

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Bevezetés

Ez a jegyzet még erősen hiányos, ennek ellenére remélem segít a felkészülésben. A jelenleg fentlévő változat a gyakorlatok anyagát tartalmazza. Minden gyakorlat rövid elméleti összefoglalóval kezdődik, ezután feladatok, majd a feladatok részletes megoldásai következnek.

A gyakorlatok részben szereplő feladatok sorszáma előtt jelölések találhatók:

- (bumszli) Ezeket a feladatokat feltétlenül nézzék át. Ezek a feladatok zömében Fegyverneki Sándortól, Raisz Pétertől, kis részük a magyar valószínűségszámítás folklórból származik.
- (üres bumszli) Elméleti ismeretek feladatok formájában feldolgozva.
- * a nehéz feladatokat jelöli.

S (**S**=szimuláció) a szimulációval megoldható feladatokat jelöli. Remek szakdolgozat téma.

A jegyzet folyamatosan változik, az új változattal felülírom a régit, így érdemes időről-időre újra letölteni.

Eredményes felkészülést kívánok, tanuljanak szorgalmasan.

Miskolc, 2024. szeptember 01.

Dr. Glavosits Tamás

Tartalomjegyzék

1. Kombinatorika, Klasszikus valószínűségi mező	1
1.1. Rövid elméleti összefoglaló	1
1.1.1. A Kombinatorika alapesetei (összefoglalás)	1
1.1.2. A valószínűség fogalmának megalapozása a relatív gyakoriság segítségével	5
1.1.3. A klasszikus valószínűségi mező	6
1.1.4. Példák	9
1.1.5. Golyóhúzás urnából	12
1.2. Feladatok	13
1.2.1. Kombinatorika	13
1.2.2. További gyakorló feladatok	14
1.2.3. Bizonyítsa be ... (kombinatorika)	15
1.2.4. A klasszikus valószínűségi mező	16
1.2.5. Bizonyítsa be, hogy ... (klasszikus valószínűségi mező)	16
1.3. Megoldások	17
1.3.1. Kombinatorika	17
1.3.2. További gyakorló feladatok	18
1.3.3. Bizonyítsa be ... (kombinatorika)	22
1.3.4. A klasszikus valószínűségi mező	26
1.3.5. Bizonyítsa be, hogy ... (klasszikus valószínűségi mező)	27
2. Kolmogorov féle valószínűségi mező	30
2.1. Rövid elméleti összefoglaló	30
2.1.1. Kolmogorov-féle valószínűségi mező	30
2.1.2. A valószínűség tulajdonságai	32
2.1.3. Műveletek eseményekkel	32
2.1.4. A valószínűség geometriai kiszámítási módja	33
2.2. Feladatok	34
2.2.1. Műveletek eseményekkel	34
2.2.2. Bizonyítsa be ... (Kolmogorov féle valószínűségi mező)	34

2.2.3.	A valószínűség geometriai kiszámítási módja	35
2.3.	Megoldások	36
2.3.1.	Műveletek eseményekkel	36
2.3.2.	Bizonyítsa be ... (Kolmogorov féle valószínűségi mező)	36
2.3.3.	A valószínűség geometriai kiszámítási módja	39
3.	A Bayes tétel, események függetlensége	46
3.1.	Rövid elméleti összefoglaló	46
3.1.1.	A feltételes valószínűség	46
3.1.2.	Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel	47
3.1.3.	A lánc szabály	47
3.1.4.	Események függetlensége	47
3.2.	Feladatok	50
3.2.1.	A feltételes valószínűség	50
3.2.2.	Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel	50
3.2.3.	A lánc szabály	51
3.2.4.	Események függetlensége	51
3.2.5.	Bizonyítsa be, hogy ... (feltételes valószínűség)	53
3.3.	Megoldások	55
3.3.1.	A feltételes valószínűség	55
3.3.2.	Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel	55
3.3.3.	A lánc szabály	59
3.3.4.	Események függetlensége	59
3.3.5.	Bizonyítsa be, hogy	67
4.	Valószínűségi változók (diszkrét eset), Várható érték és szórásnégyzet	70
4.1.	Rövid elméleti összefoglaló	70
4.1.1.	Valószínűségi változók	70
4.1.2.	Diszkrét valószínűségi változók	72
4.1.3.	Diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete	72
4.1.4.	A várható érték tulajdonságai	75
4.1.5.	A szórásnégyzet tulajdonságai	76
4.1.6.	Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye	77
4.1.7.	Néhány egyszerű példa pörgettyűkkel és dobókockákkal	78
4.2.	Feladatok	81
4.2.1.	Várható érték és szórásnégyzet	81
4.2.2.	Bizonyítsa be... (eloszlásfüggvény)	81
4.3.	Megoldások	82
4.3.1.	Várható érték és szórásnégyzet	82

4.3.2.	Bizonyítsa be ... (eloszlásfüggvény)	83
5.	Nevezetes diszkrét eloszlások, abszolút folytonos valószínűségi változók	85
5.1.	Rövid elméleti összefoglaló	85
5.1.1.	A diszkrét egyenletes eloszlás	85
5.1.2.	A Bernoulli eloszlás	86
5.1.3.	A binomiális eloszlás	86
5.1.4.	A hipergeometrikus eloszlás	87
5.1.5.	A geometriai eloszlás	88
5.1.6.	A Poisson eloszlás	89
5.1.7.	Abszolút folytonos valószínűségi változók	89
5.1.8.	Módusz, medián, kvantilisek	91
5.2.	Feladatok	93
5.2.1.	Binomiális	93
5.2.2.	Hipergeometrikus eloszlás	93
5.2.3.	Geometriai eloszlás	94
5.2.4.	Egyéb feladatok	94
5.2.5.	Poisson eloszlás	95
5.2.6.	Abszolút folytonos eloszlás	95
5.2.7.	Bizonyítsa be ... (nevezetes diszkrét eloszlások)	96
5.3.	Megoldások	98
5.3.1.	Binomiális eloszlás	98
5.3.2.	Hipergeometrikus eloszlás	99
5.3.3.	Geometriai eloszlás	100
5.3.4.	Egyéb feladatok	101
5.3.5.	Poisson eloszlás	104
5.3.6.	Bizonyítsa be ... (nevezetes diszkrét eloszlások)	107
6.	Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók	116
6.1.	Rövid elméleti összefoglaló	116
6.1.1.	Az egyenletes eloszlás	116
6.1.2.	Az exponenciális eloszlás	117
6.1.3.	A normális eloszlás	117
6.2.	Feladatok	118
6.2.1.	Egyenletes eloszlás	118
6.2.2.	Exponenciális eloszlás	118
6.2.3.	Normális eloszlás	119
6.3.	Megoldások	120
6.3.1.	Egyenletes eloszlás	120

6.3.2.	Exponenciális eloszlás	121
6.3.3.	Normális eloszlás	124
7.	Minta zárthelyik és nevezetes problémák	128
7.1.	I.minta zárthelyi dolgozatok	128
7.2.	II. Buffon-féle tűprobléma	130
8.	Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)	132
8.1.	Rövid elméleti összefoglaló	132
8.1.1.	Valószínűségi vektorváltozók	132
8.1.2.	Marginális eloszlások	133
8.1.3.	Valószínűségi vektorváltozók típusai	134
8.1.4.	Várható érték vektor, variancia mátrix	135
8.1.5.	Függetlenség és korrelálatlanság	137
8.2.	Feladatok	139
8.2.1.	Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)	139
8.3.	Megoldások	140
8.3.1.	Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)	140
9.	Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)	145
9.1.	Feladatok	145
9.1.1.	Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)	145
9.2.	Megoldások	147
9.2.1.	Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)	147
10.	Markov, Csebisev egyenlőtlenség, Bernoulli-féle nagy számok törvénye, Köz- ponti határeloszlás tétel, Moivre-Laplace tétel	153
10.1.	Rövid elméleti összefoglaló	153
10.2.	Feladatok	155
10.3.	Megoldások	156
11.	Matematikai statisztika I. Alapstatisztikák, Maximum-likelihood becslés	158
11.1.	Rövid elméleti összefoglaló	158
11.1.1.	Alapstatisztikák	159
11.1.2.	A maximum-likelihood becslés	161
12.	Matematikai Statisztika II. (intervallumbecslések)	164
12.1.	Rövid elméleti összefoglaló	164
12.1.1.	Intervallumbecslések	164

13. Matematikai statisztika III. hipotézisvizsgálat	168
13.1. Rövid elméleti összefoglaló	168
13.1.1. Hipotézisvizsgálatok	168
13.1.2. Az egymintás U-próba	170
13.1.3. Az egymintás t-próba	171
13.1.4. A kétmintás u-próba	172
13.1.5. A kétmintás t-próba	173
13.1.6. Az F-próba	173
13.1.7. A khí-négyzet próba	174
13.1.8. Illeszkedésvizsgálat	175
13.1.9. Normális eloszlásból származtatott eloszlások	176

1. fejezet

Kombinatorika, Klasszikus valószínűségi mező

1.1. Rövid elméleti összefoglaló

1.1.1. A Kombinatorika alapesetei (összefoglalás)

1. Faktoriális függvény:

$$n! \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n, & \text{ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

2. Binomiális együttható:

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

3. Polinomiális együttható:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$; $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Az elemi kombinatorika alapfeladatainak két csoportja van, a sorba-rendezés és a kiválasztás.

I. Sorba rendezés, más szóval permutáció: Adott n elem, ezeknek keressük az összes lehetséges sorrendjét. A permutációnak két fajtája van: az ismétlés nélküli és az ismétléses.

1. **Ismétlés nélküli permutáció:** Az n darab elem páronként különböző. Az n elem ismétlés nélküli permutációinak számát P_n módon jelöljük. $P_n = n!$ ($n \in \mathbb{Z}_+$).
2. **Ismétlésese permutáció:** Az n darab elem között $k_1, k_2, \dots, k_r$ azonos tulajdonságú elem szerepel. Az azonos tulajdonságú elemek egymás közötti sorrendjét nem vesszük figyelembe. A lehetséges sorrendek számát ebben az esetben $P_n^{k_1, \dots, k_r(i)}$ módon jelöljük.

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r(i)} = \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} \doteq \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!},$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$; $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

II. Kiválasztás: Adott n elem, melyek közül kiválasztunk k darabot.

Ha számít a kiválasztott elemek sorrendje sorrendje, akkor **variáció**ról, ha nem számít, akkor **kombináció**ról beszélünk.

Akár variációról, akár kombinációról beszélünk, a kiválasztási feladatokat csoportosíthatjuk aszerint is, hogy egy elem legfeljebb egyszer, vagy többször is választható. Az előbbi esetben **ismétlés nélküli**, az utóbbiban **ismétléses** kiválasztásról beszélünk.

1. Az n elem k tagú ismétlés nélküli variációinak a számát V_n^k módon jelöljük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdots (n-k+1) = (n)_k.$$

2. Az n elem k tagú ismétléses variációinak a számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük. $V_n^{k(i)} = n^k$.
3. Az n elem k tagú ismétlés nélküli kombinációinak a számát C_n^k módon jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

4. Az n elem k tagú ismétléses kombinációinak a számát $C_n^{k(i)}$ módon jelöljük.

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

A kiválasztásos feladatok típusait az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	Variáció	Kombináció
Ism. nélküli	$V_n^k = (n)_k$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
Ismétléses	$V_n^{k(i)} = n^k$	$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

I. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$

III. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

A binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{i=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}; a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

A kombinatorika 3 ismétlés nélküli alapesetét konkrét példák segítségével illusztráljuk. Az ismétléses alapfeladatok hasonló gondolatmenet segítségével számolhatók. Ez alól talán csak csak az ismétléses kombináció a kivétel, ezt azonban a "Bizonyítsa be ... (kombinatorika)" részben részletesen ismertetjük.

Példa Hány féle sorrendje van az A, B, C betűknek? A megoldás nagyon egyszerű, módszeresen megkeressük az összes lehetséges sorrendet, majd ezeket megszámlálásával megkapjuk a választ.

A, B, C
 A, C, B
 B, A, C
 B, C, A
 C, A, B
 C, B, A

Tehát az összes lehetséges sorrend száma $3! = 6$.

Példa Konstruáljuk meg az 5 elemű $\{A, B, C, D, E\}$ halmaz összes 3 tagú ismétlés nélküli variációit. Ezt a legkönnyebben egy fagráf alkalmazásával tudjuk megtenni, azonban a kapott fagráf túl nagy lenne. A gyökér 5 felé ágazik el, a kapott 5 csúcs mindegyike 4 felé, ezek a csúcsok 3 felé ágaznak el. Tehát a keresett ismétlés nélküli variációk száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Ha a

kapott fagráfot bejárjuk a gyökértől a levelekig, akkor megkapjuk mind a 60 variációt, melyek a következők:

A,B,C	B,A,C	C,A,B	D,A,B	E,A,B
A,B,D	B,A,D	C,A,D	D,A,C	E,A,C
A,B,E	B,A,E	C,A,E	D,A,E	E,A,D
A,C,B	B,C,A	C,B,A	D,B,A	E,B,A
A,C,D	B,C,D	C,B,D	D,B,C	E,B,C
A,C,E	B,C,E	C,B,E	D,B,E	E,B,D
A,D,B	B,D,A	C,D,A	D,C,A	E,C,A
A,D,C	B,D,C	C,D,B	D,C,B	E,C,B
A,D,E	B,D,E	C,D,E	D,C,E	E,C,D
A,E,B	B,E,A	C,E,A	D,E,A	E,D,A
A,E,C	B,E,C	C,E,B	D,E,B	E,D,B
A,E,D	B,E,D	C,E,D	D,E,C	E,D,C

Az eredmény valóban $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Példa Állítsuk elő az $\{A, B, C, D, E\}$ 5 halmaz összes 3 elemű részhalmazát.

$\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$, $\{A, B, E\}$,
 $\{A, C, E\}$, $\{B, C, E\}$, $\{A, D, E\}$, $\{B, D, E\}$, $\{C, D, E\}$,

tehát az 5 elemű halmaznak 10 három elemű részhalmaza van. Most nézzük, meg, hogy hogyan jön ki ez a szám. az előbb már megkerestük az 5 elemű halmaz 3 tagú variációit. Ezek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Soroljuk egy osztályba azokat a sorozatokat, amelyek csak sorrendben különböznek egymástól.

A,B,C	A,B,D	A,C,D	B,C,D	A,B,E	A,C,E	B,C,E	A,D,E	B,D,E	C,D,E
A,C,B	A,D,B	A,D,C	B,D,C	A,E,B	A,E,C	B,E,C	A,E,D	B,E,D	C,E,D
B,A,C	B,A,D	C,A,D	C,B,D	B,A,E	C,A,E	C,B,E	D,A,E	D,B,E	D,C,E
B,C,A	B,D,A	C,D,A	C,D,B	B,E,A	C,E,A	C,E,B	D,E,A	D,E,B	D,E,C
C,A,B	D,A,B	D,A,C	D,B,C	E,A,B	E,A,C	E,B,C	E,A,D	E,B,D	E,C,D
C,B,A	D,B,A	D,C,A	D,C,B	E,B,A	E,C,A	E,C,B	E,D,A	E,D,B	E,D,C

Minden osztályba $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ sorozat kerül. Tehát a 3 elemű részhalmazok száma

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10.$$

1.1.2. A valószínűség fogalmának megalapozása a relatív gyakoriság segítségével

Kétféle esemény van, a determinisztikus és a sztochasztikus. A determinisztikus események szükségszerűen bekövetkeznek, a sztochasztikus események bekövetkezése a véletlentől függ. A valószínűség egy 0 és 1 közé eső szám, amely azt méri, hogy egy véletlentől függő esemény bekövetkezésére mennyire lehet számítani. Ez azonban nem definíció.

A valószínűség fogalma a Kolmogorov féle valószínűségi mező segítségével definiálható. Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek nevezzük az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast, ahol

- Ω egy nemüres halmaz, neve eseménytér, az Ω elemei az elemi események.
- $\mathcal{F}$ egy halmazcsalád, amelynek elemei az Ω bizonyos részhalmazai, az $\mathcal{F}$ elemeit eseményeknek nevezzük;
- $\mathbb{P}$ egy halmazfüggvény, amely az $\mathcal{F}$ halmazcsalád minden halmazához hozzárendel egy valós számot. A $\mathbb{P}$ halmazfüggvényt valószínűségnek; illetve, ha A egy esemény, akkor a $\mathbb{P}(A)$ valós számot az A esemény valószínűségének nevezzük.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező fogalmához még hozzátartozik, hogy az események halmazának, azaz $\mathcal{F}$ -nek rendelkeznie kell bizonyos tulajdonságokkal, nevezetese $\mathcal{F}$ egy σ -algebra. Illetve a $\mathbb{P}$ sem lehet egy tetszőleges halmazfüggvény, hanem rendelkeznie kell bizonyos tulajdonságokkal, amelyeket az úgynevezett Kolmogorov-féle axiómák foglalnak össze.

Egy A esemény valószínűségét úgy számoljuk ki, hogy megadunk egy matematikai modellt, amely leírja a kísérletet, azaz megadjuk Ω -t, $\mathcal{F}$ -et és $\mathbb{P}$ -t és az $\mathcal{F}$ és $\mathbb{P}$ megfelelő tulajdonságai alapján már ki tudjuk számolni a $\mathbb{P}(A)$ valószínűséget.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mezőben a valószínűségnek van három fontos tulajdonsága: a nemnegativitás; az egyre normáltság; és a véges additivitás. (Igaz, hogy a Kolmogorov féle valószínűségi mezőben a véges additivitás helyett σ -additivitás szerepel, azonban a σ -additivitásból levezethető a véges additivitás és nekünk egyelőre elegendő lesz a véges additivitás.)

A valószínűség fogalma a relatív gyakoriság fogalmából származtatható. Tekintsünk egy olyan kísérletet, amely akárhányszor függetlenül elvégezhető. Jelöljön A egy eseményt. Például szabályos dobókockával dobunk, és A jelöli azt az eseményt, hogy 1-est, vagy 6-ost dobunk. Végezzük el a kísérletet n -szer (mondjuk 100-szor). Jelölje k_n azt a számot, hogy hányszor következett be az A esemény. Ezt a számot gyakoriságnak, a $\frac{k_n}{n}$ hányadost relatív gyakoriságnak nevezzük.

Ha n elég nagy, akkor a $\frac{k_n}{n}$ relatív gyakoriság egy jól meghatározott érték körül fog ingadozni, amelyet az A esemény valószínűségének fogunk nevezni. A relatív gyakoriság rendelkezik a nemnegativitással; az 1-re normáltság és a véges additivitás tulajdonságokkal.

1. Nemnegativitás: a relatív gyakoriság nemnegatív.
2. Egyre normáltság: Jelölje Ω azt az eseményt, amely a kísérlet bármilyen kimenetele esetén bekövetkezik. Neve biztos esemény. A biztos esemény relatív gyakorisága 1.
3. Véges additivitás: Legyen A és B egymást kizáró események, azaz olyan események, amelyek egyidejűleg nem tudnak bekövetkezni, ezeknek az eseményeknek a relatív gyakorisága legyen $\frac{k_n}{n}$ illetve $\frac{l_n}{n}$. Jelölje $A + B$ azt az eseményt, amely akkor következik be, amikor az A vagy a B esemény bekövetkezik (itt a "vagy" a kijelentéslogikai értelemben vett "vagy", azaz a diszjunkció). Ekkor az $A + B$ esemény relatív gyakorisága $\frac{k_n + l_n}{n}$. Mivel $\frac{k_n + l_n}{n} = \frac{k_n}{n} + \frac{l_n}{n}$, így ha A és B egymást kizáró események, akkor az $A + B$ esemény relatív gyakorisága egyenlő az A és a B események relatív gyakoriságainak az összegével.

A relatív gyakoriság fenti három tulajdonságának az axiomatizálásával kapjuk a Klasszikus valószínűségi mező axiómáit, amely a Kolmogorov-féle valószínűségi mező speciális esete.

1.1.3. A klasszikus valószínűségi mező

I. Axiómarendszer Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük, ha

- Ω egy nemüres véges halmaz, az **eseménytér**. Az eseménytér elemei az **elemi események**. Az elemi események nem események. Az eseménytér a vizsgált kísérlet összes lehetséges kimenetelének a halmaza.
- $\mathcal{F}$ az események halmaza. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, azaz az eseménytér minden részhalmaza esemény.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, amelyet **valószínűségnek** nevezünk. Ha A egy esemény, akkor a $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezzük.

A $\mathbb{P}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal (axiómák).

1. **A valószínűség nemnegatív**, azaz $\mathbb{P}(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.
2. **A valószínűség 1-re normált**, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. **A valószínűség végesen additív**, azaz, ha A és B diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

A véges additivitást ekvivalens módon két esemény helyett n eseményre is megfogalmazhatjuk. Tehát, ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

4. Az Ω bármely két egyelemű részhalmaza - mint esemény - egyforma valószínűséggel következik be, azaz

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) \quad (\omega_1, \omega_2 \in \Omega).$$

Megjegyzés Ne tévesszük össze a különféle P betűket:

- $\mathcal{P}(X)$ egy X halmaz összes részhalmazának a halmazát jelöli. Ez az úgynevezett írott, vagy kaligrafikus P betű. Nézzünk néhány példát:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}, \\ \mathcal{P}(\{1\}) &= \{\emptyset, \{1\}\}, \\ \mathcal{P}(\{1, 2\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \\ \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Könnyű látni, hogy egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

- A $\mathbb{P}$ (a dupla szárú P betű) a valószínűséget jelöli. Időnként a feladatokba a valószínűséget egyszerűen P -vel jelöljük.

A szövegkörnyezetből mindig egyértelműen kiderül, hogy melyikre gondolunk.

A klasszikus valószínűségi mező tulajdonságai: Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező és legyen $|\Omega| = n$.

1. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén;
2. Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}.$$

Bizonyítás. Mivel a valószínűség 1-re normált és végesen additív, így kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = n\mathbb{P}(\{\omega\}) \quad (\omega \in \Omega),$$

amiből kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Megint felhasználva a valószínűség véges additivitását kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{\omega_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\{\omega_{i_j}\}) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}.$$

□

Most megadunk egy további axiómarendszert, amely ekvivalens az előzővel.

II. Axiómarendszer Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük, ha

- Ω egy nemüres véges halmaz, az **eseménytér**. Az eseménytér elemei az **elemi események**. Az elemi események nem események;
- $\mathcal{F}$ az események halmaza. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, azaz az eseménytér minden részhalmaza esemény;
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, amelyet **valószínűségnek** nevezünk. Ha A egy esemény, akkor a $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezzük;

A valószínűség (függvényt)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (A \in \mathcal{F}).$$

A fenti két axiómarendszer egyenértékű. Mindkettőnek van előnye illetve hátránya.

