150.

a) Írja fel a közvetlen ráfordítások mátrixát!

b) Határozza meg a Leontief-féle inverzmátrixot!

c) Határozza meg azt a mátrixot, amely az egységnyi mennyiségű termelésre vonatkoztatva pénzegységben fejezi ki a közvetlen ráfordításokat!

d) Határozza meg azt a vektort, amely a bruttó termeléshez felhasznált termékmennyiségeket mutatja!

e) Határozza meg a termékegységre eső hozzáadott érték vektorát!

f) Értelmezze a Leontief-féle inverzmátrix harmadik oszlopvektorának elemeit!

Megoldás:

a) Célszerű először az adatokat egy sémában felrajzolni, ahová a termékneveket is beírhatjuk. Ebből a sémából a közvetlen ráfordítási mátrix már egyszerűen felírható. Természetesen séma nélkül sem bonyolult a mátrix felírása. A B mátrix b_{ij} eleme mutatja, hogy a j-edik termék **egységének** előállításá**hoz** az i-edik termék**ből** (T_i) a közvetlen felhasználást így az első oszlop második eleme 4 , a harmadik oszlop első eleme 2 , a második pedig 7 , a többi elem pedig zérus. Ha nem a fenti módon értelmezzük a mátrixot, hanem az oszlopokat felcseréljük, akkor a képleteink nem a megadott módon használhatók, ezért ügyeljünk a helyes felírásra. A ***B*** közvetlen ráfordítás mátrix:

$$\begin{array}{c|ccc|} & T_1 & T_2 & T_3 \\ \hline T_1 & 0 & 0 & 2 \\ T_2 & 4 & 0 & 7 \\ T_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A ***T*** Leontief-féle inverzmátrixot az ***E***-***B*** mátrix invertálásával kapjuk, az invertálást többféleképpen is elvégezhetjük, pl. pivotálással is

$$E-B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -4 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T=(E-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 15\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

c) Az ***R*=*P*·*B*** anyagköltség mátrix fejezi ki pénzegységben a közvetlen ráfordításokat az egységnyi mennyiségű termelésre vonatkoztatva. A művelet elvégzéséhez felírjuk a ***p*** árvektort, majd a termékárakból a diagonális ***P*** vagy <***p***> ármátrixot, majd elvégezzük a mátrixszorzást.

$$p=\begin{bmatrix}45\\ 8\\ 150\end{bmatrix} \Rightarrow P=<p>=\begin{bmatrix}45 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 150\end{bmatrix} \Rightarrow R=PB=\begin{bmatrix}0 & 0 & 90\\ 32 & 0 & 56\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

d) A bruttó termeléshez felhasznált termékmennyiségeket a ***B*·*q*** vektor adja.

$$q=\begin{bmatrix}8\\ 60\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow Bq=\begin{bmatrix}4\\ 46\\ 0\end{bmatrix}$$

e) Először ki kell számítani a ***p*·*B*** pénzben kifejezett ráfordítást, majd ebből a termékegységre eső hozzáadott érték ***m*** vektorát az $\boldsymbol{m^T = p^T - p^T \cdot B}$ formulával számíthatjuk.

$$m^T=p^T-p^TB=[45 \quad 8 \quad 150]-[32 \quad 0 \quad 146]=[13 \quad 8 \quad 4]$$

$$m=\begin{bmatrix}13\\ 8\\ 4\end{bmatrix}$$

f) A **T** Leontief-féle inverzmátrix harmadik oszlopvektora azt a bruttó termelést mutatja, amelyet akkor kapunk, ha a harmadik termékből 1, a másik kettőből pedig zérus a nettó kibocsátás.

$$t_3=\begin{bmatrix}2\\ 15\\ 1\end{bmatrix}$$