GAZDASÁGMATEMATIKA 2

4. előadás

2021. március 1.

1. Legkisebb négyzetek módszere

1.1. Legkisebb négyzetek módszere, egyenes eset.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ alappontok és az $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek (pl. mérési eredmények). Keressük azt az egyenest

$$y = a_0 + a_1 x,$$

melyre a

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2$$

kifejezés minimális.

A fenti feltételnek eleget tevő egyenest az (x_i, y_i) értékeket (pontokat) négyzetesen legjobban közelítő egyenesnek nevezzük (ahol $i = 1, \ldots, n$).

A feladat megoldásához az

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \big[y_i - (a_0 + a_1 x_i)\big]^2$$

függvényt kell minimalizálnunk ($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). A többváltozós függvények szélsőértékéről tanultak szerint az $F'_{a_0}(a_0, a_1) = 0$ és $F'_{a_1}(a_0, a_1) = 0$ feltételnek eleget tevő a_0, a_1-et keressük. A parciális deriváltakra

$$\sum_{i=1}^{n} -2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} -2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)]x_i = 0$$

egyenletrendszert kapjuk.

Ezt az egyenletrendszert az alábbi alakban írhatjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$

amelyből adódik, hogy

$$n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ekkor

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \qquad X^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Így az egyenletrendszer

$$\left(X^T X\right)\beta = X^T y$$

alakban írható.

A $\det(X^T X) = 0$ csak akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (érdektelen eset).

Tehát feltehetjük, hogy $\det(X^T X) \neq 0$. Ekkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Például az $X^T X$ invertálható, így

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

1. MEGJEGYZÉS. Az egyenes egyenletét többféleképpen megadhatjuk, de az a számolás lényegén nem változtat.

2. PÉLDA. Például ha az egyenes egyenlete:

$$y = a + bx,$$

akkor annyi változik csak, hogy a β vektorban nem a_0 és a_1 szerepel, hanem

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

A megoldandó egyenletrendszer így is

$$\left(X^T X\right)\beta = X^T y$$

alakban írható.

3. PÉLDA. Például ha az egyenes egyenlete:

$$y = ax + b,$$

akkor annyi változik csak, hogy a β vektorban nem a_0 és a_1 szerepel, hanem

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

és az X mátrixban is elcserélődnek az oszlopok, azaz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

A megoldandó egyenletrendszer így is

$$\left(X^T X\right)\beta = X^T y$$

alakban írható.

1.2. A LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE, POLINOM ESET.

Gyakran előfordul, hogy nem egyenest, hanem magasabb rendű polinomot kell alkalmazni. Látni fogjuk, hogy nagyon hasonló eredményhez jutunk ekkor is. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $m << n$, adottak az $x_1, x_2, \ldots$, $x_n \in \mathbb{R}$ alappontok és az $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek (pl. mérési eredmények). Keressük azt a $P_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j$ polinomot, melyre a

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2$$

kifejezés minimális.

A fenti feltételnek eleget tevő P_m polinomot az (x_i, y_i) $i = i, \ldots, n$, értékeket négyzetesen legjobban közelítő m-ed fokú polinomnak nevezzük.

A feladat megoldásához az

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right)^2 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$$

függvényt kell minimalizálnunk. A többváltozós függvények szélsőértékéről tanultak szerint az $F'(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0$ feltételnek eleget tevő a_j-ket keressük. A parciális deriváltakra

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - P_m(x_i)) \left(-\frac{\partial P_m}{\partial a_j}(x_i) \right) = 0$$

$(j = 0, 1, \ldots, m)$.

$$\sum_{i=1}^{n} P_m(x_i) \frac{\partial P_m}{\partial a_j}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial P_m}{\partial a_j}(x_i) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Mivel $\dfrac{\partial P_m}{\partial a_j}(x_i) = (x_i)^j$, a fenti egyenlet a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^j \sum_{k=0}^{m} a_k (x_i)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n}(x_i)^{j+k} = \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i)^j$$

$(j = 0, 1, \ldots, m)$. Ezzel a_k -kra egy lineáris egyenletrendszert kaptunk ($m+1$ darab egyenlet, $m+1$ darab ismeretlennel).

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \beta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Ekkor az egyenletrendszer

$$\left(X^T X\right)\beta = X^T y$$

alakban írható.