Az I. Axiómarendszernek az az előnye, hogy csak kicsit kell módosítanunk rajta és máris megkapjuk a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt, amit az egész félév során használni fogunk.

A II. Axiómarendszer előnye, hogy ezt használtuk a középiskolában, még ha ez nem is volt explicit módon kimondva. A II axiómarendszerben is érvényes a véges additivitás. Ugyanis nyilvánvaló, hogy

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad (\text{ha } A \cap B = \emptyset).$$

Így kapjuk a valószínűség véges additivitását:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad (\text{ha } A \cap B = \emptyset). \end{aligned}$$

A II axiómarendszer alkalmazásával közvetlenül megmutatható, hogy hogyan jön ki a középiskolában tanult logikai szita formulából $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ a valószínűségszámítás logikai szita formulája $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

A levezetés rendkívül egyszerű:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

A valószínűségszámítás szita formuláját be tudjuk bizonyítani diszjunktálás segítségével is és ez utóbbi bizonyítás a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőben is érvényben marad.

1.1.4. Példák

Először kockadobásos feladatokat oldunk meg, azután kártyából húzunk.

Példa. Dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy kettővel, vagy hárommal osztható számot kapunk. Határozzuk meg az A valószínűségét!

Mo.:

$$\Omega \doteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad A = \{2, 3, 4, 6\}.$$

A dobókocka szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Példa. Két dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Számoljuk ki az

$$A \doteq \text{a két dobott szám összege osztható kettővel, vagy hárommal}$$

esemény valószínűségét.

Mo.: Legyen

$$\Omega \doteq \{(i, j) | i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 6^2 = 36$. A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Az A esemény valószínűségének a kiszámolásához érdemes észrevenni, hogy a dobott két szám összege csak 2, 3, ..., 12 lehet. Ezek közül a kettővel, vagy hárommal oszthatók a

$$2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$$

Ha táblázatba rendezzük az Ω elemeit, akkor az azonos összegű számpárok egy a táblázat bal alsó sarkából a jobb felsőbe mutató átlóval párhuzamos vonalba rendeződnek, így könnyű őket összeszámolni.

	•	•	•		•	
2	•	•		•		•
3	•		•		•	•
4		•		•	•	•
5	•		•	•	•	
6		•	•	•		•
	8	9	10		12	

Tehát a kedvező esetek száma:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 = 24.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Az előző feladatban is $\frac{2}{3}$ -ot kaptunk. Vajon ez a véletlen műve, vagy ha több dobókockával dobunk (mondjuk 3-mal, 4-gyel ...) és azt a valószínűséget számoljuk hogy a dobott számok összege osztható 2-vel vagy 3-mal), akkor is $\frac{2}{3}$ -ot kaptunk? Erre a kérdésre könnyen megkapható a válasz egy megfelelő módon megírt számítógépes program segítségével. Olyan programot is írhatunk, amely ténylegesen összeszámolja a kedvező és az összes esetek számát, azaz matematikai valószínűséget számol, illetve olyat is írhatunk, amely sokszor dob kockával. Ez utóbbi esetben a matematikai valószínűséget relatív gyakorisággal közelítjük. A módszert szimulációnak nevezzük. A szimuláció matematikai értelemben nem bizonyító erejű, de elvezethet minket olyan sejtések megfogalmazásához, amelyek matematikai eszközökkel bizonyíthatók.

Most kártyából húzunk lapot, vagy lapokat.

Példa. A harminckét lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy pirosat húzunk; B , hogy ászt húzunk. Határozzuk meg az A és a B és az $A \cap B$ események valószínűségét.

Mo.: A magyar kártyában van 4 szín (piros, zöld, makk, tök) és 8 szám (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász (=disznó)). Így a magyar kártya lapjainak száma 32. Az Ω a lapok halmaza, azaz

$$\Omega = \{P_7, P_8, \dots, P_d, Z_8, \dots\}$$

Az A , B , illetve az $A \cap B$ halmazok elemeit is könnyű megadni:

$$\begin{aligned} A &= \{P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_a, P_f, P_k, P_d\}, \\ B &= \{P_d, Z_d, M_d, T_d\}, \\ A \cap B &= \{P_d\}, \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Ezt követően eltávolítjuk a pakliból a zöld alsót. Ez nyilván egy új szituáció, amely új modellt igényel. Megváltozik-e az A , B és az $A \cap B$ események valószínűsége?

Mo.: Változnak a valószínűségek, mivel $|\Omega| = 31$, azonban az A , a B és az $A \cap B$ halmazok számossága nem változik. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{31}, \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{31}, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{31}.\end{aligned}$$

Példa: Magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Határozzuk meg az A és a B események valószínűségét.

Hogyan változik a megoldás, ha két pakli magyar kártyát összerakunk és a kapott 64 lapból húzunk ki visszatevés nélkül 3 lapot.

Mo: Jelölje Ω a kísérlet lehetséges kimeneteleinek a halmazát. Az Ω a magyar kártya lapjaiból alkotott rendezett hármasok halmaza, melyek páronként különböző lapokból állnak. Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező, így alkalmazható a kedvező/összes képlet. Könnyű látni, hogy

$$|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30, \quad |A| = 8 \cdot 31 \cdot 30, \quad |B| = 31 \cdot 30 \cdot 8,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}.$$

A példa második felének megoldása során problémát okozhat, hogy ha két teljesen egyforma kártyapaklit összerakunk, akkor a lapok megduplázódnak, így a modellben az egyforma lapokat nem tudjuk megkülönböztetni. Azonban az egyforma lapokat is meg kell különböztetni, ami úgy történik, hogy mondjuk arra gondolunk, hogy az egyik pakli piros, a másik kék hátlapú lapokból áll. Ezt követően a megoldás már teljesen analóg az egy paklis változattal, azaz

$$|\Omega| = 64 \cdot 63 \cdot 62, \quad |A| = 16 \cdot 63 \cdot 62, \quad |B| = 63 \cdot 62 \cdot 16,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$$

adódik ebben az esetben is.

1.1.5. Golyóhúzás urnából

Ebben a részben tárgyaljuk a visszatevése és a visszatevés nélküli golyóhúzást urnából. Mindkét esetben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

- N az urnában lévő golyók száma;
- s : az urnában lévő piros golyók száma ($0 \leq s \leq N$);
- $N - s$: az urnában lévő fehér golyók száma;
- n : golyót húzunk ki az urnából;
- k : a kihúzott golyók közül a piros golyók száma.

A golyók halmaza:

$$G \doteq \{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}.$$

A golyókat mindkét esetben egyenként húzzuk ki az urnából. A visszatevése esetében, a kihúzott golyót - miután megnéztük a színét - visszaradjuk az urnába, majd újra húzunk. A visszatevés nélküli esetben a kihúzott golyó nem kerül vissza az urnába.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a kihúzott golyók között k db piros golyó van. A $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ valószínűséget szeretnénk meghatározni.

Mivel a golyóhúzás kimenetelei a visszatevése és a visszatevés nélküli esetekben egyforma valószínűséggel következnek be, így alkalmas modell esetén klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Golyóhúzás visszatevéssel. Legyen $\Omega \doteq G \times G \times \dots \times G = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G \text{ } (i = 1, 2, \dots, n)\}$. A keresett valószínűség kombinatorikus megfontolások alapján könnyen megkapható:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

ahol $p = \frac{s}{N}$, ami a piros golyó húzásának a valószínűsége.

Golyóhúzás visszatevés nélkül. Legyen $\Omega \doteq \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G \text{ } g_j \neq g_k, \text{ ha } j \neq k\}$. A keresett valószínűség kombinatorikus megfontolások alapján most is könnyen megkapható:

$$p_k = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (\max(0, n - (N - s)) \leq k \leq \min(s, n)).$$

A k szám ebben az esetben már nem lehet akármennyi. Ugyanis $N - s$ a fehér golyók száma, így ha $n - (N - s) > 0$, akkor az összes fehér golyót kihúztuk, de még kell húznunk. Ekkor $n - (N - s)$ -nél kevesebb piros golyót nem tudunk húzni. A $k \leq s$ és a $k \leq n$ feltételek a golyóhúzás visszatevés nélküli volta miatt természetesek.

1.2. Feladatok

1.2.1. Kombinatorika

- **1. Feladat.** *Hányféleképpen lehet az*

$1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$

számjegyekből 7-jegyű számot felírni.

- **2. Feladat.** *Hányféleképpen lehet a*

$0, 0, 0, 1, 1, 2, 2$

számjegyekből 7-jegyű számot felírni.

- **3. Feladat.** *Hányféleképpen lehet a*

$0, 0, 0, 1, 1, 2, 2$

számjegyekből 7-jegyű páros számot felírni.

- 4. Feladat.** *Hány háromjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha*

a. *Minden jegy legfeljebb egyszer választható?*

b. *A számjegyek többször is választhatóak?*

- **5. Feladat.** *Egy dobozban 10 golyó van, közülük 3 fehér, 5 piros, és 2 kék színű. A 10 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány különböző sorrendben húzhatjuk a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg?*

- **6. Feladat.** *Hányféleképpen osztható szét 5 ezer forint jutalom 4 dolgozó között, ha mind-egyik dolgozó ezerrel osztható összegű jutalmat kaphat, de a 0 Ft jutalom is megengedett.*

- **7. Feladat.** *Hányféleképpen rakhatunk be 3 egyforma levelet 9 (beszámozott) rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és*

a. *egy rekeszbe maximum egy levelet tehetünk?*

b. *egy rekeszbe több levelet is tehetünk?*

1.2.2. További gyakorló feladatok

8. Feladat. *Hányféle sorrendje van az*

- a. *A, B, C betűknek?*
- b. *A, A, B, B, B betűknek?*
- c. *A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

9. Feladat. *Kódszavakat gyártunk.*

- a. *Hány 3 hosszúságú kódszó készíthető a 0, 1 karakterekből?*
- b. *Hány 10 hosszúságú kódszó készíthető az A, B, C karakterekből?*

10. Feladat. *Hányféleképpen lehet 7 vendéget 3 vendégházba elszállásolni, ha a vendégházak rendre 2, 3, illetve 2 személyesek?*

11. Feladat. *14 versenyző indul egy futóversenyen. Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések (arany, ezüst, bronz), ha nincs holtverseny?*

12. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTÓ-szelvényt?
(13+1 mező van, minden egyes mezőbe a 0, 1, X jelek valamelyikét kell beírni.)*

13. Feladat. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy LOTTÓ-szelvényt?
(90 szám közül 5-t kell megjelölni.)*

14. Feladat. *Hányféleképpen lehet 4 db levelet 10 beszámozott rekeszbe helyezni, ha*

- a. *a levelek egyformák és egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- b. *a levelek egyformák és egy rekeszbe több levél is kerülhet?*
- c. *a levelek is be vannak számozva és egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet?*
- d. *a levelek is be vannak számozva és egy rekeszbe több levél is kerülhet?*

15. Feladat. *Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 10-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákba 4 db cukorkát rak véletlenszerűen. Tartalmuk szerint hányféle zsák keletkezhet a töltés során?*

16. Feladat. Egy távol-keleti küzdősport versenyen egy nagymester adja át az érmet az első 4 helyezettnek, majd egy szem cukorkát is nyom a kezükbe. Hányféleképpen tudja a nagymester kiosztani a 10-féle cukorkát a 4 sportolónak, ha a nagymester egy olyan dobozból szedi ki véletlenszerűen a cukorkákat, amely minden cukorkafajtából

a. pontosan 4-et tartalmaz?

b. pontosan 1-et tartalmaz?

17. Feladat. Hófehérke levelet ír a hét törpének, de ügyel arra, hogy egyik törpe se a neki címzett levelet kapja meg. Hányféleképpen teheti ezt meg?

1.2.3. Bizonyítsa be ... (kombinatorika)

○18. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$.

○19. Feladat. Bizonyítsuk be a **binominális együtthatókra vonatkozó addíciós összefüggést**, mely szerint

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (n \geq 0, k \geq 0, n \geq k)$$

○20. Feladat. Bizonyítsuk be a **binominális tételt**, nevezetesen, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

○21. Feladat. Bizonyítsuk be a **polinomiális tételt**, azaz

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1 \dots k_r} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}.$$

○22. Feladat. Határozza meg az $x_1 + \dots + x_m = n$ ($m, n \in \mathbb{Z}_+$) egyenlet

a. Nemnegatív egész megoldásainak a számát;

b. Pozitív egész megoldásainak a számát;

○23. Feladat. Van m tigrisünk és n oroszlánunk, mindenesetre több oroszlánunk, mint tigrisünk. Hányféle sorrendben lehet a kör alakú porond szélén dobogókra ültetni az $m+n$ számú állatot, hogy bármely két tigris közé kerüljön legalább egy oroszlán? Oldjuk meg a feladatot $m=4$ $n=6$ speciális esetben is.

1.2.4. A klasszikus valószínűségi mező

•**S24. Feladat.** *Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 11 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 6 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?*

•**S25. Feladat.** *Egy fogadásra egymástól függetlenül 5 angol, 3 francia és 4 olasz diplomata érkezik. Mi a valószínűsége, hogy az első három vendég érkezési sorrendje angol-francia-olasz?*

1.2.5. Bizonyítsa be, hogy ... (klasszikus valószínűségi mező)

◦**26. Feladat.** *Igazolja, hogy klasszikus valószínűségi mezőben a valószínűség kiszámítására alkalmazható a "kedvező/összes" képlet.*

◦**27. Feladat.** *Golyóhúzás urnából visszatevéssel. Igazolja a*

$$p_k = \frac{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

képletet.

◦**28. Feladat.** *Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül. Igazolja a*

$$p_k = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

képletet.

1.3. Megoldások

1.3.1. Kombinatorika

- 1. Megoldás. A számjegyek: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3. A hétjegyű számok száma:

$$P_7^{3,2,2(i)} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210.$$

- 2. Megoldás. A számjegyek: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2. A hétjegyű számok száma:

$$\frac{4 \cdot 6!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 120,$$

ugyanis az első helyre 4 db számjegyet írhatunk - az azonos számjegyeket is különbözőnek tekintve - a többi helyre meg 6!-féleképpen tudjuk beírni a többi számjegyet. Mivel a permutáció ismétléses, így "be kell osztani" $3! \cdot 2! \cdot 2!$ -sal.

- 3. Megoldás. A számjegyek: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2. A hétjegyű páros számok számát keressük. A 2. Feladathoz hasonlóan járunk el, de most a számok az első és utolsó számjegyeit is kell figyelni. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

	0	2
1	$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 20$
2	$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$	$\frac{2 \cdot 1 \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 10$

A sorok a lehetséges első jegyeket, az oszlopok a lehetséges utolsó jegyeket, a cellák a képezhető 7-jegyű számok számát tartalmazzák, így kapjuk, hogy a képezhető 7-jegyű páros számok száma: $30+20+30+10=90$.

4. Megoldás. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 jegyekből képezhető háromjegyű páros számok száma, ha

- a. Minden jegy legfeljebb egyszer választható esetszétválasztással számolható: A 0-ra végződő páros számok száma: $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$. A nem 0-ra végződő páros számok száma: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$. Tehát összesen $20 + 32 = 52$ szám képezhető.

- b. A számjegyek többször is választhatóak, akkor nem kell alkalmaznunk esetszétválasztást, $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ szám képezhető.

- 5. Megoldás. A 3 fehér 5 piros és két kék golyó összes sorrendjének a száma:

$$P_{10}^{3,5,2(i)} = \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520.$$

•6. Megoldás. Az 5 ezer forint a 4 dolgozó között

$$C_4^{5(i)} = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

féleképpen osztható szét.

•7. Megoldás. a) A 3 levelet a 9 rekeszbe

$$C_9^3 = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

féleképpen lehet elhelyezni, ha egy rekeszbe maximum egy levelet tehetünk. b) A 3 levelet a 9 rekeszbe

$$C_9^{3(i)} = \binom{9+3-1}{3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

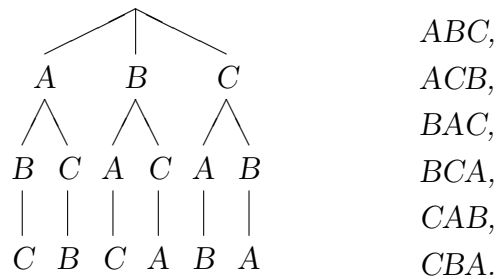
féleképpen lehet elhelyezni, ha egy rekeszbe több levelet is tehetünk.

1.3.2. További gyakorló feladatok

8. Megoldás.

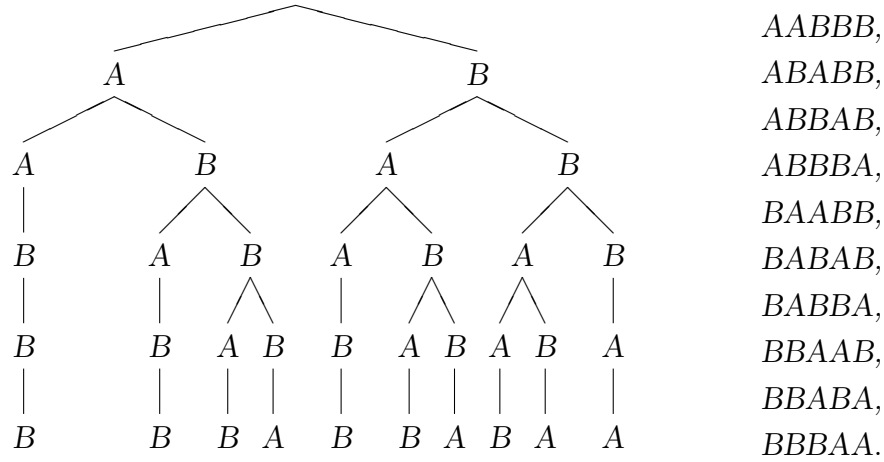
a. Az A, B, C betűk összes sorrendjének a száma $P_3 = 3! = 6$.

Bár a lehetséges sorrendek előállítására nincs szükségünk, most mégis megadjuk a sorrendeket egy alkalmas gráf segítségével:



b. Az A, A, B, B, B betűk összes lehetséges sorrendjének a száma: $P_5^{2,3(i)} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Mivel nincs túl sok lehetőség, ezért a sorrendeket megkereshetjük egy alkalmas gráf segítségével:

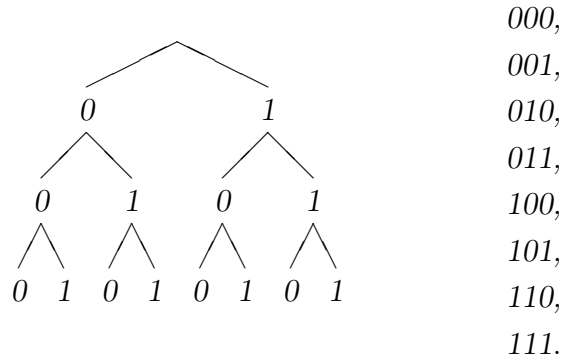


a. Az A, A, B, B, B, C, C betűk összes lehetséges sorrendjének a száma: $P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2!3!2!} = 420$.

9. Megoldás. Kódszavakat alkotunk.

a. A keresett kódok száma: $V_2^{3(i)} = 2^3 = 8$.

A lehetőségek ebben az esetben is megkereshetők egy alkalmas gráf segítségével:



b. A keresett kódszavak száma: $V_3^{10(i)} = 3^{10} = 59049$.

10. Megoldás. A feladat többféleképpen is megoldható.

I.Mo.: A 7 vendéget a 3 vendégházban

$$\begin{aligned}
 & \binom{7}{2} \binom{7-2}{3} \binom{7-(2+3)}{2} = \\
 &= \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{(7-2)!}{3!(7-(2+3))!} \cdot \frac{(7-(2+3))!}{2!(7-(2+3+2))!} = \\
 &= \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \\
 &= P_7^{2,3,2(i)} = 420.
 \end{aligned}$$

féleképpen lehet elszállásolni, tehát a feladatot ismétlés nélküli kombináció segítségével oldottuk meg.

II.Mo.: A 2, 3, 2 személyes vendégházakat jelölje rendre A, B, C. A vendégek legyenek beszámozva 1-től 7-ig. Az alábbi táblázat a vendégek vendégházakba történő egy lehetséges elhelyezését mutatja.

1	2	3	4	5	6	7
A	B	A	C	B	C	B

Így könnyű látni, hogy a vendégek vendégházakba történő elhelyezéseinek a száma egyenlő az A,A,B,B,B,C,C betűk összes lehetséges sorrendjeinek a számával, ami

$$P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 420,$$

azaz ezúttal sikerült a feladatot közvetlenül ismétléses permutáció segítségével megoldani.

11. Megoldás. A dobogós helyezések lehetőségeinek száma: $V_{14}^{3(i)} = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$.

12. Megoldás. A TOTÓ szelvényt $V_3^{14} = 3^{14} = 4782969 \approx 5M$ féleképpen lehet kitölteni.

13. Megoldás. A LOTTO szelvényt

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268 \approx 44M.$$

féleképpen lehet kitölteni.

14. Megoldás. Elhelyezzük a 4 db levelet 10 beszámozott rekeszbe. Valahányszor elhelyezünk egy levelet egy rekeszbe, mindannyiszor kiválasztjuk az adott rekeszt, illetve annak a sorszámát. Így mind a négy általunk vizsgált esetben kiválasztási feladatot kell megoldanunk, ahol $n = 10$, $k = 4$. Ha a levelek egyformák, akkor nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, ezekben az esetekben kombinációkat számolunk. Ha a levelek különbözőek, akkor számít sorrend, így ekkor variációkat számolunk. Ha egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet, akkor a kiválasztás ismétlés nélküli. Ha egy rekeszbe több levelet is rakhatunk, akkor egy elem többször is választható, azaz a kiválasztás ismétléses.

- a. Ha a levelek egyformák és egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet, akkor lehetőségek száma:

$$C_{10}^4 = \binom{10}{4} = 210.$$

- b. Ha a levelek egyformák és egy rekeszbe több levél is kerülhet, akkor lehetőségek száma:

$$C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} \binom{13}{4} = 715.$$

- c. Ha a levelek is be vannak számozva és egy rekeszbe legfeljebb egy levél kerülhet, akkor lehetőségek száma:

$$V_{10}^4 = (10)_4 = 5040.$$

- d. Ha a levelek is be vannak számozva és egy rekeszbe több levél is kerülhet, akkor lehetőségek száma:

$$V_{10}^{4(i)} = 10^4 = 10000.$$

15. Megoldás. Cukorkacsomagoló üzem. A rekeszes feladat b. esetének az átfogalmazása, így a tartalmuk lapján különböző zsákocskák száma:

$$C_{10}^{4(i)} = \binom{10+4-1}{4} \binom{13}{4} = 715.$$

16. Megoldás. (Judo verseny, díjkiosztás)

- a. Ha a dobozban minden cukorkaféleségből pontosan 4, vagy legalább 4 van, akkor ez a rekeszes leveles feladat d. esetének az átfogalmazása, így kapjuk, hogy a lehetőségek száma:

$$V_{10}^{4(i)} = 10^4 = 10000.$$

- b. Ha a dobozban minden cukorkaféleségből pontosan 1 van, akkor ez a rekeszes leveles feladat c. esetének az átfogalmazása, így a lehetőségek száma:

$$V_{10}^4 = (10)_4 = 5040.$$

17. Megoldás. A Hófehérkét és a hét törpét tartalmazó feladat egy egyszerű szita formulás feladat. A keresett sorrendek száma:

$$7! - \binom{7}{1}6! + \binom{7}{2}5! - \binom{7}{3}4! + \binom{7}{4}3! - \binom{7}{5}2! + \binom{7}{6}1! - \binom{7}{7}0! = 1854.$$

1.3.3. Bizonyítsa be ... (kombinatorika)

◦18. Megoldás. Többféle megoldás is ismert.

I.Mo: A feladat átfogalmazható úgy, hogy hányféleképpen lehet k db egyforma levelet elhelyezni n db (beszámozott) rekeszbe úgy, hogy 1 rekeszbe több levelet is rakhatunk. A rekeszeket tudjuk úgy ábrázolni, hogy csak az oldalukat jelöljük egy függőleges vonallal, illetve a legelső rekesz bal és a legutolsó rekesz jobb oldali falát elhagyjuk. A leveleket bumszlikkal jelöljük. Pl. 3 golyó 5 rekeszbe egy lehetséges elhelyezése az alábbi ábrán látható:



Így kapjuk, hogy

$$C_n^{k(i)} = \mathbb{P}_{n+k-1}^{k, (n-1)(i)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

II.Mo: Az n elemű halmaz, amely elemei közül a k elemet kiválasztjuk, legyen az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz. Mivel a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, így feltehetjük, hogy azok növekvő sorozatot alkotnak. Legyenek mondjuk a kiválasztott elemek $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ úgy, hogy $\{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \mid x_i \in \{1, 2, \dots, n\}, i = 1, 2, \dots, k\}$. Ehhez a k tagú sorozathoz rendeljük hozzá az $\{x_1 + 0, x_2 + 1, \dots, x_k + k - 1\}$ sorozatot. Ennek a sorozatnak a tagjai már különbözőek. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű egyértelmű kapcsolatot teremt a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemeiből alkotható k elemű növekvő sorozatok és az $\{1, 2, \dots, n + k - 1\}$ halmaz elemeiből alkotható k elemű szigorúan növekvő sorozatok halmaza között. Így kapjuk, hogy

$$C_n^{k(i)} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

◦19. Megoldás. Bebizonyítjuk a **binominális együtthatókra vonatkozó addíciós összefüggést**, mely szerint $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ($n \geq 0, k \geq 0, n \geq k$).

Két megoldást is adunk.

I.Mo: Kombinatorikus megoldás. A kitüntetett elem módszere. Van $n + 1$ db elem, amely között van egy kitüntetett, legyen ez x^* . Az $n + 1$ elemnek tekintsük az összes $k + 1$ elemű részhalmazát. Ezek száma $\binom{n+1}{k+1}$. A $(k + 1)$ elemű részhalmazokat osztályozzuk az alapján, hogy tartalmazzák, vagy nem tartalmazzák a kitüntetett elemet. Azoknak a $k + 1$ elemű részhalmazoknak a száma, amelyek tartalmazzák az x^* kitüntetett elemet éppen $\binom{n}{k}$, míg azoknak a $k + 1$ elemű részhalmazoknak a száma, amelyek nem tartalmazzák az x^* kitüntetett elemet éppen $\binom{n}{k+1}$. Ezzel a bizonyítás teljes.

II.Mo: A bizonyítandó összefüggés egyszerű számolással is megkapható.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(n)_k}{k!} + \frac{(n)_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(n)_k}{k!} + \frac{(n)_k(n-k)}{k!(k+1)} = \\ &= \frac{(n)_k}{k!} \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{(n+1)(n)_k}{(k+1)k!} = \\ &= \frac{(n+1)_{k+1}}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

◦**20. Megoldás.** Bebizonyítjuk a **binominális tételt**, nevezetesen, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Két megoldást is adunk. Az első kombinatorikus, a második n -szerinti teljes indukciós.

I.Mo: A következő összefüggés igényelne egy teljes indukciós bizonyítást, azonban szemlélet alapján nyilvánvaló.

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{x_i \in \{a,b\} \\ i=1,\dots,n}} x_1 x_2 \dots x_n.$$

Gyűjtsük össze azokat a szorzatokat, amelyekben az x_i -k között pontosan $n-k$ db a szerepel, a többi b . Ezek száma $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Így kapjuk, hogy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

amivel a bizonyítás teljes.

II.Mo: n -szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

$r=2$ eset:

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \quad (n \geq 1).$$

Megmutatjuk, hogy ez az összefüggés $n + 1$ -re is teljesül.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a + b) = \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} a^{n+1-l} b^l + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{l=1}^n \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) a^{n+1-l} b^l + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} a^{n+1-l} b^l,
 \end{aligned}$$

ezzel a bizonyítás teljes.

◦21. Megoldás. Bebizonyítjuk a **polinomiális tételt**, azaz

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1 \dots k_r} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}.$$

Két megoldást is adunk. Az első kombinatorikus, a második n -szerinti teljes indukciós.

I.Mo: A következő összefüggés igényelne egy teljes indukciós bizonyítást, azonban szemlélet alapján nyilvánvaló.

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{x_i \in \{a_1, \dots, a_r\} \\ i=1, 2, \dots, n}} x_1 \dots x_n.$$

Gyűjtsük össze azokat a szorzatokat, amelyekben az x_i -k között pontosan k_1 db a_1 , $\dots$, k_r db a_r szerepel. Ezek száma $\binom{n}{k_1 \dots k_r}$. Így kapjuk, hogy

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}.$$

és ezt kellett bizonyítani.

II.Mo: r -szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

$n = 2$ eset éppen a binomiális tétel.

Az öröklődéshez tegyük fel, hogy az állítás $2 \leq k \leq n$ esetén igaz.

$$(a_1 + \dots + a_r)^k = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \binom{k}{k_1, \dots, k_r} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}.$$

Megmutatjuk, hogy ez az összefüggés $n + 1$ -re is teljesül.

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_{r+1})^n &= ((a_1 + \dots + a_r) + a_{r+1})^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_1 + \dots + a_r)^{n-k} a_{r+1}^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = n-k \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \frac{(n-k)!}{k_1! \dots k_r!} a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r} \right) a_{r+1}^k = \\ &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{r+1} = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_{r+1} \geq 0}} \binom{n}{k_1 \dots k_{r+1}} a_1^{k_1} \dots a_{r+1}^{k_{r+1}}. \end{aligned}$$

◦22. **Megoldás.** Megmutatjuk, hogy az $x_1 + \dots + x_m = n$ ($m, n \in \mathbb{Z}_+$) egyenlet

- a. Nemnegatív egész megoldásainak a száma $\binom{m+n-1}{m-1}$. A feladat átfogalmazható úgy, hogy m beszámozott rekeszbe helyezünk el n egyforma levelet. A lehetőségek számát ismétléses kombináció adja meg:

$$C_m^{n(i)} = \binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n-1}{m-1}.$$

- b. Az egyenlet pozitív egész megoldásainak a száma: $\binom{n-1}{m-1}$, ha $m \leq n$, máskülönben nem megoldható az egyenlet. Erre két megoldást is adunk. Az elsőben a megoldást visszavezetjük az a. feladatra, a második közvetlen.

I.Mo.: Az $x_1 + \dots + x_m = n$ egyenlet pozitív egész megoldásainak a száma egyenlő az $x_1 + \dots + x_m = n - m$ egyenlet nemnegatív egész megoldásainak a számával. Ez utóbbi az előző feladat alapján

$$C_m^{n-m(i)} = \binom{m+(n-m)-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

II.Mo.: Jelölje a megoldások számát $f(m, n)$. Ekkor

$$f(m, n) = f(m-1, n-1) + f(m, n-1), \quad (1.1)$$

ugyanis $f(m-1, n-1)$ azoknak a megoldásoknak a száma, ahol $x_1 = 1$, $f(m, n-1)$ azoknak a megoldásoknak a száma, ahol $x_1 > 1$. Ezt követően már tudunk n -szerinti teljes indukcióval bizonyítani. Könnyű látni, hogy $f(n, n) = 1 = \binom{n-1}{n-1}$, $f(n, 1) = 1 = \binom{n-1}{0}$ minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

Indukciós feltétel: $f(m, n) = \binom{n-1}{m-1}$, ahol $n \geq 2$ és $m \leq n$.

Állítom, hogy $f(m, n+1) = \binom{n}{m-1}$. Ez könnyen megkapható a 1.1 összefüggés és az indukciós feltétel alapján

$$f(m, n+1) = f(m-1, n) + f(m, n) = \binom{n-1}{m-2} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m-1},$$

amivel a bizonyítás teljes.

◦**23. Megoldás.** Megmutatjuk, hogy az m tigris az n oroszlánnal a kör alakú porondon

$$(n-1)!(n)_m = (n-1)! \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-m+1)$$

féleképpen lehet szeparálni. Először ledobjuk a porondra az m számú piros dobogót, amelyeken a tigrisek fognak ülni. Bármely két piros dobogó közé kell kerülnie legalább egy kéknek, melyen oroszlán fog ülni. Így a dobogók megfelelő elhelyezéseinek a száma a porondon az előző feladat b. része alapján $\binom{n-1}{m-1}$.

A tigriseket $(m-1)!$ féleképpen lehet leültetni a piros dobogókra a ciklikus permutáció-ra vonatkozó képlet alapján, ugyanis a kedvenc tigrisünket ültetjük a kitüntetett helyre, ezt követően ültetjük le a többi.

Az oroszlánokat $m!$ féleképpen lehet leültetni a kék dobogókra.

Így kapjuk, hogy a megfelelő ülésrendek száma:

$$\binom{n-1}{m-1} \cdot (m-1)! \cdot n! = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} (m-1)!n! = (n-1)!(n)_m$$

Az $m = 4$ $n = 6$ speciális esetben az ülésrendek száma: $5! \cdot (6)_4 = 120 \cdot 180 = 21600$.

1.3.4. A klasszikus valószínűségi mező

•**S24. Megoldás.** A golyóhúzás urnából visszatevés nélküli esetére vonatkozó képletet alkalmazzuk.

I.Mo. Komplementer esemény valószínűsége alapján.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} A &\doteq \text{van a csoportban lány,} \\ J &\doteq \{F_1, \dots, F_5, L_1, \dots, L_4\} \text{ a jelöltek halmaza,} \\ \Omega &\doteq \{B \subseteq J \mid |B| = 4\} \text{ (Klasszikus valószínűségi mező).} \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$A = \{H \subseteq \Omega \mid H \cap \{L_1, \dots, L_4\} \neq \emptyset\},$$

amiből a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{11}{4}} = 1 - \frac{5}{330} = \frac{65}{66} = 0.9848$$

II. Mo. Közvetlen számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{\binom{11}{4}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{5}{2}}{\binom{11}{4}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{5}{1}}{\binom{11}{4}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{5}{0}}{\binom{11}{4}} = \\ &= \frac{60 + 150 + 100 + 15}{330} = \frac{325}{330} = \frac{65}{66} = 0.9848. \end{aligned}$$

•S25. Megoldás.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$D \doteq \{A_1, \dots, A_4, F_1, \dots, F_3, D_1, \dots, D_4\} \text{ a diplomaták halmaza.}$$

Ekkor $|D| = 11$.

Legyen Ω a D elemeiből alkotott 3-tagú sorozatok halmaza. (Klasszikus valószínűségi mező.)

Összes esetek száma: $|\Omega| = V_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9$. Legyen

$$A \doteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_1 \in \{A_1, \dots, A_4\}, x_2 \in \{F_1, \dots, F_3\}, x_3 \in \{D_1, \dots, D_4\}\}.$$

A kedvező esetek száma: $|A| = 4 \cdot 3 \cdot 4$. Így

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{8}{165} = 0.048.$$

1.3.5. Bizonyítsa be, hogy ... (klasszikus valószínűségi mező)

o27. Megoldás. (Golyóhúzás urnából visszatevéssel.) Jelölje

- N az urnában lévő golyók számát;

- s : az urnában lévő piros golyók számát ($0 \leq s \leq N$);
- $N - s$: az urnában lévő fehér golyók számát;
- n : golyót húzunk ki az urnából;
- k : a kihúzott golyók közül a piros golyók száma.

A golyók halmaza: $\{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}$. Legyen $\Omega \doteq G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$. Könnyű látni, hogy a kísérletet leíró modell egy klasszikus valószínűségi mező.

$$|\Omega| = V_N^{n(i)} = N^n.$$

Az $|A_k|$ számosságának a meghatározását egy konkrét példa segítségével illusztráljuk. Legyen mondjuk $s = 3$, $N = 5$, $n = 4$, $k = 2$. Ekkor a golyók halmaza $\{P_1, P_2, P_3, F_1, F_2\}$.

Tekintsük az A_k (A_2) egy ω elemét.

$$\omega = \{\boxed{F_1}, \textcircled{P_1}, \boxed{F_2}, \textcircled{P_1}\} \in A_2.$$

Rögzítsük a színek által meghatározott mintát és a piros, illetve a fehér helyeket töltsük fel megfelelő színű golyókkal. A lehetőségek száma $V_s^{k(i)} \cdot V_{N-s}^{(n-k)(i)} = s^k (N-s)^{n-k}$. A színek által meghatározott minták száma $P_n^{k, (n-k)(i)} = \binom{n}{k}$.

Így kapjuk, hogy

$$|A_k| = \binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}.$$

Tehát a kedvező/összes képlet alkalmazásával kapjuk, hogy

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ahol $p = \frac{s}{N}$, ami annak a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk az urnából.

◦**28. Megoldás.** (Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül.) Az N , s , n , k betűk ugyanazt jelentik, mint a visszatevéses esetben. A golyók halmaza: $\{P_1, P_2, \dots, P_s, F_1, F_2, \dots, F_{N-s}\}$. Legyen $\Omega \doteq \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G \ g_j \neq g_k, \text{ ha } j \neq k\}$. Könnyű látni, hogy a kísérletet leíró modell egy klasszikus valószínűségi mező.

$$|\Omega| = V_N^n = N(N-1) \dots (N-k+1).$$

Az $|A_k|$ számosságának a meghatározását egy konkrét példa segítségével illusztráljuk. Legyen mondjuk $s = 3$, $N = 5$, $n = 4$, $k = 2$. Ekkor a golyók halmaza $\{P_1, P_2, P_3, F_1, F_2\}$.

Tekintsük az A_k (A_2) egy ω elemét.

$$\omega = \left\{ \boxed{F_1}, \textcircled{P_2}, \boxed{F_3}, \textcircled{P_1} \right\} \in A_2.$$

Rögzítsük a színek által meghatározott mintát és a piros, illetve a fehér helyeket töltsük fel megfelelő színű golyókkal. A lehetőségek száma:

$$\begin{aligned} V_s^k \cdot V_{N-s}^{(n-k)} &= s(s-1) \dots (s-k+1) \cdot (N-s)(N-s-1) \dots (N-s-(n-k)+1) = \\ &= (s)_k (N-s)_{n-k}. \end{aligned}$$

A színek által meghatározott minták száma $P_n^{k,(n-k)(i)} = \binom{n}{k}$.

Így kapjuk, hogy

$$|A_k| = \binom{n}{k} (s)_k (N-s)_{n-k}.$$

Tehát a kedvező/összes képlet alkalmazásával kapjuk, hogy

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} (s)_k (N-s)_{n-k}}{(N)_n} = \frac{\frac{(s)_k}{k!} \frac{(N-s)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N)_n}{n!}} = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

ahol $p = \frac{s}{N}$, ami annak a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk az urnából.

2. fejezet

Kolmogorov féle valószínűségi mező

2.1. Rövid elméleti összefoglaló

A klasszikus valószínűségi mező már sok egyszerű esetben sem alkalmas arra, hogy bizonyos események valószínűségét kiszámítsuk. Ilyen feladatok például a pénzfeldobás nem szabályos érmével, kockadobás nem szabályos dobókockával, vagy olyan kísérletek valószínűségelméleti leírása, amikor a kísérletnek végtelen sok kimenetele lehet. Szükségessé vált a valószínűség fogalmának a kiterjesztésére, ami Andrej Nyikolajevics Kolmogorov nevéhez fűződik (1931). Kolmogorov a valószínűségszámítást mértékelméleti eszközök segítségével tárgyalja. A valószínűség sok olyan elemi tulajdonsága, amelyeket a klasszikus valószínűségi mezőben megismertünk, érvényben marad. Ilyen tulajdonságok például: a valószínűség 1-re normáltsága ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$), a véges additivitása, monotonitása, a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó képlet, szitaformulák.

Más tulajdonságok azonban az új axiómarendszerben már nem lesznek érvényesek. Ilyenek például: már nem mindig tudjuk az esemény valószínűségét a kedvező/összes képlettel kiszámítani, az eseménytér tetszőleges részhalmaza nem feltétlenül lesz esemény, események tetszőleges rendszerének uniója nem feltétlenül esemény, ha az eseménytér egy egyelemű részhalmaza esemény, akkor ennek az eseménynek a valószínűsége gyakran 0.

Érdemes azonban megjegyezni, hogy a klasszikus valószínűségi mező a Kolmogorov féle valószínűségi mező speciális esete.

2.1.1. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

A σ -algebra: Legyen X egy tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád egy σ -algebra X -en, ha

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{A} \doteq X \setminus A \in \mathcal{A}$;

3. Ha (A_n) halmazoknak egy olyan sorozata, hogy $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Tehát $\mathcal{A}$ az X bizonyos részhalmazzaiból álló halmazcsalád, amelyre teljesül, hogy tartalmazza az üreshalmazt, minden elemének a komplementerét, továbbá zárt a megszámlálhatóan végtelen unióra nézve.

A σ -algebra tulajdonságai: Ha $\mathcal{A}$ egy σ -algebra az X halmazon, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges halmazműveletekre nézve, azaz ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

A σ -additivitás: Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Egy $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény amelyre

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

valahányszor $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $A_j \cap A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$, azaz (A_n) halmazok páronként diszjunkt tagokból álló sorozata.

Most következzen néhány triviális példa:

Példa

Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A} \doteq \{\emptyset, X\}$, $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $m(X) = 1$, $m(\emptyset) = 0$. Ekkor $(\mathcal{A})$ egy σ -algebra X -en és az m függvény egy σ -additív halmazfüggvény.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} \doteq \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $m(\emptyset) = 0$, $m(\{1\}) = 1$, $m(\{2, 3\}) = 2$, $m(\{1, 2, 3\}) = 3$. Ekkor $(\mathcal{A})$ egy σ -algebra X -en és az m függvény egy σ -additív halmazfüggvény.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek** nevezzük, ha

1. Ω egy nemüres halmaz. Az Ω -t **eseménytérnek** nevezzük. Az Ω elemei az **elemi események**. Az elemi események nem események.
2. $\mathcal{F}$ egy σ -algebra Ω -n. Az $\mathcal{F}$ elemeit **eseményeknek** nevezzük.
3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény úgy, hogy

I. Nemnegatív, azaz $\mathbb{P}(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;

II. 1-re normált, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

III. σ -additív.

A $\mathbb{P}$ függvényt valószínűségnek, a $\mathbb{P}(A)$ számot az A esemény valószínűségének, az **I.**, **II.**, **III.** axiómákat **Kolmogorov-féle axiómáknak** nevezzük.

2.1.2. A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai: Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}$ **végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén.
3. **A komplementer esemény valószínűsége:** $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ ($A \in \mathcal{F}$).
4. **A valószínűség monotonitása:** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
5. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén, azaz egy esemény valószínűsége mindig egy $[0, 1]$ intervallumba eső valós szám.
6. Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
7. **Szita formula 2 eseményre:** Ha A és B tetszőleges események, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
8. **Szita formula 3 eseményre:** Ha A, B és C tetszőleges események, akkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

9. **Szita formula n eseményre (Poincare formula):** Ha $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

2.1.3. Műveletek eseményekkel

Az események halmazok, így az eseményekkel végezhető műveletek a közönséges halmazműveletek. Szokás még $A \cup B$ helyett $A + B$ -t; $A \cap B$ helyett AB -t; $A \setminus B$ helyett $A - B$ -t írni.

2.1.4. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Az A esemény ismeretlen valószínűségének a meghatározására olyan modellt használunk, melyben Ω egy olyan ponthalmaz, amelyet valamilyen módon tudunk mérni (például ívhossz, felszín, térfogat) az Ω mértéke pozitív, de véges. Jelöljük ezt a mértéket m -mel. Az $A \subseteq \Omega$ halmaznak szintén létezik az m szerinti mértéke. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) \doteq \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

2.2. Feladatok

2.2.1. Műveletek eseményekkel

○**1. Feladat** Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az A, B, C és halmazműveletek segítségével az alábbi eseményeket:

- $D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,
- $E \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb egy teljesül,
- $F \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,
- $G \doteq$ az A, B, C események közül legalább egy teljesül,
- $H \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb kettő teljesül,
- $I \doteq$ az A, B, C események közül pontosan kettő teljesül,
- $J \doteq$ az A, B, C események közül legalább kettő teljesül,
- $K \doteq$ az A, B, C események közül mindhárom teljesül.

2.2.2. Bizonyítsa be ... (Kolmogorov féle valószínűségi mező)

○**26. Feladat.** Mutassa meg, hogy, ha $A \in \mathcal{F}$ egy σ -algebra, akkor $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható halmazműveletekre nézve.

*○**27. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

*○**28. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy a **valószínűség végesen additív**, azaz $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ valahányszor $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$.

○**29. Feladat.** (**Komplementer esemény valószínűsége**) Mutassa meg, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén.

○**30. Feladat.** Mutassa meg, hogy a **valószínűség monoton**, azaz ha $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén.

○**31. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén.

○**32. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $A, B \in \mathcal{F}$ olyanok, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

○**33. Feladat.** Bizonyítsa be a két halmazra vonatkozó **szita-formulát**.

*○**34. Feladat.** Igazolja, hogyha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, akkor teljesülnek a következők:

1. **A valószínűség folytonossága** Ha (B_n) egy eseménysorozat úgy, hogy $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.
2. Ha (B_n) egy eseménysorozat úgy, hogy $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.

2.2.3. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

•**S3. Feladat.** Egy ügyfélszolgálaton az ügyintézés 30 percet vesz igénybe. Az egyik nap két ismerős megy be az ügyfélszolgálatra egymástól függetlenül 8 és 12 óra között véletlenül választva az időpontot. Mi a valószínűsége, hogy lesz olyan időpont, amikor egyszerre vannak bent?

•**S4. Feladat.** Ketten megbeszélnek, hogy délután 5 óra és délután 5 óra 30 perc között találkoznak. mekkora valószínűséggel találkoznak, ha egymástól függetlenül érkeznek és mindketten 8 perc várakozás után elmennek, ha a másik addig nem érkezett meg?

•**S5. Feladat.** Két ember A, B véletlenszerűen megjelennek egy adott helyen 12 és 13 óra között. A 20 percet hajlandó várni B-re, B 30 percet hajlandó várni A-ra. Mi a valószínűsége, hogy nem találkoznak?

•**S6. Feladat.** Egy kis kitőtőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 8 és 20 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 57 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?

S7. Feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszt három részre bontunk 2 véletlenszerűen megválasztott ponttal. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?

S8. Feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszt két részre bontunk egy találmányra választott ponttal, majd a két részt közül a hosszabbikon még egy pontot választunk és ezzel ezt is kettéosztjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?

S9. Feladat. Vegyünk három, egységnyi hosszúságú szakaszt. Mindegyikből vágjunk le találmányra egy darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó három szakaszból háromszög szerkeszthető?

2.3. Megoldások

2.3.1. Műveletek eseményekkel

◦1. **Megoldás** Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az A, B, C és halmazműveletek segítségével az alábbi eseményeket:

- $D \doteq$ az A, B, C események közül egy sem teljesül,
- $E \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb egy teljesül,
- $F \doteq$ az A, B, C események közül pontosan egy teljesül,
- $G \doteq$ az A, B, C események közül legalább egy teljesül,
- $H \doteq$ az A, B, C események közül legfeljebb kettő teljesül,
- $I \doteq$ az A, B, C események közül pontosan kettő teljesül,
- $J \doteq$ az A, B, C események közül legalább kettő teljesül,
- $K \doteq$ az A, B, C események közül mindhárom teljesül.

Bár több egyenértékű megoldás is adható, most csak egy lehetséges megoldást mutatunk.

$$\begin{aligned}
 D &= \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \\
 E &= (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C), \\
 F &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C), \\
 G &= A \cup B \cup C, \\
 H &= \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}, \\
 I &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C), \\
 J &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
 K &= A \cap B \cap C.
 \end{aligned}$$

2.3.2. Bizonyítsa be ... (Kolmogorov féle valószínűségi mező)

*◦26. **Megoldás.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre nézve.

Legyenek $A_i \in \mathcal{F}$ $i \in \mathbb{Z}_+$. Ekkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{F}.$$

$\Omega \in \mathcal{F}$, mivel $\Omega = \overline{\emptyset}$.

Ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{F}$.

Hasonlóképpen kapjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cap B \cap \Omega \cap \Omega \cap \dots \in \mathcal{F}$. (Két esemény helyett akár n esemény únióját illetve metszetét is nézhettük volna.)

◦27. **Megoldás.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. A valószínűség σ -additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset). \quad (2.1)$$

Mivel $0 \leq \mathbb{P}(\emptyset) < +\infty$, a 2.1 csak úgy teljesülhet, ha $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

◦28. **Megoldás. (A valószínűség véges additivitása)** A valószínűség σ -additivitása és a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ összefüggések alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + 0 + 0 \dots = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

Ennek az állításnak a bizonyítása az $n = 2$ esettel analóg. Ha azonban csak a $n = 2$ esetre vonatkozó állítást ismerjük, akkor abból akkor abból n szerinti teljes indukcióval kapjuk meg ezt az általánosabb állítást. Most csak azt mutatjuk meg, hogy hogyan öröklődik át az állítás mondjuk $n = 2$ -ről $n = 3$ -ra. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt események. Ekkor

$$\emptyset \subseteq (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cap B = \emptyset,$$

amiből kapjuk, hogy az $A \cup B$ és a C halmazok is diszjunktak. Így a két halmazra vonatkozó véges additivitásból kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

◦29. **Megoldás. (A komplementer esemény valószínűsége)** Mivel $\Omega = A \cup \bar{A}$ diszjunkt únió, így a valószínűség 1-re normáltsága és a véges additivitása alapján kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}),$$

amiből kapjuk a bizonyítandó állítást.

◦30. **Megoldás. (A valószínűség monotonitása)** Diszjunktálni kell, majd felhasználni a valószínűség nemnegativitását.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$

◦**31. Megoldás.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$. Mivel $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, így a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

◦**32. Megoldás.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Megmutatjuk, hogyha $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. Diszjunktálni kell és felhasználni a valószínűség véges additivitását. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A),$$

amiből rendezéssel kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

◦**33. Megoldás. Szita formula két halmazra.** Megintcsak diszjunktálni kell. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A), \quad (2.2)$$

illetve $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$. ez utóbbi egyenletből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \quad (2.3)$$

A (2.2) és (2.3) egyenletekből következik a bizonyítandó állítás.

*◦**34. Megoldás.** Igazolja, hogyha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, akkor teljesülnek a következők:

1. A valószínűség folytonossága Mivel $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_3) \cup \dots$ diszjunkt únió, így a valószínűség σ -additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n \setminus B_{n+1}).$$

Konvergens sorozat farka nullsorozat, így egyrészt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_k \setminus B_{k+1}) = 0. \quad (2.4)$$

másrészt a valószínűség σ -additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_k \setminus B_{k+1}) = \mathbb{P}(B_n). \quad (2.5)$$

Így (2.4) és (2.5) alapján kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$. Ha (B_n) egy eseménysorozat úgy, hogy $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.

2. Megmutatjuk, hogyha (B_n) növekvő eseménysorozat és $B = \bigcup_n \mathbb{P}(B_n)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$. Definiáljuk az (A_n) eseményekből álló sorozatot

$$A_n = B \setminus B_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

módon. Ekkor az (A_n) sorozat csökkenő, és

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \cap \overline{B_n}) = B \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = B \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B \setminus B = \emptyset.$$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ Azonban

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B_n)) = \mathbb{P}(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

amiből kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.

2.3.3. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

•**S3. Megoldás.** A feladatot átfogalmazzuk a következő módon. Ledobunk két pontot x -et és y -t a $[0, 240]$ intervallumra véletlenszerűen, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy $|x - y| \leq 30$?

Bevezetünk néhány jelölést:

$$\begin{aligned} \Omega &\doteq [0, 240] \times [0, 240], \\ A &\doteq \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leq 30\}. \end{aligned}$$

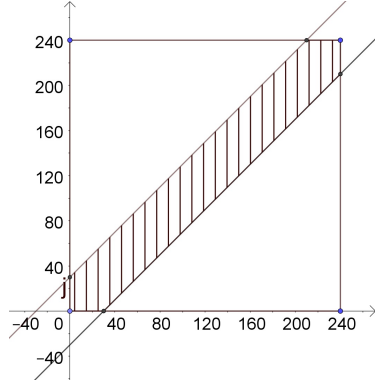
Ekkor

$$|x - y| \leq 30 \quad \Leftrightarrow \quad -30 \leq x - y \leq 30 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x + 30 \quad \text{és} \quad x - 30 \leq y.$$

Az $y \leq x + 30$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $y = x + 30$ egyenes "alatti" pontok halmaza.

Az $x - 30 \leq y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza a síkban az $x - 30 = y$ egyenes "feletti" pontok halmaza.

A két félsík metszete egy sáv. Így kapjuk, hogy



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \\ &= \frac{240^2 - 2 \frac{(240-30)^2}{2}}{240^2} = \frac{240^2 - 210^2}{240^2} = \\ &= 1 - \left(\frac{210}{240}\right)^2 = \frac{15}{64} = 0.2344.\end{aligned}$$

•S4. Megoldás. Az előző feladat megoldásával analóg módon kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{30^2 - 2 \frac{(30-8)^2}{2}}{30^2} = 1 - \left(\frac{2}{30}\right)^2 = \frac{104}{225} = 0.4622.$$

•S5. Megoldás. A feladat átfogalmazható úgy, hogy ledobunk két pontot x -et és y -t véletlenszerűen és egymástól függetlenül a $[0, 60]$ intervallumra. Jelölje x az A ember érkezési idejét (12 óra után eltelt idő percben), y a B érkezési idejét. Ekkor

$$\Omega = [0, 60] \times [0, 60], \quad T(\Omega) = 60^2.$$

Jelölje A azt az eseményt, hogy a két ember találkozik.

$$A_1 = \{(x, y) \in T \mid x \leq y\} \quad (\text{azaz A érkezik hamarabb és találkoznak.})$$

$$A_2 = \{(x, y) \in T \mid y < x\} \quad (\text{azaz B érkezik hamarabb és találkoznak.})$$

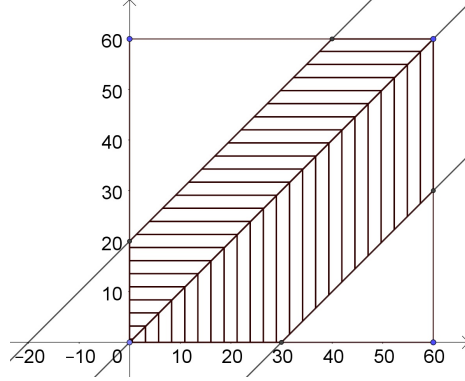
Ekkor $A = A_1 \cup A_2$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, azaz A a A_1 és A_2 halmazok diszjunkt úniója.

$$(x, y) \in A_1 \Leftrightarrow (x, y) \in [0, 60], \quad x \leq y \leq x + 20,$$

$$(x, y) \in A_2 \Leftrightarrow (x, y) \in [0, 60], \quad y < x \leq y + 30,$$

így A_1 az $y = x$ és $y = x + 20$ egyenesek által határolt sávnak a $[0, 60] \times [0, 60]$ téglába eső

része, a A_2 az $y = x$ és az $y = x - 30$ sávoknak a $[0, 60] \times [0, 60]$ téglába eső része.



$$T(A_1) = \frac{60^2}{2} - \frac{20^2}{2},$$

$$T(A_2) = \frac{60^2}{2} - \frac{30^2}{2}$$

így

$$T(A) = T(A_1) + T(A_2) = 60^2 - \left(\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2} \right).$$

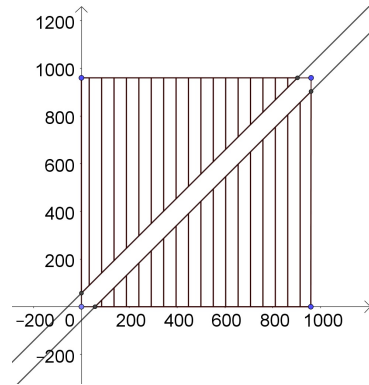
Tehát

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{60^2 - \left(\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2} \right)}{60^2} = 1 - \frac{\frac{20^2}{2} + \frac{30^2}{2}}{60^2} = 1 - \frac{20^2 + 30^2}{2 \cdot 60^2}.$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{20^2 + 30^2}{2 \cdot 60^2} = \frac{13}{72} = 0.1806.$$

•S6. Megoldás. 16 óra = 960 perc. A korábbi feladatokkal analóg módon kapjuk, hogy



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{2 \cdot \frac{(960-57)^2}{2}}{960^2} = \\ &= \left(\frac{903}{960} \right)^2 = 0.8848. \end{aligned}$$

S7. Megoldás. Bevezetjük a szokásos jelöléseket:

$$\Omega \doteq [0, 1] \times [0, 1],$$

$$A \doteq \{(x, y) \in \Omega \mid \text{a 3 szakaszból háromszög szerkeszthető}\},$$

$$A_1 \doteq \{(x, y) \in A \mid x \leq y\},$$

$$A_2 \doteq \{(x, y) \in A \mid y < x\}.$$

Ekkor

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2), \quad \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 2\mathbb{P}(A_1),$$

így elegendő $\mathbb{P}(A_1)$ -et kiszámolni. Ehhez tegyük fel, hogy $x \leq y$. Az x és y pontok 3 részre bontják a $(0, 1)$ intervallumot.



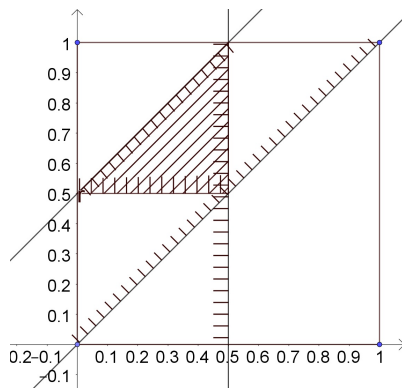
A kapott 3 szakasz hossza: x , $y - x$, $1 - y$. Ezekre a szakaszhosszokra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$x + (y - x) \geq 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \frac{1}{2},$$

$$x + 1 - y \geq y - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 \geq 2y \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{2} \geq y,$$

$$y - x + 1 - y \geq x \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}.$$

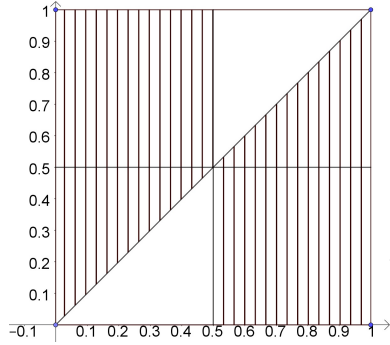
A kapott lineáris egyenlőtlenségek félsíkokat határoznak meg a síkban, ezeket a félsíkokat kell összemetszenünk. A félsíkok határegyenesét úgy kapjuk, hogy a kisebb, vagy nagyobb egyenlő relációjeleket egyenlőségjelre cseréljük. A kapott egyenes két félsíkra bontja a síkot. Úgy győződünk meg arról, hogy melyik félsík pontjai elégítik ki a lineáris egyenlőtlenséget, hogy egy tetszőlegesen megválasztott pont, mondjuk az origót a lineáris egyenlőtlenségbe helyettesítjük.



$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{t(A_1)}{t(\Omega)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{1}{8},$$

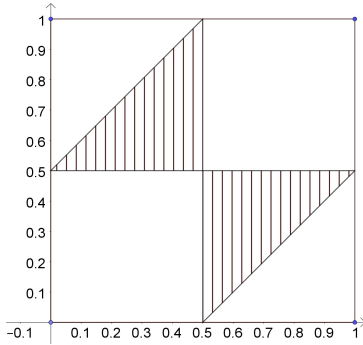
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

S8. Megoldás. Legyen



$$\Omega = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], y \in [x, 1] \right\} \cup \\ \cup \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], y \in [0, x] \right\},$$

$$T(\Omega) = \frac{3}{4}.$$



$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid \text{a kapott 3 szakaszból} \\ \text{háromszög szerkeszthető}\},$$

$$T(A) = \frac{1}{4} \quad (\text{Lásd előző feladat}).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

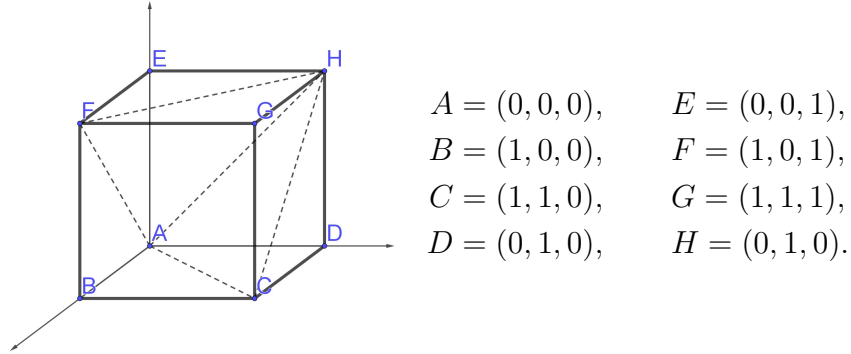
S9. Megoldás. Vezessük be a szokásos jelöléseket

$$\Omega \doteq [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

$$A \doteq \{(x, y, z) \in \Omega \mid x\text{-ből, } y\text{-ből és } z\text{-ből háromszög szerkeszthető}\}.$$

Jelölje $ABCDEFGH$ azt az egység oldalhosszú kockát, amelynek az A csúcsa az origó, az A csúcsa felett van E csúcsa, az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ a koordináta-rendszer tengelyei és az $ABCD$ illetve

az $EFGH$ körüljárási irányok megegyeznek.



Az A halmaz a háromszög-egyenlőtlenség miatt az alábbi egyenlőtlenség-rendszerrel adható meg:

1. $0 \leq x \leq 1,$
2. $0 \leq y \leq 1,$
3. $0 \leq z \leq 1,$
4. $x \leq y + z,$
5. $y \leq x + z,$
6. $z \leq x + y.$

Ezek közül az 1., 2., 3. egyenlőtlenség-rendszer az egységkocka pontjait, azaz Ω -t karakterizálja, így elegendő foglalkoznunk a 4., 5., 6. egyenlőtlenségekkel. Ezek mindegyikének megoldáshalmaza egye-egy féltér.

A 4. egyenlőtlenség megoldáshalmaza az a féltér, amelyet az

$$\alpha : \quad 0 = -x + y + z$$

egyenletű sík határol. Erre a síkra illeszkednek az A, C, F pontok, a féltér nem tartalmazza a B pontot, de tartalmazza a G pontot.

Az 5. egyenlőtlenség megoldáshalmaza az a féltér, amelyet a

$$\beta : \quad 0 = x - y + z$$

egyenletű sík határol. Erre a síkra illeszkednek az A, C, H pontok, a féltér nem tartalmazza a D pontot, de tartalmazza a G pontot.

Végül a 6. egyenlőtlenség által meghatározott féltér a

$$\gamma : \quad 0 = x + y - z$$

egyenletű sík határolja. Erre a síkra illeszkednek az A, F, H pontok. A féltér nem tartalmazza az E pontot, de tartalmazza a G pontot.

Érdemes észrevenni, hogy a

$$G_{ACFB}, \quad G_{ACHD}, \quad G_{AFME}, G_{CHFG}$$

háromszög-alapú gúlák egybevágóak. (A későbbiekben egyszerűen gúla.) A T_{ACHF} egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú (szabályos) tetraéder. (A későbbiekben egyszerűen tetraéder.)

$$V_{kocka} = 1, \quad V_{tetraéder} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{(\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3},$$

Így kapjuk, hogy

$$1 = V_{kocka} = V_{tetraéder} + 4V_{gúla} = \frac{1}{3} + 4 \cdot V_{gúla} \quad \Rightarrow \quad V_{gúla} = \frac{1}{6}.$$

Így

$$V(A) = V_{tetraéder} + V_{gúla} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

3. fejezet

A Bayes tétel, események függetlensége

3.1. Rövid elméleti összefoglaló

3.1.1. A feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) \doteq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ az A esemény valószínűsége, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

A feltételes valószínűség tulajdonságai:

1. **1-re normáltság véges additivitásra:** $\mathbb{P}(C|C) = 1$.

2. **Véges additivitás feltételes valószínűségre:**

$$\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$$

valahányszor $A, B, C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$, azonban $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

3. **Komplementer esemény feltételes valószínűsége:**

$$\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$$

valahányszor $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

4. **Szita formula feltételes valószínűségre:**

$$\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B|C).$$

valahányszor $A, B, C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$.

5. $0 \leq \mathbb{P}(A|C) \leq 1$ valahányszor $A, C \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(C) \neq 0$.

3.1.2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

A Bayes-formula: Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$ és $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teljes eseményrendszer: Legyenek $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha és $j \neq k$. A (B_n) eseményrendszert **teljes eseményrendszernek** nevezzük, ha $\bigcup_n B_n = \Omega$. Azaz a teljes eseményrendszer események egy véges, vagy végtelen sorozata, amely az Ω páronként diszjunkt tagokból álló lefedését adja.

A teljes valószínűség tétele: Ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

A Bayes Tétel: Ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ egy olyan teljes eseményrendszer amelyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, $A \in \mathcal{F}$ egy további esemény úgy, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

3.1.3. A lánc szabály

Lánc szabály: Legyenek $B_1, B_2, \dots, B_n$ olyan események, melyekre $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) \neq 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}).$$

3.1.4. Események függetlensége

Két esemény függetlensége: Az A és B események függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Az események függetlensége a feltételes valószínűség fogalmából származtatható. A koncepció az, hogy két esemény A és B függetlenek, ha a B esemény bekövetkezése nincs hatással az A esemény bekövetkezésére. Ez a feltételes valószínűség segítségével $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ módon fogalmazható meg, ehhez azonban szükség van a $\mathbb{P}(B) \neq 0$ feltételre. Azonban, a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ egyenlőségből rendezéssel kapjuk a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ egyenlőséget, ami szép szimmetrikus

és a $\mathbb{P}(B) \neq 0$ feltétel teljesülésére sincs hozzá szükség, ezért események függetlenségét ezzel az egyenlőséggel definiáljuk.

Érdemes megjegyezni, hogy pozitív valószínűségű események esetén a diszjunktság és a függetlenség kizárják egymást. Ugyanis, ha $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ és A és B függetlenek, akkor $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) > 0$, így nem lehetnek diszjunktak.

Példa. A harminckét lapos magyar kártyából kihúzzunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy pirosat húzzunk; B , hogy ászt húzzunk. Függetlenek-e az A és B események? Ezt követően eltávolítjuk a pakliból a zöld alsót. Megváltozik-e az A és a B események függetlensége?

Mo.: mint ahogy azt korábban láttuk:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32},$$

azaz $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, így az A és B események függetlenek.

A zöld alsó eltávolítása után az A és B események elveszítik a függetlenségüket, ugyanis ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{31}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{31}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{31},$$

Könnyen látható, hogy

$$\frac{8}{31} \cdot \frac{4}{31} = \frac{32}{31^2} = \frac{31+1}{31^2} = \frac{1}{31} + \frac{1}{31^2} > \frac{1}{31},$$

így azaz $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, tehát az A és B események függetlenek.

Példa. A harminckét lapos magyar kártyából kihúzzunk három lapot (visszatevés nélkül). Jelölje A azt az eseményt, hogy az első; B , hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?

Mo.: Mint ahogy azt korábban már láttuk, az A és B események függetlenek, mivel

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{18 \cdot 30 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{124},$$

így $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, tehát az A és B események nem függetlenek.

Eseményrendszer páronkénti függetlensége: Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ eseményrendszer páronként független, ha bármely két tagja független.

Eseményrendszer teljes függetlensége: Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ eseményrendszer tagjain teljesen függetlenek, ha tetszőleges $1 \leq k \leq n$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ indexek esetén

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

azaz a véges sok, páronként különböző tagból álló metszet valószínűsége egyenlő a valószínűségek szorzatával.

Eseményrendszer függetlensége alatt, ha csak mást nem mondunk, mindig teljes függetlenséget értünk.

Végül érdemes megjegyezni, hogy a teljes függetlenség erősebb fogalom, mint a páronkénti függetlenség, azaz egy egy eseményrendszer tud úgy páronként független lenni, hogy teljesen nem független. Erre vonatkozik a következő példa:

Példa Definiáljuk az A, B, C eseményeket az alábbi módon:

bra

A valószínűség geometriai kiszámítása alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, és az is látható, hogy az A, B, C eseményrendszer páronként független eseményekből áll. Azonban ez az eseményrendszer nem teljesen független, ugyanis

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Független események tulajdonságai:

1. Ha A, B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor A és B függetlenek.
2. Ha A, B független események, akkor az $\overline{A}, B$; az $A, \overline{B}$; az $\overline{A}, \overline{B}$ események is függetlenek.
3. Ha az $\mathcal{A}$ eseményrendszer teljesen független és az $\mathcal{A}$ eseményei közül tetszőlegesen sokat a komplementerére cserélünk ki, akkor a teljes függetlenség megőrződik.

3.2. Feladatok

3.2.1. A feltételes valószínűség

•**1. Feladat.** Tudjuk, hogy $P(A) = 0.36$, $P(A|B) = 0.43$ és $P(B|A) = 0.93$. Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B legalább egyike bekövetkezik?

3.2.2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

•**2. Feladat.** Egy terméket három üzemben készítenek. A három üzemben a selejtszázalék rendre 0.09, 0.17 és 0.41, míg a három üzemben az összterméknek rendre 23, 42 és 35 százalékát állítják elő. Az össztermékből kivesznek egy darabot, és az hibás. Mi a valószínűsége, hogy az első üzemben gyártották?

•**3. Feladat.** Egy adott betegségben szenvedő betegek 33%-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 75%-ról, 90%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?

•**4. Feladat.** A CHIPCAD microchip gyártó cég teljes termelése két gépsorról származik. Az I. gépsor adja a termelés 64 %-át 0.042 % selejttel, míg a II. gépsor adja a termelés 36%-át 0.013% selejttel. Ha egy véletlenül kiválasztott chip selejtes, akkor mi a valószínűsége, hogy azt a II. gépsor gyártotta?

***5. Feladat.** Egy törzs minden tagja az év egy adott napján leopárdvadászatra megy. A vadászon egy vadászt 0.11 valószínűséggel támad meg egy leopárd és ekkor 0.40 valószínűséggel öli meg a leopárd a vadászt. Egyéb veszélyek miatt 0.09 valószínűséggel halhat meg a vadász a vadászon. Ha egy vadász meghalt a vadászon, akkor mi a valószínűsége, hogy egy leopárd ölte meg?

•**S6. Feladat.** 20 doboz mindegyikében 36 golyó van, amelyek közül rendre 17, 18, 19, ..., 36 fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd véletlenül kihúzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?

***7. Feladat.** Az igazak városában a lakosok 72%-a igazat mond, a hazugok városában a lakosok 87%-a hazudik. Mi nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel lehetünk mindkettőben. megkérdezzük egy embert és azt mondja, hogy ez a hazugok városa. mi a valószínűsége, hogy ez az ember hazudik?

•**8. Feladat.** A meteorológusok szerint holnap 0.23 valószínűséggel lesz eső és 0.51 valószínűséggel lesz szél. ha lesz eső, akkor 0.33 valószínűséggel szél is lesz. Mi a valószínűsége, hogy ha szél lesz, eső is lesz?

●**9. Feladat.** Egy országban a lakosság 95 százalékának van televíziója és 92 százalékának autója. Az autóval rendelkezők legalább hány százalékának van televíziója is?

10. Feladat. Valakit keresünk az Egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet 5 terem valamelyikében és annak a valószínűsége, hogy az 5 terem valamelyikében egyáltalán jelen van p . Már 4 termet megnéztünk és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik teremben van?

3.2.3. A lánc szabály

11. Feladat. Valamilyen vegyszerrel szúnyogirtást végeznek egymást követő három napon. Minden nap a még életben lévő szúnyogok 80%-a pusztul el. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szúnyog még 2 irtást túlél, feltéve, hogy az elsőt túlélte?

12. Feladat. (Egy szegény molnárnak van három fia.) Hazamegy a legnagyobb fiú és elpusztítja az otthonon lévő sütemények felét. Ezt követően hazaér a középső fiú, aki elpusztítja a megmaradt sütemények harmadát. Végül a legkisebb fiú is hazatér, aki elpusztítja a megmaradt sütemények negyedét. Mennyi a valószínűsége, hogy egy sütemény a két kisebb fiút túléli, feltéve, hogy a legnagyobbat túlélte.

3.2.4. Események függetlensége

●**13. Feladat.** Az A , B és C független események, amelyre $\mathbb{P}(A) = 0.45$, $\mathbb{P}(B) = 0.60$ és $\mathbb{P}(C) = 0.76$. Határozza meg a következő események valószínűségét:

- $D \doteq$ az A , B , C események közül egy sem teljesül,
- $E \doteq$ az A , B , C események közül legfeljebb egy teljesül,
- $F \doteq$ az A , B , C események közül pontosan egy teljesül,
- $G \doteq$ az A , B , C események közül legalább egy teljesül,
- $H \doteq$ az A , B , C események közül legfeljebb kettő teljesül,
- $I \doteq$ az A , B , C események közül pontosan kettő teljesül,
- $J \doteq$ az A , B , C események közül legalább kettő teljesül,
- $K \doteq$ az A , B , C események közül mindhárom teljesül.

●**14. Feladat.** Határozza meg $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$ értékét, ha

- a. $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$.
- b. $\mathbb{P}(A) = 0.18$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$.

•**16. Feladat.** A és B független események, $\mathbb{P}(A) = 0.24$ és $\mathbb{P}(B) = 0.86$. Határozza meg $\mathbb{P}(A|A+B)$ értékét!

•**S18. Feladat.** Egy kisegér 3 folyosó bármelyikén eljuthat egy sajtdarabhoz. Akármelyik folyosón 3 ajtón kell áthaladni. Mi a valószínűsége, hogy a kisegér el tud jutni a sajthoz, ha az ajtók egymástól függetlenül 0.53 valószínűséggel nyílnak ki, és kinyitásuk után nyitva is maradnak (ha van nyitott folyosó, akkor a kisegér megtalálja a sajtot)?

***S19. Feladat.** Két út vezet A városból a B városba és szintén két út B -ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a négy út egymástól függetlenül, 0.40 valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A -ból C -be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A -ból B -be van járható út?

S20. Feladat. Egy út vezet A városból a B városba és két út B -ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a három út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A -ból C -be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A -ból B -be van járható út?

S21. Feladat. Két út vezet A városból a B városba és egy út B -ből C városba. (Az A városból a C városba csak a B városon át lehet eljutni.) Mind a három út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A -ból C -be nincs végig járható útvonal, mi a valószínűsége, hogy A -ból B -be van járható út?

•**S22. Feladat.** Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0.75 míg B 0.72 valószínűséggel talál a kosárba. A játékot addig folytatják, amíg valamelyik játékos beletalál a kosárba. Mi annak a valószínűsége, hogy pont az ötödik dobás után ér véget a játék?

•**S23. Feladat.** Egy dobozba 11 fehér és 19 piros golyó van. ketten felváltva húznak egy-egy találmásra választott folyót, amelyet visszatesznek. Ezt addig folytatják, amíg csak valamelyikük piros golyót nem húz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem a kezdő húz először piros golyót?

•**24. Feladat.** Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát, ahhoz, hogy legfeljebb 0.36 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?

25. Feladat. Két lottószelvénnel függetlenül játszunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szelvény valamelyikén van legalább 2-es találat?

3.2.5. Bizonyítsa be, hogy ... (feltételes valószínűség)

○26. **Feladat.** Igazolja, hogyha $A, B, C \in \mathcal{F}$ és $\mathbb{P}(C) \neq 0$, akkor

a. $\mathbb{P}(C|C) = 1$.

b. $\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$ valahányszor $A \cap B \cap C = \emptyset$ a **feltételes valószínűség véges additivitása**.

c. $\mathbb{P}(\bar{A}|C) = 1 - \mathbb{P}(A|C)$ a **komplementer esemény feltételes valószínűsége**.

○27. **Feladat.** Igazolja a **Bayes formulát**, azaz ha az A, B események olyanok, hogy $\mathbb{P}(A) \neq 0$ és $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

○28. **Feladat.** Igazolja a **teljes valószínűség tételét**, azaz ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ egy olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, A egy további esemény, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

○29. **Feladat.** Igazolja a **Bayes tételt**, azaz, ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ egy olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, A egy további esemény, akkor

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

○30. **Feladat.** Igazolja a feltételes eseményekre vonatkozó **lánc szabályt** (illetve ennek az $n = 3$ esetét, mivel abból már látszik az általános eset), azaz ha a B_1, B_2, B_3 események olyanok, hogy $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \neq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2).$$

○31. **Feladat.** Legyenek A, B események. Igazolja, hogyha

a. ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$ és $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$;

b. ha $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ és $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

○32. **Feladat.** Igazolja, hogyha $\mathbb{P}(A) = 0$, vagy $\mathbb{P}(A) = 1$ továbbá B egy tetszőleges esemény, akkor az A és B események függetlenek.

◦33. **Feladat.** *Igazolja, hogyha az A és B események függetlenek, akkor az $\overline{A}$ és B események is függetlenek.*

*◦34. **Feladat.** *Igazolja, hogyha a $\mathcal{B}$ eseményrendszer teljesen független és a $\mathcal{C}$ eseményrendszert úgy kapjuk, hogy a $\mathcal{B}$ eseményrendszer bizonyos tagjait - esetleg az összeset - a komplementerükre cseréljük, akkor az így kapott $\mathcal{C}$ eseményrendszer is teljesen független.*

◦35. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy 1-nél kisebb valószínűségű eseményekből álló teljesen független véges eseményrendszer nem fedi le Ω -t.*

◦36. **Feladat.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező. Legyen B egy tetszőlegesen rögzített pozitív valószínűségű esemény. Definiáljuk a $\mathcal{F}_B$ halmazcsaládot és a $\mathbb{P}_B : \mathcal{F}_B \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt*

$$\mathcal{F}_B \doteq \{A \in \mathcal{F} | A \subseteq B\},$$

$$\mathbb{P}_B(A) \doteq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} (= \mathbb{P}(A|B)) \quad (A \in \mathcal{F}_B).$$

Igazoljuk, hogy ekkor a $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ szintén egy Kolmogorov féle valószínűségi mező.

3.3. Megoldások

3.3.1. A feltételes valószínűség

•1. Megoldás. Az alábbi adatokat ismerjük:

$$a. \quad \mathbb{P}(A) = 0.36, \quad b. \quad \mathbb{P}(A|B) = 0.43, \quad c. \quad \mathbb{P}(B|A) = 0.93.$$

A $\mathbb{P}(A \cup B)$ valószínűséget keressük. Az **a.**-ből és a **c.**-ből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.93 \cdot 0.36 = 0.3348.$$

ezt **b.**-vel összevetve kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{0.3348}{0.43} = 0.7786.$$

így a szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.36 + 0.7786 - 0.3348 = 0.8038.$$

3.3.2. Bayes-formula, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

•2. Megoldás. (3 üzem) Vezessük be a következő jelöléseket:

$B_i \doteq$ a kiválasztott terméket az i -edik üzemben gyártották $(i = 1, 2, 3)$,

$A \doteq$ a kiválasztott termék hibás.

Felhasználva a fenti jelöléseket, az alábbi adatokat ismerjük:

	I. gép	II. gép	III. gép
termelés	$\mathbb{P}(B_1) = 0.23$	$\mathbb{P}(B_2) = 0.42$	$\mathbb{P}(B_3) = 0.35$
selejtszázalék	$\mathbb{P}(A B_1) = 0.09$	$\mathbb{P}(A B_2) = 0.17$	$\mathbb{P}(A B_3) = 0.41$

A táblázat második sorából a 10^{-2} szorzótényezőket kihagytuk, de - mint ahogy azt látni fogjuk - nincsenek hatással a végeredményre, csak a feltételes valószínűségek aránya fontos. A $\mathbb{P}(B_1|A)$ feltételes valószínűséget keressük. Mivel a B_1, B_2, B_3 események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} = \\ &= \frac{0.09 \cdot 0.23 \cdot 10^{-2}}{(0.09 \cdot 0.23 + 0.17 \cdot 0.42 + 0.41 \cdot 0.35) \cdot 10^{-2}} = 0.0879. \end{aligned}$$

•3. **Megoldás.** (Új és régi kezelés) Vezessük be a következő jelöléseket

$U \doteq$ a kiválasztott beteg új kezelésben részesült,
 $Gy \doteq$ a kiválasztott beteg gyógyult.

A feladat szövege alapján tudjuk, hogy $\mathbb{P}(U) = 0.33$, $\mathbb{P}(Gy|\bar{U}) = 0.75$, $\mathbb{P}(Gy|U) = 0.90$. A $\mathbb{P}(U|Gy)$ feltételes valószínűséget keressük. A komplementer esemény valószínűsége alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\bar{U}) = 0.67$. Mivel az U és $\bar{U}$ események nemzérus valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszert alkotnak, így alkalmazható a Bayes Tétel.

$$\mathbb{P}(U|Gy) = \frac{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(Gy|U)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(Gy|\bar{U})\mathbb{P}(\bar{U})} = \frac{0.90 \cdot 0.33}{0.90 \cdot 0.33 + 0.75 \cdot 0.67} = 0.3715.$$

•4. **Megoldás.** Az előző feladat megoldásával analóg módon kapjuk, hogy

$$\frac{0.00013 \cdot 0.36}{0.00013 \cdot 0.36 + 0.00042 \cdot 0.64} = \frac{13 \cdot 36}{13 \cdot 36 + 42 \cdot 64} = 0.1483.$$

*5. **Megoldás.** (Leopárdos feladat) A feladat megoldásában nagy szerepe van a szöveg értelmezésnek. Vezessük be a következő jelöléseket

$T \doteq$ támad a leopárd,
 $\bar{Ö}l \doteq$ öl a leopárd,
 $E \doteq$ egyéb veszélyek miatt hal meg a vadász,
 $H \doteq$ meghal a vadász.

A szöveg alapján az alábbi adatokat ismerjük: $\mathbb{P}(T) = 0.11$, $\mathbb{P}(\bar{Ö}l|T) = 0.40$, $\mathbb{P}(E) = 0.09$. A $\mathbb{P}(\bar{Ö}l|H)$ ismeretlen feltételes valószínűséget keressük.

A szöveg alapján úgy gondoljuk, hogy $\bar{Ö}l \subseteq T$, mivel ha nem támad a leopárd, akkor ölni sem tud. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\bar{Ö}l) = \mathbb{P}(\bar{Ö}l|T)\mathbb{P}(T) = 0.11 \cdot 0.4, \quad \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\bar{Ö}l \cup E) = \mathbb{P}(\bar{Ö}l) + \mathbb{P}(E) = 0.11 \cdot 0.4 + 0.09.$$

Felhasználva, hogy $\bar{Ö}l \subseteq H$, a keresett feltételes valószínűség

$$\mathbb{P}(\bar{Ö}l|H) = \frac{\mathbb{P}(\bar{Ö}l \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\mathbb{P}(\bar{Ö}l)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{0.11 \cdot 0.4}{0.11 \cdot 0.4 + 0.09} = 0.3284.$$

•S6. **Megoldás.** (Dobozokból húzunk golyókat húzunk) Vezessük be a következő jelöléseket.

$A \doteq$ fehér golyót húzunk,
 $B_i \doteq$ az i -edik dobozt választjuk ($i = 1, 2, \dots, 20$).

Az $\mathbb{P}(A)$ valószínűséget keressük. Mivel a $B_1, B_2, \dots, B_{20}$ események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B_k)$ valahányszor $j, k = 1, 2, \dots, 20$, így $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{20}$ minden $i = 1, 2, \dots, 20$ esetén. Tudjuk továbbá, hogy

$$\mathbb{P}(A|B_i) = \frac{17+i-1}{36} \quad (i = 1, 2, \dots, 20).$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i) = \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{20} + \frac{18}{36} \cdot \frac{1}{20} + \dots + \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{20} = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot (17 + 18 + \dots + 36) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{17+36}{2} \cdot 20 = \\ &= \frac{17+36}{2 \cdot 36} = 0.7361. \end{aligned}$$

***7. Megoldás.** Vezessük be a következő jelöléseket

$A \doteq$ az igazak városában vagyunk,

$B \doteq$ a hamisak városában vagyunk,

$C \doteq$ a megkérdezett ember azt mondja, hogy ez a hazugok városa,

$I \doteq$ a megkérdezett ember igazat mond,

$H \doteq$ a megkérdezett ember hazudik.

A feladat megoldásában a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy fel kell ismerni, hogy feltételes valószínűséget kell kiszámolnunk. Nevezetesen a $\mathbb{P}(H|C)$ feltételes valószínűség kiszámítása a kérdés. A feladat megoldása függ attól, hogy hogyan értelmezzük a szöveget. Úgy gondoljuk, hogy egy adott kérdésre adott válasz igaz, vagy hamis volta függ a kérdéstől, azaz a C és a H események nem függetlenek.

Ismerünk néhány adatot, úgy mint

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(I|A) = 0.72, \quad \mathbb{P}(H|B) = 0.87.$$

A Bayes Tétel alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(H|C) = \frac{\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|I) \cdot \mathbb{P}(I)}.$$

A továbblépéshez szükség van egy kis ügyeskedésre. Itt használjuk fel, hogy mit is jelent a C esemény.

$$\mathbb{P}(C|H) \cdot \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(C \cap H) = \mathbb{P}(A \cap H) = \mathbb{P}(H|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(C|I) \cdot \mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(C \cap I) = \mathbb{P}(B \cap I) = \mathbb{P}(I|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Mivel az I és a H események egymás komplementerei, így a komplementer esemény feltételes valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján

$$\mathbb{P}(H|A) = 1 - \mathbb{P}(I|A) = 1 - 0.72, \quad \mathbb{P}(I|B) = 1 - \mathbb{P}(H|B) = 1 - 0.87,$$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H|C) &= \frac{\mathbb{P}(H|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(H|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(I|B) \cdot \mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{(1 - 0.72) \cdot \frac{1}{2}}{(1 - 0.72) \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0.87) \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1 - 0.72}{2 - (0.72 + 0.87)} = 0.6829. \end{aligned}$$

•8. Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$E \doteq \text{lesz eső}, \quad Sz \doteq \text{lesz szél}.$$

A bevezetett jelölésekkel az ismert adatok az következő módon írhatóak fel:

$$\mathbb{P}(E) = 0.23, \quad \mathbb{P}(Sz) = 0.51, \quad \mathbb{P}(Sz|E) = 0.33.$$

A $\mathbb{P}(E|Sz)$ feltételes valószínűséget keressük. A Bayes Formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(E|Sz) = \frac{\mathbb{P}(E \cap Sz)}{\mathbb{P}(Sz)} = \frac{\mathbb{P}(Sz|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(Sz)} = \frac{0.33 \cdot 0.23}{0.51} = 0.1488.$$

•9. Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket

$$T \doteq \text{egy véletlenszerűen kiválasztott embernek van televíziója},$$

$$A \doteq \text{egy véletlenszerűen kiválasztott embernek van autója}.$$

Ezekkel a jelölésekkel: $\mathbb{P}(T) = 0.95$ és $\mathbb{P}(A) = 0.92$. A $\mathbb{P}(T|A)$ feltételes valószínűséget keressük. Először a szita formula segítségével alsó becslést adunk a $\mathbb{P}(A \cap T)$ valószínűségre:

$$1 \geq \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = 0.95 + 0.92 - 1 = 0.87.$$

A keresett alsó becslés:

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap T)}{\mathbb{P}(A)} \geq \frac{0.87}{0.92} = 0.9457.$$

10. Megoldás. Tetszőleges $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén jelölje A_i azt az eseményt, hogy a keresett személy az i -edik teremben van. Így kapjuk, hogy

$$p = \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_5) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_5) = 5\mathbb{P}(A_5).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_5) = \frac{p}{5}.$$

Így a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_5 | \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4}) &= \frac{\mathbb{P}(A_5 \cap (\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4}))}{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_4})} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_4})} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_5)}{1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{1 - 4 \cdot \mathbb{P}(A_1)} = \\ &= \frac{\frac{p}{5}}{1 - \frac{4p}{5}} = \frac{p}{5 - 4p}. \end{aligned}$$

3.3.3. A lánc szabály

11. Megoldás. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy egy szúnyog túléli az i -edik permetezést tetszőleges $i = 1, 2, 3$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1) &= 0.2, \\ \mathbb{P}(B_2 | B_1) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B_2} | B_1) = 1 - 0.8 = 0.2, \\ \mathbb{P}(B_3 | B_1 \cap B_2) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B_3} | B_1 \cap B_2) = 1 - 0.8 = 0.2. \end{aligned}$$

A $\mathbb{P}(B_2 \cap B_3 | B_1)$ feltételes valószínűséget keressük. A láncszabály alapján kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2 | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3 | B_1 \cap B_2) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.0^3 = 0.008.$$

Így a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(B_2 \cap B_3 | B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{0.2^3}{0.2} = 0.2^2 = 0.04.$$

3.3.4. Események függetlensége

•13. Megoldás. Az A , B és C független események, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 0.45, & \mathbb{P}(\overline{A}) &= 0.55, \\ \mathbb{P}(B) &= 0.60, & \mathbb{P}(\overline{B}) &= 0.40, \\ \mathbb{P}(C) &= 0.76, & \mathbb{P}(\overline{C}) &= 0.24. \end{aligned}$$

Ekkor egy korábbi feladat, illetve a teljes függetlenség és véges additivitás tulajdonságok alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{C}) = \\ &= 0.55 \cdot 0.40 \cdot 0.24 = 0.0528;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}((\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = \\ &= \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.0528 + 0.0432 + 0.0792 + 0.1672 = 0.3424;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.0432 + 0.0792 + 0.1672 = 0.2896;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.45 + 0.60 + 0.76 - 0.27 - 0.342 - 0.456 + 0.2052 = 0.9472;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &= 1 - 0.2052 = 0.7948;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I) &= \mathbb{P}((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)) = \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{C}) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.0648 + 0.1368 + 0.2508 = 0.4524;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.27 + 0.342 + 0.456 - 2 \cdot 0.2052 = 0.6576;\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.2052.$$

•14. Megoldás. A $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$ értéke,

- a. ha $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$ könnyen meghatározható, mivel $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$, így A és B függetlenek, de akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0.17 = 0.83.$$

- a. Ha $\mathbb{P}(A) = 0.18$, $\mathbb{P}(A|B) = 0.17$ és $\mathbb{P}(B|A) = 0.69$ ekkor az A és B események nem függetlenek, így többet kell számolni. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))}{1 - \mathbb{P}(B)}.$$

Mivel

$$0.69 = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.18},$$

így kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.69 \cdot 0.18$. Mivel

$$0.17 = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.69 \cdot 0.18}{\mathbb{P}(B)},$$

így kapjuk, hogy $\mathbb{P}(B) = \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17}$. Tehát

$$\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{1 - (0.18 + \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17} - 0.69 \cdot 0.18)}{1 - \frac{0.69 \cdot 0.18}{0.17}} = 0.7929.$$

- 16. Megoldás. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|A \cup B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{0.24}{0.24 + 0.86 - 0.24 \cdot 0.86} = 0.2686. \end{aligned}$$

- S18. Megoldás. (Egérke és a sajt.) Események:

$A \doteq$ az első folyosó átjárható,

$B \doteq$ a második folyosó átjárható,

$C \doteq$ a harmadik folyosó átjárható.

A feladatot kétféle módon is megoldjuk:

I.Mo: A szita formula és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
 &= 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
 &= 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\
 &= 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A)^2 + \mathbb{P}(A)^3 = \\
 &= 3 \cdot 0.53^3 - 3 \cdot 0.53^6 + 0.53^9 = 0.3834.
 \end{aligned}$$

II.Mo: Számolhatunk a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés felhasználásával is. Ekkor is felhasználjuk a függetlenséget.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \mathbb{P}(\overline{B}) \mathbb{P}(\overline{C}) = \\
 &= 1 - (1 - 0.53^3)^3 = 0.3834.
 \end{aligned}$$

A feladatban látott gondolatmenet alapján kapjuk, hogy ha $\mathcal{A} \doteq \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ teljesen független eseményekből álló eseményrendszer, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén úgy, hogy

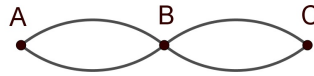
1. $\mathcal{B}_i \neq \emptyset$ tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén;
2. $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_k = \emptyset$, ha $j \neq k$;
3. $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{A}$;

és a B_i eseményeket

$$B_i = \bigcap \mathcal{B}_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

módon definiáljuk, akkor a $B_1, B_2, \dots, B_r$ események teljesen függetlenek.

***S19. Megoldás.** (A hó miatt járhatatlan utak I.) Az alábbi ábrán az A, B, C településeket összekötő utak láthatóak.



Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$U_{XY} \doteq$ az X városból az Y városba el lehet jutni.

Jelölje továbbá a az A -ból B -be vezető utak járhatóságát U_1 , illetve U_2 ; a B -ból C -be vezető utak járhatóságát U_3 , illetve U_4 ; továbbá $\mathbb{P}(\overline{U_i}) = p$ tetszőleges $i = 1, 2, 3, 4$ esetén. A feladat kétféleképpen is megoldható.

I. Mo: Közvetlenül számoljuk a keresett valószínűséget.

$$\mathbb{P}(U_{AB}|\overline{U_{AC}}) = \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})}.$$

Érdemes észrevenni, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek, ugyanis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{U_{AB}}) &= \mathbb{P}(\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) = p^2, \\ \mathbb{P}(\overline{U_{BC}}) &= \mathbb{P}(\overline{U_3} \cap \overline{U_4}) = p^2, \\ \mathbb{P}(\overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{BC}}) &= \mathbb{P}((\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) \cap (\overline{U_3} \cap \overline{U_4})) = p^4.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_{AB}|\overline{U_{AC}}) &= \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})} = \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{BC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{BC}})} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap (\overline{U_{AB}} \cup \overline{U_{BC}}))}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}})}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \\ &= \frac{(1 - p^2)p^2}{1 - (1 - p^2)^2} = \frac{1 - p^2}{2 - p^2}.\end{aligned}$$

II. Mo: A komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_{AB}|\overline{U_{AC}}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{U_{AB}}|\overline{U_{AC}}) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\overline{U_{AB}} \cap \overline{U_{AC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})} = 1 - \frac{\mathbb{P}(\overline{U_{AB}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})} = \\ &= 1 - \frac{p^2}{1 - (1 - p^2)^2} = \frac{1 - p^2}{2 - p^2}.\end{aligned}$$

A feladatban látott gondolatmenet alapján kapjuk, hogy ha $\mathcal{A} \doteq \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ teljesen független eseményekből álló eseményrendszer, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén úgy, hogy

1. $\mathcal{B}_i \neq \emptyset$ tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén;
2. $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_k = \emptyset$, ha $j \neq k$;
3. $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{A}$;

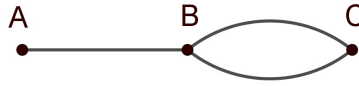
és a B_i eseményeket

$$C_i = \bigcup \mathcal{B}_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

módon definiáljuk, akkor a $C_1, C_2, \dots, C_r$ események teljesen függetlenek.

Sőt, a $D_1, D_2, \dots, D_r$ események is teljesen függetlenek, ahol $D_i \in \{B_i, C_i\}$ tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén, ahol a $\{B_i\}_{i=1}^r$ események az előző feladatot követő megjegyzésben vannak definiálva.

S20. Megoldás. (A hó miatt járhatatlan utak II.)



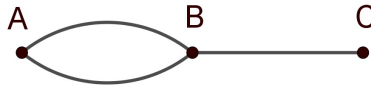
Események:

$$U_{XY} \doteq \text{az } X \text{ városból az } Y \text{ városba el lehet jutni.}$$

Ezúttal a direkt megoldást választjuk, bár lehet, hogy a komplementer esemény valószínűségét egyszerűbb lenne kiszámítani. Az előző feladatban látott módon most is megmutatható, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek. Így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}) &= \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})} = \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}})}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \\ &= \frac{(1-p)p^2}{1 - (1-p)(1-p^2)} = \frac{(1-p)p}{1 + p - p^2}. \end{aligned}$$

S21. Megoldás. (A hó miatt járhatatlan utak III.)



Események:

$$U_{XY} \doteq \text{az } X \text{ városból az } Y \text{ városba el lehet jutni.}$$

Megint módon számolunk a komplementer esemény valószínűségének a kiszámítása helyett. Az előző feladatban látott módon most is megmutatható, hogy az U_{AB} és U_{BC} események függetlenek. Így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}}) &= \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{AC}})}{\mathbb{P}(\overline{U_{AC}})} = \frac{\mathbb{P}(U_{AB} \cap \overline{U_{BC}})}{1 - \mathbb{P}(U_{AB} \cap U_{BC})} = \\ &= \frac{(1-p^2)p}{1 - (1-p^2)(1-p)} = \frac{1-p^2}{1 + p - p^2}. \end{aligned}$$

•S22. Megoldás. Események:

$$\begin{aligned} A &\doteq \text{az } A \text{ játékos talál bele a kosárba,} & \mathbb{P}(A) &= 0.75, \\ B &\doteq \text{a } B \text{ játékos talál bele a kosárba,} & \mathbb{P}(B) &= 0.72. \end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(5. \text{ dobás után ér véget a játék}) &= \\ &= (1 - 0.75)(1 - 0.72)(1 - 0.75)(1 - 0.72) \cdot 0.75 = \\ &= (1 - 0.75)^2(1 - 0.72)^2 \cdot 0.75 = \frac{147}{40000} = 3.675 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

•S23. Megoldás. A megoldás során felhasználjuk a mértani sor összegképletére vonatkozó jól ismert képletet:

A mértani sor összegképlete:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{ha} \quad |q| < 1.$$

A golyók száma: összesen 30 golyó van, melyek közül 11 fehér, és 19 piros. Így

$$\mathbb{P}(\text{Fehéret húzunk}) \doteq \mathbb{P}(F) = \frac{11}{30}, \quad \mathbb{P}(\text{Pirosat húzunk}) \doteq \mathbb{P}(P) = \frac{19}{30}.$$

Események:

$$\begin{aligned} A_k &\doteq \text{a } k\text{-edik lépésben ér véget a játék,} \\ P_k &\doteq \text{a } k\text{-edik lépésben pirosat húzunk,} \\ F_k &\doteq \text{a } k\text{-edik lépésben fehéret húzunk.} \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Nem a kezdő húz először pirosat}) &= \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_6) + \dots = \\ &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap P_6) + \dots = \\ &= \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^3 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^5 \cdot \mathbb{P}(P) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{11}{30} \frac{19}{30} \right) \cdot \left[\left(\frac{11}{30} \right)^2 \right]^k = \\ &= \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{11}{30} \right)^2} = \frac{19 \cdot 11}{30^2 - 11^2} = \frac{11}{41} = 0.2683. \end{aligned}$$

Azok számára, akik nem szeretik használni a geometriai sor összegképletét, megmutatjuk, hogy a feladat az összegképlet használata nélkül is megoldható. Ehhez tekintsük az alábbi eseményeket:

$A \doteq$ a kezdő játékos nyer;

$B \doteq$ nem a kezdő játékos nyer.

A $\mathbb{P}(B)$ valószínűséget keressük. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^2 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^4 \cdot \mathbb{P}(P) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{19}{30} \left[\left(\frac{11}{30} \right)^2 \right]^k ;$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^3 \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(F)^5 \cdot \mathbb{P}(P) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{11}{30} \frac{19}{30} \right) \cdot \left[\left(\frac{11}{30} \right)^2 \right]^k .$$

Mivel

$$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \frac{11}{30} \mathbb{P}(A) = \frac{41}{30} \mathbb{P}(A),$$

így $\mathbb{P}(A) = \frac{30}{41}$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{30}{41} = \frac{11}{41}.$$

•24. Megoldás. Események:

$A_n \doteq$ az n -edik dobás során nem kapunk dupla hatost,

$B_n \doteq$ n dobás alatt egyszer sem kapunk dupla hatost.

Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Így

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Felhasználva a függetlenséget kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)^n = \left(\frac{35}{36} \right)^n \leq 0.36.$$

Exponenciális egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\ln \left(\left(\frac{35}{36} \right)^n \right) \leq \ln(0.36), \quad n \ln \left(\frac{35}{36} \right) \leq \ln(0.36), \quad n \geq \frac{\ln(0.36)}{\ln(\frac{35}{36})} = 36.27.$$

Legalább 37-szer kell feldobni a kockát.

25. Megoldás. Események:

$A \doteq$ az első lottószelvényen van egy legalább 2-es találatom ,

$B \doteq$ a második lottószelvényen van egy legalább 2-es találatom .

Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{85}{5} + \binom{5}{1} \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 0.0233.$$

A szita-formula és a függetlenség alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \\ &= 2\mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A))^2 = \mathbb{P}(A)[2 - \mathbb{P}(A)] = 0.4060. \end{aligned}$$

3.3.5. Bizonyítsa be, hogy ...

◦26. Megoldás.

a. $\mathbb{P}(C|C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = 1.$

b. **(a feltételes valószínűség véges additivitása)** Legyenek az A, B, C események olyanok, hogy $\mathbb{P}(C) > 0$, de $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Mivel $\mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = 0$, így a szita formula alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B|C) &= \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))}{\mathbb{P}(C)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} + \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C). \end{aligned}$$

Lehet, hogy egy kicsit túl bonyolítottam. A számolásokhoz elegendő belátni hogyha $A \cap B = \emptyset$ és $\mathbb{P}(C) > 0$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C)$, ez pedig a valószínűség véges additivitása alapján könnyen kijön.

b. **(a komplementer esemény feltételes valószínűsége)** Egyrészt közvetlenül definícióként kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup \bar{A}|C) = \mathbb{P}(\Omega|C) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = 1,$$

így a feltételes valószínűség véges additivitása alapján kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(\bar{A}|C),$$

amiből rendezéssel kapjuk a bizonyítandó állítást.

◦27. **Megoldás.** A **Bayes formula** a feltételes valószínűség definíciója alapján közvetlenül adódik, ugyanis

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

◦28. **Megoldás.** A **teljes valószínűség tételének** igazolásához érdemes észrevenni, hogy az $A = \bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j)$ egy diszjunkt únió, így a valószínűség véges additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

◦29. **Megoldás.** A **Bayes tétel** a Bayes formula és a teljes valószínűség tételének közvetlen következménye, ugyanis

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

◦30. **Megoldás.** A **lác szabály** a feltételes valószínűség definíciója alapján könnyen megkapható, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) &= \\ &= \mathbb{P}(B_1) \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_1)} \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)} = \\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3). \end{aligned}$$

◦31. **Megoldás.**

a. Ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Ebből a szita formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

b. Ha $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1,$$

ami csak úgy lehet, ha $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Ebből a szita formula alapján kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

ami csak úgy lehet, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

◦32. **Megoldás.**

Ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, így $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, azaz az A és B események függetlenek.

Ha $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$, így $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, azaz az A és B események függetlenek.

◦33. **Megoldás.** Tegyük fel, hogy az A és a B események függetlenek. Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) &= (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \\ &= \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).\end{aligned}$$

*◦34. **Megoldás.** Elegendő megmutatni, hogyha $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq \mathcal{B}$, akkor

$$\mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(B_n),$$

ez azonban az előző feladatban látott gondolatmenettel könnyen igazolható:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(B_n) &= (1 - \mathbb{P}(B_1))\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(B_n) = \\ &= \mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) \dots \mathbb{P}(B_n) = \\ &= \mathbb{P}(B_2 \cap \dots \cap B_n) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \\ &= \mathbb{P}((B_2 \cap \dots \cap B_n) \setminus (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)) = \\ &= \mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n).\end{aligned}$$

*◦35. **Megoldás.** Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 1-nél kisebb valószínűségű eseményekből álló Ω -t lefedő teljesen független eseményrendszer. Felhasználjuk az előző feladat eredményét, mely szerint az a $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_n\}$ eseményrendszer is teljesen független. így

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}(\overline{B_1 \cup \dots \cup B_n}) = \mathbb{P}(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_n) = \\ &= \mathbb{P}(\bar{B}_1) \dots \mathbb{P}(\bar{B}_n) = (1 - \mathbb{P}(B_1)) \dots (1 - \mathbb{P}(B_n)) > 0,\end{aligned}$$

ami ellentmondás. A kapott ellentmondás igazolja állításunk helyességét.

4. fejezet

Valószínűségi változók (diszkrét eset), Várható érték és szórásnégyzet

4.1. Rövid elméleti összefoglaló

4.1.1. Valószínűségi változók

Valószínűségi változó: Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valószínűségi változónak** nevezünk, ha

$$(\xi < x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz a ξ nívóhalmazai események.

Érdemes megjegyezni, hogyha ξ tetszőleges valószínűségi változó, akkor

$$(\xi = x) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye: Legyen ξ egy tetszőleges valószínűségi változó. Az $\mathbb{F}_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_\xi(x) \doteq \mathbb{P}(\xi < x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt a ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük. Tehát minden valószínűségi változónak van eloszlásfüggvénye.

A szakirodalom a valószínűségi változó definíciójában nem egységes, vannak a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $\mathbb{F}_{\xi \leq x}$ módon definiálják tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

A szakirodalom a valószínűségi változók jelölésében sem egységes, mi szeretjük a görög kisbetűket, például $\xi, \eta, \dots$; mások azonban előszeretettel használnak latin nagybetűket, például $X, Y, Z, \dots$.

ennél lényegesebb különbség az, hogy a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $\mathbb{F}_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi \leq x)$ ($x \in \mathbb{R}$) módon definiálják. Ebben az esetben az eloszlásfüggvény (bal) helyett jobbról lesz folytonos, a tulajdonságok hasonlóak, de $\mathbb{F}(x_0 - 0)$ helyett $\mathbb{F}(x_0)$ -át, illetve $\mathbb{F}(x_0)$ helyett $\mathbb{F}(x_0 - 0)$ -át kell írni. (Az $\mathbb{F}(x_0 - 0)$, illetve az $\mathbb{F}(x_0 - 0)$ az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény bal-, illetve jobboldali határértékét jelöli.)

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai: Az $\mathbb{F}_\xi$ eloszlásfüggvény

1. *Monoton növekvő;*
2. *Balról folytonos;*
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_\xi(x) = 1.$

Négyféle valószínűségi változó van:

- **Diszkrét;**
- **Abszolút folytonos;**
- **Kevert;**

Ez a felosztás nem fedi le az összes valószínűségi változók halmazát, azonban a gyakorlati alkalmazások szempontjából ezek a legfontosabbak.

Egy ξ valószínűségi változó

- **Diszkrét**, ha az értékkészlete megszámlálható.
- **Abszolút folytonos**, ha van eloszlásfüggvénye, azaz létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- **Kevert**, ha eloszlásfüggvénye előáll két, (vagy több) eloszlásfüggvény keverékeként (azaz konvex kombinációjaként).

4.1.2. Diszkrét valószínűségi változók

Elevenítsük fel!

- **Véges halmaz, végtelen halmaz:** Az üres halmaz véges. Az egy elemű halmazok végesek. A két elemű halmazok végesek. A három elemű halmazok végesek. (és így tovább) Egy halmaz végtelen, ha nem véges.
- Egy X halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha ugyanannyi eleme van, mint amennyi a pozitív egészek halmazának (azaz létezik $\varphi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ bijekció). Ezt úgy is megjegyezhetjük, hogy a halmaz elemei (injektív) sorozatba rendezhetők, azaz $X = \{x_i | i \in \mathbb{Z}_+\}$ és $x_j \neq x_k$ valahányszor $j \neq k$.
- Egy halmaz **megszámlálható:** ha véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.

A legegyszerűbb példa megszámlálhatóan végtelen halmazra a pozitív egész számok halmaza. Megszámlálhatóan végtelen halmazok például az egész számok, a racionális számok, de az n -dimenziós Euklideszi tér összes racionális pontjainak a halmaza is. (Egy pontot akkor nevezünk racionálisnak, ha minden koordinátája racionális.)

Nem megszámlálható halmaz a valós számok halmaza. A valós számok halmazának számosságát kontinuum számosságnak nevezzük. Kontinuum számosságú halmaz például egy nemüres és nem egyelemű intervallum pontjainak halmaza, illetve az irracionális számok halmaza.

Ne gondolja senki, hogy minden végtelen halmaz vagy megszámlálhatóan végtelen, vagy kontinuum számosságú. Georg Cantor tétele szerint minden halmaznál van nagyobb számosságú halmaz. Például egy megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaznál nagyobb számosságú egy kontinuum számosságú halmaz, egy kontinuum számosságú halmaznál nagyobb számosságú annak összes részhalmazának halmaza (és így tovább).

Diszkrét valószínűségi változó: Azt mondjuk, hogy egy ξ **valószínűségi változó diszkrét**, ha értékkészlete megszámlálható. Egy ξ diszkrét valószínűségi változó értékkészletét $\mathcal{R}_\xi \doteq \{x_1, x_2, \dots\}$ módon jelöljük.

Ha ξ egy diszkrét valószínűségi változó, akkor a $p_1 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_1)$, $p_2 \doteq \mathbb{P}(\xi = x_2)$, $\dots$ valós számsorozatot a ξ valószínűségi változó **eloszlásának** a nevezzük.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a tulajdonságai Minden diszkrét valószínűségi változó eloszlása nemnegatív, 1 összegű valós számok véges, vagy végtelen sorozata.

4.1.3. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete

A ξ diszkrét valószínűségi változó várható értékének az

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$$

módon definiált valós számot nevezzük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor abszolút konvergens (azaz a sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sor is konvergens. Az abszolút konvergens sorok konvergensek, de a megfordítás nem igaz. Azokat a sorokat, amelyek nem abszolút konvergensek, de konvergensek, relatív konvergens soroknak nevezzük). Az abszolút konvergencia azért van megkövetelve, mert az abszolút konvergens sorok matematikai szempontból jobb tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a relatív konvergensek.

A fenti definícióból látszik, hogy nem minden valószínűségi változónak van várható értéke.

A transzformációs szabály diszkrét valószínűségi változó esetén: Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek van várható értéke, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy ("elég jó") függvény. Ekkor a $g(\xi)$ valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) p_i.$$

A transzformációs formula azt fejezi ki, hogy a $g(\xi)$ várható értékének a kiszámolásához nem kell meghatároznunk a $g(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását, az $\mathbb{E}(g(\xi))$ a ξ eloszlása alapján számolható.

Valószínűségi változó szórásnégyzete és szórása A ξ valószínűségi változó

- **szórásnégyzetének** a

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$$

módon definiált valós számot nevezzük, amennyiben a definícióban szereplő numerikus sor konvergens.

- **A szórásnégyzet kiszámítása:**

$$\mathbb{D}^2(\xi) \doteq \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2.$$

- Az $\mathbb{E}(\xi^2)$ számot a ξ valószínűségi változó **második momentumának** nevezzük. Az $\mathbb{E}(\xi^2)$ diszkrét esetben például a transzformációs szabály alapján $\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i$ módon számolható.
- Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek van szórásnégyzete, akkor a

$$\mathbb{D}(\xi) \doteq \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$$

módon definiált számot a ξ valószínűségi változó **szórásának** nevezzük.

A fenti definícióból látszik, hogy nem minden valószínűségi változónak van szórásnégyzete.

Példa Egy urnában van két golyó, egy piros és egy kék. Kihúzzunk 3-at visszatevéssel. Határozzuk meg a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo:

- A golyók halmaza legyen $G = \{P, K\}$.
- Az eseménytér:

$$\Omega \doteq G \times G \times G = \left\{ \underbrace{(P, P, P)}_{\omega_1}, \underbrace{(P, P, K)}_{\omega_2}, \underbrace{(P, K, P)}_{\omega_3}, \underbrace{(P, K, K)}_{\omega_4}, \right. \\ \left. \underbrace{(K, P, P)}_{\omega_5}, \underbrace{(K, P, K)}_{\omega_6}, \underbrace{(K, K, P)}_{\omega_7}, \underbrace{(K, K, K)}_{\omega_8} \right\}.$$

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező.

- Készítsük el a ξ valószínűségi változó értéktáblázatát.

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
$\xi(\omega_i)$	3	2	2	1	2	1	1	0

$$\Omega \doteq G \times G \times G = \left\{ \underbrace{(P, P, P)}_{\omega_1}, \underbrace{(P, P, K)}_{\omega_2}, \underbrace{(P, K, P)}_{\omega_3}, \underbrace{(P, K, K)}_{\omega_4}, \right. \\ \left. \underbrace{(K, P, P)}_{\omega_5}, \underbrace{(K, P, K)}_{\omega_6}, \underbrace{(K, K, P)}_{\omega_7}, \underbrace{(K, K, K)}_{\omega_8} \right\}.$$

- Most meghatározzuk a ξ valószínűségi változó eloszlását. A ξ valószínűségi változó értékészlete

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

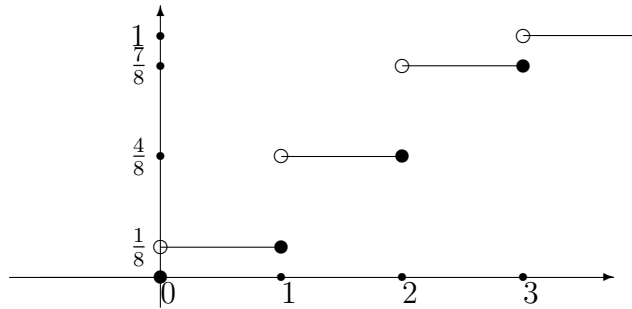
- A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$\begin{aligned} (\xi = 0) = \{\omega_8\} &\implies p_0 = \mathbb{P}(\xi = 0) = \frac{1}{8}, \\ (\xi = 1) = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7\} &\implies p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{3}{8}, \\ (\xi = 2) = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\} &\implies p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{3}{8}, \\ (\xi = 3) = \{\omega_1\} &\implies p_3 = \mathbb{P}(\xi = 3) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

- Foglaljuk táblázatba a ξ valószínűségi változó eloszlását.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:



Ebből a példából is látszik, hogy ha egy valószínűségi változó csak véges sok értéket vesz fel, akkor az eloszlásfüggvénye egy olyan balról folytonos lépcsős függvény, amely a valószínűségi változó legkisebb értékénél kisebb vagy egyenlő helyeken 0, a legnagyobb értékénél nagyobb helyeken 1 értéket vesz fel, továbbá minden x_i helyen p_i értéket ugrik.

A táblázatból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5 \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3 \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3 - 1.5^2 = 0.75\end{aligned}$$

A következő gyakorlaton majd látni fogjuk, hogy a példabeli ξ valószínűségi változó Binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Innen kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = np = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = npq = \frac{3}{4},$$

(ahol $q \doteq 1 - p$).

4.1.4. A várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ_1, ξ_2, ξ valószínűségi változók; c egy valós szám. Ekkor:

1. **Additív**, azaz $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2)$;
2. **Homogén**, azaz $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$;
3. **Eltolással kapcsolatos tulajdonság**: $\mathbb{E}(\xi + c) = \mathbb{E}(\xi) + c$.
4. Ha ξ olyan, hogy $k \leq \xi$ leqslant K és ξ -nek van várható értéke, akkor $k \leq \mathbb{E}(\xi) \leq K$.

A fenti tulajdonságok úgy értendők, hogyha például az additivitás esetén a ξ_1 -nek és a ξ_2 -nek létezik várható értéke, akkor az összegüknek is létezik és az összeg várható értéke egyenlő a várható értékek összegével.

Ehhez persze kellene ismerni, hogy mi az a $\xi_1 + \xi_2$ és mi az a $c\xi$. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov féle valószínűségi mező, $\xi_1, \xi_2, \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi mezők, $c \in \mathbb{R}$ egy valós szám, akkor

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \xi_2)(\omega) &\doteq \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) \\ (c\xi)(\omega) &\doteq c\xi(\omega) \end{aligned} \quad (\omega \in \Omega),$$

azaz a függvények összegét és konstans szorosát a szokásos pontonkénti definícióval értelmezzük. Még tisztázni kellene, hogy valószínűségi változók összege és konstans szorosa szintén valószínűségi változó, de ezt most megelégedezünk magunknak, bár a bizonyítás is viszonylag egyszerű.

Ahhoz, hogy kellőképpen értékelni tudjuk, hogy például az additivitás milyen fontos tulajdonság, elég belegondolni, hogy az összeg várható értékének kiszámításához elegendő ismerni a tagok várható értékeit és nem kell ismernünk az összeg értékeit és eloszlását. Gondoljunk csak arra, hogy két dobókockával dobunk és keressük a dobott számok összegének a várható értékét.

4.1.5. A szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet

1. A szórásnégyzet általában nem additív, azaz a szórásnégyzetek általában nem adódnak össze.
2. **Négyzetesen homogén**, azaz $\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi)$;
3. **Transzláció invariáns**, azaz $\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2(\xi)$.

Bizonyos esetben mégis összeadódnak, például ha a ξ_1 és ξ_2 független valószínűségi változók, akkor a $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2)$ szórásnégyzet számolható a $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2)$ módon. Sajnos még nem tudjuk, hogy mit jelent a valószínűségi változók függetlensége, azonban van erről egy intuitív elképzelésünk. Például, ha két dobókockával dobunk (mondjuk egy pirossal és egy

késsel) és a dobott számok összegének a szórásnégyzetét akarjuk kiszámítani, akkor jelentse ξ_1 a piros, ξ_2 a kék dobókockával dobott számot. Ekkor a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók függetlenek lesznek, hiszen a dobókockák nem kommunikálnak, nem beszélik meg, hogy hogyan essenek.

A függetlenségnél van egy gyengébb feltétel, nevezetesen a korrelálatlanság. Ehhez először nézzük meg, hogy hogyan értelmezzük két valószínűségi változó kovarianciáját, majd nézzük meg az összeg szórásnégyzetére vonatkozó általános képletet. Ha ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók, akkor a $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ módon jelölt kovarianciát

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) \doteq \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)))$$

módon definiáljuk illetve szeretjük számolni. Az összeg szórásnégyzetére vonatkozó általános képlet a következő:

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \mathbb{D}^2(\xi_2).$$

Tehát a szórásnégyzet csak akkor additív, ha $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, azaz a ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok. A korrelálatlanság gyengébb tulajdonság a függetlenségnél, azaz ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, akkor korrelálatlanok is, azonban a megfordítás nem igaz, nevezetesen a ξ_1 és ξ_2 tudnak úgy korrelálatlanok lenni, hogy ne legyenek függetlenek. Pár gyakorlattal később erre fogunk nézni konkrét példát.

Nézzük meg, mi a helyzet n -tagú összeg esetén. n szerinti teljes indukcióval könnyű látni, hogy

$$\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2(\xi_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{cov}(\xi_j, \xi_k),$$

amiből kapjuk, hogy páronként független (vagy páronként korrelálatlan) esetben a szórásnégyzetek összeadódnak.

4.1.6. Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

Diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye: *A generátorfüggvény egy olyan matematikai segédeszköz, amely sok esetben segít a diszkrét valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a meghatározásában.*

Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi amely csak nemnegatív egész értékeket vesz fel. Definiáljuk a $G_\xi : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt

$$G_\xi(z) \doteq \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} p_k z^k = \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} \mathbb{P}(\xi = k) z^k \quad (z \in D)$$

módon. A D halmaz a komplex számok testének egy olyan legbővebb részhalmaza, amelyen a G_ξ hatványsor abszolút konvergens. A későbbiekben nem vizsgáljuk a D halmazt, és csak

olyan diszkrét valószínűségi változóknak határozzuk meg a generátorfüggvényét, amelyeknek létezik várható értéke és szórásnégyzete, ugyanis ezek az értékek a generátorfüggvény segítségével könnyen meghatározhatók.

- Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1)$$

módon számolható.

- Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'_\xi(1) + G''_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2$$

módon számolható.

4.1.7. Néhány egyszerű példa pörgettyűkkel és dobókockákkal

Példa Két szabályos pörgettyűvel pörgetünk (egy pirossal és egy kékkel). Mindkét pörgettyűvel a 0, 1, 2, számokat lehet kipörgetni. Számoljuk ki a két kipörgetett szám összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

Jelölje a ξ_1 és ξ_2 a piros és a kék pörgettyűvel kipörgetett számokat.

I. Mo.: (Így nem nagyon érdemes megoldani.)

Először meghatározzuk a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlását.

A $\xi_1 + \xi_2$ a 0, 1, 2, 3, 4 értékeket veheti fel. Az eloszlása:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2 \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{9} + 1^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + 3^2 \cdot \frac{2}{9} + 4^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{48}{9}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{48}{9} - (2)^2 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

II. Mo.: (Így érdemes számolni.)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_i) &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 \\ \mathbb{E}(\xi_i^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, \\ \mathbb{D}^2(\xi_i) &= \mathbb{E}(\xi_i^2) - [\mathbb{E}(\xi_i)]^2 = \frac{5}{3} - (1)^2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) = 2 \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(Ha nem 2 pörgettyűnk van, hanem mondjuk 100, és a kipörgetett számot keressük, akkor az I. Mo. szinte reménytelen, a második Mo. könnyű.)

Példa (Szabályos) dobókockával dobunk. Számoljuk ki a dobott számnak, mint valószínűségi változónak várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje ξ a dobott számot. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékei: $\xi(1) = 1$, $\xi(2) = 2, \dots, \xi(6) = 6$. A ξ eloszlása:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2} = 3.5, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) = \frac{91}{6}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.9167.\end{aligned}$$

Példa Egy dobókocka lapjaira egy olyan számtani sorozat első hat elemét írjuk, amelynek első tagja a_1 , a differenciája d . Ezzel a dobókockával dobunk. határozzuk meg a dobott szám várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo. A közvetlen számolás sem bonyolult, azonban gyorsabban célhoz érünk az alábbi módon:

Jelölje ξ egy szabályos dobókockával dobott számot, az η egy számtani sorozat elemét tartalmazó dobókockával dobott számot. Ekkor

$$\eta = a_1 + (\xi - 1)d.$$

Így az előző példa eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(a_1 + (\xi - 1)d) = a_1 + 2.5d \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(a_1 + (\xi - 1)d) = \frac{35}{12}d^2.\end{aligned}$$

Példa Két kockával dobunk, egy pirossal és egy késsel. Számoljuk ki a dobott számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Mo.: Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék dobókockával dobott számot. Legyen $\eta = \xi_1 + \xi_2$. A várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Mivel a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók függetlenek (intuíció alapján, mivel a dobókockák esés közben nem beszélik meg egymással, hogy melyik lapjukra esenek), ezért a szórásnégyzetek összeadódnak, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 5.8333.$$

Ugyanígy számolható az a feladat, amikor nem két kockával, hanem 100 kockával dobunk (vagy ami ugyanaz, egy kockával dobunk 100-szor) és a dobott számok összegének a várható értékét illetve szórásnégyzetét keressük.

Tehát $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ eloszlásának megkeresése nem túl egyszerű, a várható érték és a szórásnégyzet kiszámításához fölösleges, de önmagában akár még érdekes is lehet.

4.2. Feladatok

4.2.1. Várható érték és szórásnégyzet

1.●S Feladat. Egy lezser hallgató maximum négyszer jöhet el vizsgázni, és minden vizsgán 0.25 valószínűséggel megy át. Hányszor vizsgázik átlagban egy lezser hallgató?

2.●S Feladat. Az A és B játékos felváltva dob kosárra (A kezd). Az A játékos 0.51, míg B 0.39 valószínűséggel talál a kosárba. A játék maximum 4 dobásig tart, de azonnal befejeződik, ha valamelyik játékos beletalált a kosárba. Számítsa ki a játékbeli dobások számának várható értékét!

3.●S Feladat. Egy játékban a játékos és a bankár is megpörgeti a rulettet. (A ruletten az 1, 2, ... , 7 számok vannak.) A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget, mint a bankár. A játékos nyérése esetén 1800 Ft nyereményt kap. Mennyit kellene a játékosnak minden pörgetése előtt befizetnie, hogy játékonként átlagosan 200 Ft haszna legyen a banknak?

4.●S Feladat. Egy dobozban 24 piros és 14 kék golyó van. A dobozból visszatevés nélkül kihúzzunk 3 golyót. Várhatóan hány piros golyót húzzunk ki?

4.2.2. Bizonyítsa be... (eloszlásfüggvény)

5.*o Feladat. Bizonyítsa be hogy egy valószínűségi változó $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénye

1. Monoton növekvő;
2. Balról folytonos;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x) = 1$.

4.3. Megoldások

4.3.1. Várható érték és szórásnégyzet

1.●S Megoldás. Jelölje ξ a vizsgák számát és jelölje A azt az eseményt, hogy a lezser hallgató átmegy egy adott vizsgán. Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0.25$. A ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlása:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, & p_1 &= 0.25, \\x_2 &= 2, & p_2 &= 0.75 \cdot 0.25, \\x_3 &= 3, & p_3 &= 0.75^2 \cdot 0.25, \\x_4 &= 4, & p_4 &= 0.75^3.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75^3 = \frac{175}{64} = 2.7344.$$

2.●S Megoldás. Jelölje ξ a dobások számát.

$$\mathbb{P}(A \text{ talál}) = 0.51, \quad \mathbb{P}(B \text{ talál}) = 0.39.$$

Ekkor a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlása:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, & p_1 &= 0.51, \\x_2 &= 2, & p_2 &= (1 - 0.51) \cdot 0.39 = 0.1911, \\x_3 &= 3, & p_3 &= (1 - 0.51) \cdot (1 - 0.39) \cdot 0.51 = 0.1524, \\x_4 &= 4, & p_4 &= (1 - 0.51) \cdot (1 - 0.39) \cdot (1 - 0.51) = (1 - 0.51)^2 \cdot (1 - 0.39) = 0.1465.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot 0.51 + 2 \cdot 0.1911 + 3 \cdot 0.152439 + 4 \cdot 0.14645 = 1.9354.$$

3.●S Megoldás. Jelölje J azt az eseményt, hogy a játékos nyer, B azt az eseményt, hogy a bank nyer. A $\mathbb{P}(J)$ valószínűség úgy számolható ki, hogy gondolatban táblázatba foglaljuk a pörgetés lehetséges kimeneteleit, úgy, hogy a sorok a játékos, az oszlopok a bank pörgetéseit jelölik. A játékos a főátló alatti cellákhoz tartozó kimenetek esetén nyer. Így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J) &= \frac{\frac{7 \cdot 7 - 7}{2}}{7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 - 7}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{7}, \\ \mathbb{P}(B) &= 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

x forintot kell a játékosnak befizetnie. A ξ valószínűségi változó jelöli a bank nyereségét. A ξ eloszlása:

x_i	x	$x - 1800$
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Így $200 = \mathbb{E}(\xi) = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}(x - 1800)$, amiből kapjuk, hogy

$$1400 = 4x + 3(x - 1800), \quad x = \frac{1400 + 5400}{7} = 971.4286.$$

4.●S Megoldás. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ eloszlása:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{\binom{24}{0}\binom{14}{3}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{1}\binom{14}{2}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{2}\binom{14}{1}}{\binom{38}{3}}$	$\frac{\binom{24}{3}\binom{14}{0}}{\binom{38}{3}}$

Így

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{\binom{24}{0}\binom{14}{3}}{\binom{38}{3}} + 1 \cdot \frac{\binom{24}{1}\binom{14}{2}}{\binom{38}{3}} + 2 \cdot \frac{\binom{24}{2}\binom{14}{1}}{\binom{38}{3}} + 3 \cdot \frac{\binom{24}{3}\binom{14}{0}}{\binom{38}{3}} = \frac{36}{19} = 1.8947.$$

Ez az eredmény úgy is megkapható, hogyha tudjuk, hogy ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 38$, $s = 14$, $n = 3$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = n \frac{s}{N} = 3 \cdot \frac{24}{38} = \frac{36}{19} = 1.8947.$$

4.3.2. Bizonyítsa be ... (eloszlásfüggvény)

5.*o Megoldás. (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai) Legyen $\mathbb{F}$ egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

1. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{F}$ monoton növekvő. Legyen $x < y$. Ekkor $(\xi < x) \subseteq (\xi < y)$, amiből a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) \leq \mathbb{P}(\xi < y) = \mathbb{F}(y).$$

2. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{F}$ balról folytonos. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Mivel $\mathbb{F}$ monoton növekvő, ezért a -ban mindkét oldali határértéke létezik. Az átviteli elv értelmében a bal oldali határértéke meghatározható az $\mathbb{F}(a - 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F}(a - \frac{1}{n})$ módon. Definiáljuk a (B_n) eseménysorozatot

$B_n := (\xi < a - \frac{1}{n})$ módon. Ekkor (B_n) egy növekvő eseménysorozat és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (\xi < a)$, amiből a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(a-0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left(a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi < a - \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{P}(\xi < a) = \mathbb{F}(a).\end{aligned}$$

3. A $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x) = 1$ határátmenetek a 2.-vel analóg módon bizonyíthatók.

5. fejezet

Nevezetes diszkrét eloszlások, abszolút folytonos valószínűségi változók

5.1. Rövid elméleti összefoglaló

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Diszkrét egyenletes;
2. Bernoulli;
3. Binomiális;
4. Hipergeometrikus;
5. Geometriai;
6. Poisson.

5.1.1. A diszkrét egyenletes eloszlás

Legyen $\Omega \doteq \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező. Definiáljuk a $\xi : \Omega \rightarrow R$ valószínűségi változót

$$\xi(\omega_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol (x_i) egy tetszőleges véges sorozat. Könnyű látni, hogy ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Diszkrét egyenletes eloszlásra példa a kockadobás szabályos dobókockával, azonban ha a dobókocka nem szabályos, akkor nem diszkrét egyenletes eloszlás valósul meg.

5.1.2. A Bernoulli eloszlás

A Bernoulli eloszlás pénzfeldobás nem feltétlenül szabályos érmével. Egy olyan érmét dobunk fel, ahol a fejdobás valószínűsége p , ahol $p \in]0, 1[$. Az érmét egyszer dobjuk fel és a ξ valószínűségi változó a fejdobások számát számolja. Ekkor azt mondjuk hogy ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó.

Kicsit jobban részletezve a Bernoulli eloszlást egy olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező írja le, amely esetén $\Omega = \{F, I\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$, a $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az Ω egyelemű részhalmazain $\mathbb{P}(\{F\}) = p$, $\mathbb{P}(\{I\}) = 1 - p \doteq q$. Ennél egyszerűbb valószínűségi mezőt elég nehéz elképzelni, azonban ez a valószínűségi mező csak akkor lesz klasszikus, ha az érme szabályos. Értelmezünk egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változót $\xi(F) = 1$, $\xi(I) = 0$. A ξ eloszlása:

x_i	0	1
p_i	q	p

Ekkor a ξ várható értékét és szórásnégyzetét

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq\end{aligned}$$

módon számolható. A Bernoulli eloszlás egyszerűsége ellenére nagyon fontos, mert például a binomiális eloszlás, illetve a geometriai eloszlás is a Bernoulliból származtatható. A Poisson eloszlás pedig megkapható a binomiálisból megfelelő határátmenet alkalmazásával.

A Bernoulli eloszlást Jakob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikusról nevezték el.

5.1.3. A binomiális eloszlás

Jelölje ξ egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát n független kísérlet esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ **binomiális eloszlású n és p paraméterekkel**, amit $\xi \sim B(n, p)$ módon jelölünk. Ekkor a ξ eloszlása

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = npq.$$

A fenti képletek úgy jegyezhetőek meg könnyen, ha arra gondolunk, hogy a ξ valószínűségi változó n darab független valószínűségi változó összege, azaz

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

ahol ξ_1 azt figyeli, hogy az A esemény az i -dik kísérlet során bekövetkezik-e minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. A ξ valószínűségi változók páronként független, p paraméterű valószínűségi változók. A ξ várható értékének a kiszámítása során tudjuk alkalmazni a várható érték additivitását; illetve, mivel a ξ_i valószínűségi változók páronként függetlenek, így a szórásnégyzetek is összeadódnak.

A visszatevéses golyóhúzás esetén szintén binomiális eloszlást kapunk. Alkalmazzuk a szokásos jelöléseket: N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N - s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros golyó van. Ekkor, ha ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor ξ binomiális eloszlású n és $p = \frac{s}{N}$ paraméterekkel.

Legyen $p \in (0, 1)$, és $q \doteq 1 - p$. A binomiális tétel alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1,$$

a szumma jel mögött éppen egy $\xi \sim B(n, p)$ valószínűségi változó eloszlásának a tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

5.1.4. A hipergeometrikus eloszlás

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Alkalmazzuk a szokásos jelöléseinket, azaz N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N - s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros golyó van. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (\max\{0, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\}),$$

tehát a ξ már nem mindig tud bármilyen értéket felvenni 0 és n között, mivel a golyókat a húzásokat követően már nem rakjuk vissza az urnába. Például, ha $0 < n - (N - s)$ akkor legalább ennyi piros golyót kell húznunk, mivel a fehérek már elfogytak és muszáj pirosat húznunk.

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = n \frac{s}{N}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{N-s}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

A hipergeometrikus eloszlás kapcsolatba hozható az úgynevezett Vandermonde azonossággal (1772), mely szerint

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$$

Ez az összefüggés már jóval Vandermonde előtt is ismert volt (1303) Zhu Shijie kínai matematikus révén.

5.1.5. A geometriai eloszlás

A geometriai eloszlásnak két változata van. Mindkét esetben független kísérletek sorozatát végezzük és egy p valószínűségű A esemény bekövetkezését figyeljük.

A. változat: Jelölje ξ az első sikeres bekövetkezéshez szükséges kísérletek számát. Ekkor ξ -t p **paraméterű geometriai eloszlásnak** nevezzük.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

B. változat: Jelölje ξ az első sikeres bekövetkezés előtti kísérletek számát. Ekkor ξ -t p **paraméterű geometriai eloszlásnak** nevezzük.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága

A. változat: $\mathbb{P}(\xi = n + k | \xi > n) = \mathbb{P}(\xi = k)$ minden $n, k = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

B. változat: $\mathbb{P}(\xi = n + k | \xi \geq n) = \mathbb{P}(\xi = k)$ minden $n, k = 0, 1, 2, \dots$ esetén.

A geometriai eloszlás a nevét a mértani (tehát geometriai) sorról kapta, mely szerint ha $p \in]0, 1[$ és $q \doteq 1 - p$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}.$$

5.1.6. A Poisson eloszlás

Legyen $\lambda > 0$ egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **Poisson eloszlású λ paraméterrel**, ha eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi) = \lambda.$$

A Poisson eloszlás a exponenciális függvénnyel áll kapcsolatban. Írjuk fel az exponenciális függvény Taylor sorát:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Írjuk x helyére λ -t, így kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Érdemes észrevenni, hogy a szumma jel mögött éppen egy λ paraméterű Poisson eloszlás tagjai állnak.

Ebből már lehet sejteni, hogy a Poisson eloszlásnak köze lesz az exponenciális eloszláshoz, amelyet a nevezetes abszolút folytonos eloszlások részben fogunk megismerni. A két eloszlás közötti kapcsolatot Poisson folyamatok című részben fogjuk leírni.

A Poisson eloszlás megkapható a binomiálisból megfelelő határátmenettel.

A Poisson eloszlás a nevét felfedezőjéről **Siméon Denis Poisson**ról kapta (Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile). Az eloszlás első közismert alkalmazása a porosz hadseregben lórúgástól meghalt katonák számának leírása volt (Ladislaus von Bortkiewicz: Das Gesetz der kleinen Zahlen („A kis számok törvénye”), 1898)

5.1.7. Abszolút folytonos valószínűségi változók

Egy ξ **valószínűségi változót abszolút folytonosnak** nevezünk, ha létezik **sűrűségfüggvénye**, azaz egy olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amellyel

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Míg az eloszlásfüggvény egyértelműen létezik, a sűrűségfüggvény nem. Ez azt jelenti, hogyha f a ξ abszolút folytonos valószínűségi változónak egy sűrűségfüggvénye, a g pedig egy olyan

függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő f -fel, azaz az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ egy Lebesgue értelemben nullmértékű halmaz, akkor a g is sűrűségfüggvénye ξ -nek.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai Ha az f_ξ függvény a ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor az f_ξ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. Nemnegatív, azaz $f_\xi(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) dt = 1$.

Érdemes megjegyezni, hogyha a ξ valószínűségi változót folytonos, akkor a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvényből

$$f_\xi(x) = \mathbb{F}'_\xi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon számolható.

Az is érdekes, hogyha f egy olyan függvény amely rendelkezik a fenti két tulajdonsággal, akkor konstruálható olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és rajta egy ξ valószínűségi változó, amelynek a sűrűségfüggvénye éppen az f függvény. Analóg állítás fogalmazható meg az eloszlásfüggvényekkel kapcsolatban is.

Intervallumba esés valószínűsége Ha ξ egy folytonos valószínűségi változó, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, akkor

$$\mathbb{P}(\xi \in (a, b)) = \int_a^b f_\xi(x) dx = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a).$$

Ez a formula nem érzékeny arra, hogy az intervallum végpontjai hozzátartoznak, vagy nem tartoznak hozzá az intervallumhoz.

Fontos tulajdonsága az abszolút folytonos valószínűségi változóknak, hogy eloszlásfüggvényük folytonos. Ennél több is igaz, nevezetesen, ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor az eloszlásfüggvénye $(\mathbb{F}_\xi)$ abszolút folytonos. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $]x_i, y_i[$ ($i = 1, 2, \dots, n$) intervallumok olyan sorozata, hogy

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta,$$

mindannyiszor

$$\sum_{i=1}^n |\mathbb{F}_\xi(y_i) - \mathbb{F}_\xi(x_i)| < \varepsilon.$$

Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke A ξ **abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét**

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

módon definiáljuk, amennyiben az integrál létezik és véges.

Tehát folytonos valószínűségi változók esetén sem létezik mindig a várható érték.

A transzformációs formula Abszolút folytonos valószínűségi változók esetén is létezik a transzformációs formula, mely szerint az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

módon számolható, ha a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy elég jó függvény, és az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték létezik.

Például $g(x) = x^2$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi^2) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx.$$

5.1.8. Módusz, medián, kvantilisek

Módusz: Ha a ξ valószínűségi változó diszkrét, akkor a ξ **módusza** az az érték, amelyet a ξ legnagyobb valószínűséggel felvesz. Mindig létezik, de nem mindig egyértelmű (lehet több módusz is).

α -kvantilis Legyen $\alpha \in (0, 1)$. A ξ valószínűségi változó **α -kvantilisének** nevezzük azt az x_{α} számot, amelyre

$$\mathbb{F}_{\xi}(x_{\alpha} - 0) \leq \alpha \leq \mathbb{F}_{\xi}(x_{\alpha} + 0)$$

teljesül. (Azért jó ez a definíció, mert a $\mathbb{F}_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ és az $\mathbb{F}_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ definíciók esetén is helyesen adja meg az α -kvantilisek értékét.)

Az α -kvantilis tulajdonságai:

1. Az α -kvantilis mindig létezik, de nem mindig egyértelmű;
2. Ha a x_{α} gyöke az $\mathbb{F}_{\xi}(x_{\alpha}) = \alpha$ egyenletnek, akkor a x_{α} egy α -kvantilis;
3. Ha ξ abszolút folytonos, akkor az α -kvantilisek pontosan az $\mathbb{F}_{\xi}(x_{\alpha}) = \alpha$ egyenlet gyökei;

4. Ha ξ abszolút folytonos, akkor az $x = x_\alpha$ egyenes úgy vágja ketté az f sűrűségfüggvényt, hogy tőle balra α , tőle jobbra $1 - \alpha$ a görbe alatti terület, azaz

$$\int_{-\infty}^{x_\alpha} f(t)dt = \alpha \quad \text{és} \quad \int_{x_\alpha}^{+\infty} f(t)dt = 1 - \alpha.$$

Kis számolgatással meg tudjuk adni az α -kvantilis egy ekvivalens definícióját. Mivel az $\mathbb{F}_\xi$ balról folytonos így

$$\mathbb{F}_\xi(x_\alpha - 0) = \mathbb{F}_\xi(x_\alpha) = \mathbb{P}(\xi < x_\alpha) \leq \alpha.$$

Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\xi = x_\alpha) = \mathbb{F}(x_\alpha + 0) - \mathbb{F}(x_\alpha)$, így

$$\alpha \leq \mathbb{F}(x_\alpha + 0) = \mathbb{F}(x_\alpha + 0) - \mathbb{F}(x_\alpha) + \mathbb{F}(x_\alpha) = \mathbb{P}(\xi = x_\alpha) + \mathbb{P}(\xi < x_\alpha) = \mathbb{P}(\xi \leq x_\alpha),$$

amiből kapjuk, hogy

$$1 - \mathbb{P}(\xi \leq x_\alpha) = \mathbb{P}(\xi > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

Tehát α -kvantilis egy olyan szám amelyre

$$\mathbb{P}(\xi < x_\alpha) \leq \alpha \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(\xi > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

Az $\alpha = \frac{1}{2}$ speciális esetben az α -kvantilist **mediánnak** nevezzük. A mediánnál annyit fontos megjegyezni, hogy

1. Abszolút folytonos esetben a μ mediánt egy $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenlet gyökei adják.
2. Abszolút folytonos esetben a μ úgy vágja ketté a számegyeneset, hogy tőle jobbra és balra a sűrűségfüggvények alatti területek megegyeznek. (Mind a kettő $\frac{1}{2}$.)

Érdemes megjegyezni, hogyha a ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $x = m$ egyenesre nézve szimmetrikus, akkor m egy mediánja, és ha van várható értéke, akkor m a várható értéke is.

5.2. Feladatok

5.2.1. Binomiális

S1. Feladat. Egy dobozban van 10 golyó, 5 piros és 5 fehér. Kihúzunk 5-öt visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között

- a. legfeljebb 2 piros van.
- b. pontosan 2 piros van;
- c. legalább 2 piros van;

•**S2. Feladat.** Egy dobozban 12 alkatrész van, amelyek közül 8 selejtes, 5 elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 2 selejtes alkatrész van?

•**S3. Feladat.** 7 golyót osztunk ki egyenként 5 dobozba úgy, hogy bármelyik dobozt egyenlő valószínűséggel választjuk minden golyó elhelyezésekor. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik dobozba 4 golyó kerül?

•**S4. Feladat.** Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb kétszer következik be tíz kísérletből?

•**S5. Feladat.** Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.44. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz kísérletből legfeljebb hétszer következik be?

•**S6. Feladat.** Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.16. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz kísérletből legalább háromszor bekövetkezik?

5.2.2. Hipergeometrikus eloszlás

S7. Feladat. Egy dobozban van 10 golyó, 5 piros és 5 fehér. Kihúzunk 5-öt visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között

- a. legfeljebb 2 piros van.
- b. pontosan 2 piros van;
- c. legalább 2 piros van;

•**S8. Feladat.** Egy dobozban 11 alkatrész van, amelyek közül 7 selejtes. 4 elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 3 selejtes alkatrész van?

•**S9. Feladat.** Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 8 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 3 lány. A bíráló bizottság ezután sorsolással választ ki közülük 5 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

•**S10. Feladat.** Egy rejtvenypályázaton három díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között (egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat). 50 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 20 Miskolcra. Mi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

•**11.S Feladat.** Egy dobozban 7 piros és 2 zöld golyó van. Visszatevés nélkül, bekötött szemmel kihúzzunk 4 golyót. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 piros golyót húzzunk?

5.2.3. Geometriai eloszlás

S12. Feladat. Egy urnában piros és fehér golyók vannak. Annak a valószínűsége, hogy pirosat húzzunk p . Addig húzzunk visszatevéssel, míg pirosat nem húzzunk. Mennyi a szükséges húzások számának a várható értéke és szórásnégyzete?

Adjuk meg a várható értéket és a szórásnégyzetet $p = \frac{3}{7}$ speciális esetben.

S13. Feladat. Egy urnában piros és fehér golyók vannak. Annak a valószínűsége, hogy pirosat húzzunk p . Addig húzzunk visszatevéssel, amíg az r -edik piros golyót ki nem húzzuk. Mennyi a szükséges húzások számának várható értéke és szórásnégyzete?

Adjuk meg a várható értéket $p = \frac{3}{7}$, $r = 3$ speciális, illetve általános esetben is.

5.2.4. Egyéb feladatok

S14. Feladat. Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros és $N - s$ fehér. Addig húzzunk visszatevés nélkül, amíg pirosat nem húzzunk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Keressük a $q\xi$ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.

Adjuk meg a ξ eloszlását, illetve a várható értékét és szórásnégyzetét $N = 7$, $s = 3$ esetén is.

S15. Feladat. Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros és $N - s$ fehér. Addig húzzunk visszatevés nélkül, amíg az összes pirosat ki nem húzzuk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Adjuk meg a ξ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét $N = 7$ és $s = 3$ esetén.

**** Feladat.** Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros és $N - s$ fehér. Addig húzzunk visszatevés nélkül, amíg az r -edik golyót kihúzzuk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Adjuk meg a ξ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét. A kapott megoldás speciális esetként magába foglalja az előző két feladat megoldását.

S16. Feladat. Egy dobozban N db tojás van, amelyek közül s db selejtes. A tojásokat egyenként felütjük egy tálba, valahányszor selejtes (záp) tojást ütünk fel, mindannyiszor azt az összes addig felütött tojással együtt kiöntjük. Jelölje η az így megmentett tojások számát. Határozzuk meg az η eloszlását. Adjuk meg az η várható értékét és szórásnégyzetét az $N = 10$ és $s = 1$ speciális esetben.

S17. Feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy üveg akciós sör selejtes p . A forgalmazó N ilyen sört csomagol egy csomagba. Kiválasztunk egy selejtes csomagot, azaz olyan csomagot, amelyben van selejtes sör és addig vizsgáljuk a söröket, ameddig selejteset nem találunk. Jelölje ξ a megvizsgált sörök számát. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét!

Oldjuk meg a feladatot numerikusan abban az esetben, amikor átlagosan minden 1000 üvegből 1 selejtes és a forgalmazó 4 üveget csomagol egy csomagba.

5.2.5. Poisson eloszlás

•**18. Feladat.** Egy szervízbe műszakonként átlagban 5 gépkocsi jelentkezik javításra és számuk Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy egy nap legalább 4, de legfeljebb 7 gépkocsit javítanak?

•**19. Feladat.** Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, és egy szeletben átlag 9 szem mazsola van. Mi a valószínűsége, hogy egy szeletben legalább 7, de legfeljebb 10 szem mazsola van?

•**20. Feladat.** Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?

5.2.6. Abszolút folytonos eloszlás

•**21. Feladat.** A ξ abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ A(3.4x^2 + 6.2x), & \text{ha } 0 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

Határozza meg $E(29\xi - 486)$ értékét!

•**22. Feladat.** A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1.4x^3, & \text{ha } 0 < x \leq B; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg $P(\xi > E(\xi))$ valószínűségét!

•**23. Feladat.** A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye egy megfelelő B konstanssal

$$f(x) = \begin{cases} B(2x+1), & \text{ha } 1.2 < x < 2.4; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsa ki a ξ várható értékét!

•**24. Feladat.** A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2.8; \\ \frac{a}{x^3}, & \text{ha } x > 2.8. \end{cases}$$

Számítsa ki a ξ mediánját!

5.2.7. Bizonyítsa be ... (nevezetes diszkrét eloszlások)

◦**25. Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó akkor $\mathbb{E}(\xi) = p$, $\mathbb{D}^2(\xi) = p(1-p)$.

◦**26. Feladat.** Legyen a ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó. Igazolja, hogy

1. Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor ξ -nek egyetlen mediánja van az 1 azonban az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek nincs megoldása.
2. Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor a mediánok halmaza a $[0, 1]$ intervallum, de az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldáshalmaza a $]0, 1]$ intervallum így a 0 olyan mediánja a ξ -nek, amely nem megoldása az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek.
3. Ha $p > \frac{1}{2}$, akkor $\mu = 0$ azaz a medián egyértelműen létezik, de az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek nincs megoldása.

◦**27. Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha $\xi \sim B(n, p)$ (azaz ξ binomiális eloszlású n , p paraméterekkel), akkor $\mathbb{E}(\xi) = np$, $\mathbb{D}^2(\xi) = np(1-p)$.

*◦**28. Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha ξ egy **hipergeometrikus eloszlású** valószínűségi változó N , s , n paraméterekkel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{ns}{N}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} (1 - \frac{s}{N})$.

◦**29. Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha ξ egy **geometriai eloszlású** valószínűségi változó p paraméterrel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{q}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

*○30. **Feladat.** Dobások sorozatát végezzük egy olyan érmével, amelynél a fejdobás valószínűsége p az írásdobás valószínűsége $q := 1 - p$. ξ jelölje azoknak a dobásoknak a számát, amikor r -dik alkalommal dobunk fejet. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ egy r, p **paraméterű negatív binomiális eloszlású** valószínűségi változó. Könnyű látni, hogy egy r, p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $r = 1$ speciális esetben éppen p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó.

Bizonyítsa be, hogyha ξ egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó r, p paraméterrel, akkor

1. A ξ valószínűségi változó eloszlása

$$\mathbb{P}(\xi = k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

2. $\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p}$;

3. $\mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{rq}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

○31. **Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha ξ egy **geometriai eloszlású valószínűségi változó**, akkor ξ rendelkezik az **örökifjú tulajdonsággal**, azaz $\mathbb{P}(\xi = t + k | \xi > t) = \mathbb{P}(\xi = k)$.

*○32. **Feladat.** Bizonyítsa be, hogyha (ξ_i) ($i \in \mathbb{Z}_+$) hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változók $N_i, s_i, n_i = n$ paraméterekkel úgy hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty, \lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$ és $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{s_i}{N_i} = p$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, ami szemléletesen azt jelenti hogyha nagyon sok golyó közül húzunk akkor a valószínűség szempontjából nem számít hogy visszatevéssel vagy visszatevés nélkül húzunk csak a piros golyók aránya számít.

*○33. **Feladat.** Bizonyítsa be hogyha (ξ_i) ($i \in \mathbb{Z}_+$) binomiális eloszlású valószínűségi változók n_i, p_i paraméterekkel úgy hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty, \lim_{i \rightarrow \infty} p_i = 0$ és $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i p_i = \lambda > 0$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, ami szemléletesen azt jelenti, hogy nagy N -ekre és kis p -kre egy binomiális eloszlású valószínűség változó úgy viselkedik mint egy Poisson eloszlású valószínűség változó.

5.3. Megoldások

5.3.1. Binomiális eloszlás

S1. Megoldás.

a. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{1 + 5 + 10}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. $\xi \sim B(n = 5, p = \frac{1}{2})$. Ekkor

b. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.3125.$$

c. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4) + (\xi = 5)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \mathbb{P}(\xi = 4) + \mathbb{P}(\xi = 5) = \\ &= p_2 + p_3 + p_4 + p_5. \end{aligned}$$

Azonban tudjuk, hogy $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, így egyszerűbb úgy számolni, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right) = \\ &= 1 - \frac{1 + 5}{2^{10}} = 1 - \frac{6}{2^{10}} = 0.9941. \end{aligned}$$

•S2. Megoldás. Jelölje ξ a mintában lévő selejtes alkatrészek számát. Ekkor $p = \frac{8}{12}$, $n = 5$, $k = 2$, $\xi \sim B(n = 5, p = \frac{8}{12})$, a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = p_2 = \binom{5}{2} \left(\frac{8}{12}\right)^2 \left(\frac{4}{12}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0.3292.$$

•S3. Megoldás. Jelölje ξ a harmadik dobozba kerülő golyók számát. Ekkor $p = \frac{1}{5} = 0.2$, $n = 7$, $k = 4$, $\xi \sim B(n = 7, p = 0.2)$, a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = p_4 = \binom{7}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^3 = \frac{448}{15625} = 0.0287.$$

•**S4. Megoldás.** A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.31)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 2) &= p_0 + p_1 + p_2 = \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0.31^0 \cdot 0.69^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.31^1 \cdot 0.69^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.31^2 \cdot 0.69^8 = 0.3566.\end{aligned}$$

•**S5. Megoldás.** A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.44)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 7) &= 1 - \mathbb{P}(\xi > 7) = 1 - (p_8 + p_9 + p_{10}) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{8} \cdot 0.44^8 \cdot 0.56^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.44^9 \cdot 0.56^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.44^{10} \cdot 0.56^0 \right) = \\ &= 1 - 0.0236 = 0.9764.\end{aligned}$$

•**S6. Megoldás.** A ξ valószínűségi változó jelöli az A esemény bekövetkezésének a számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 10, p = 0.16)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0.16^0 \cdot 0.84^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.16^1 \cdot 0.84^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.16^2 \cdot 0.84^8 \right) = \\ &= 1 - 0.7936 = 0.2064.\end{aligned}$$

5.3.2. Hipergeometrikus eloszlás

S7. Megoldás.

a. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{5} + \binom{5}{1}\binom{5}{4} + \binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = 0.5.$$

Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 10$, $s = N - s = 5$, $n = 5$ paraméterekkel.

b. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{63} = 0.3968.$$

c. A keresett valószínűség (a véges additivitás alapján):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 2) = 1 - (p_0 + p_1) = \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{5}{0}\binom{5}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{4}}{\binom{10}{5}} \right) = 1 - \frac{1 + 25}{126} = \frac{113}{126} = 0.8968.\end{aligned}$$

•S8. Megoldás. Jelölje ξ a mintában lévő selejtes alkatrészek számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 11$, $s = 7$, $n = 4$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{7}{2} \binom{4}{2}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{21}{55} = 0.3818.$$

•S9. Megoldás. Jelölje ξ a mintában lévő lányok számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 8$, $s = 3$, $n = 5$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi > 0) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = 1 - \frac{1}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{1}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{55}{56} = 0.9821.$$

10. Megoldás. Jelölje ξ a mintában lévő miskolci nyertesek számát ($k = 0, 1, 2, 3$). ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 50$, $s = 20$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}} = 1 - \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{50 \cdot 49 \cdot 48} = 0.784.$$

•S11. •S Megoldás. Jelölje ξ a mintában lévő piros golyók számát. ξ hipergeometrikus eloszlású $s = 7$, $N - s = 2$, $n = 4$ paraméterekkel. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = p_3 = \frac{\binom{7}{3} \binom{2}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{5}{9} = 0.55556.$$

5.3.3. Geometriai eloszlás

S 12. Megoldás. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. Ekkor ξ egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. A ξ eloszlása a $q = 1 - p$ konvenció felhasználásával:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

A várható érték és a szórásnégyzet a $p = \frac{3}{7}$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{7}{3}, \quad \mathbb{D}(\xi) = \frac{1 - \frac{3}{7}}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{28}{9} = 3.1.$$

S13. Megoldás. Jelölje ξ a szükséges húzások számát. ξ egy r rendű p paraméterű negatív binomiális eloszlás. A $q \doteq 1 - p$ konvenció felhasználásával kapjuk, hogy a ξ valószínűségi változó

- eloszlása: $p_{r+k-1} = \mathbb{P}(\xi = r + k - 1) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots);$
- várható értéke: $\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p};$
- szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{rq}{p^2}.$

A várható érték $p = \frac{3}{7}$, $r = 3$ speciális esetben $\mathbb{E}(\xi) = \frac{21}{3}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{28}{3} = 9.3$.

5.3.4. Egyéb feladatok

S14. Megoldás. A ξ eloszlásának a megállapításához válasszuk a következő modellt:

Legyen

$$G \doteq \{P_1, \dots, P_s, F_1, \dots, F_{N-s}\} \quad (\text{a golyók halmaza}),$$

$$\Omega \doteq \{(g_1, \dots, g_N) | g_i \in G \ (i = 1, \dots, N); g_j \neq g_k, \text{ ha } j \neq k\},$$

azaz Ω a G elemeiből alkotott permutációk halmaza. A megoldás során használni fogjuk az $(n)_k$ konvenciót az $n(n-1)\dots(n-k+1)$ szorzat jelölésére tetszőleges $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Ekkor a ξ eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} \frac{s}{N}, & \text{ha } k = 1; \\ \frac{s}{N} \frac{(N-s)_{k-1}}{(N-1)_{k-1}}, & \text{ha } k = 2, \dots, N-s. \end{cases}$$

$N = 7$, $s = 3$ esetén a ξ eloszlását táblázatba foglaljuk:

k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{6}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{1}{35} = 2,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{7} + 2^2 \cdot \frac{2}{7} + 3^2 \cdot \frac{6}{35} + 4^2 \cdot \frac{3}{35} + 5^2 \cdot \frac{1}{35} = 5.2,$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 5.2 - 2^2 = 1.2.$$

Az általános megoldás generátorfüggvény segítségével adható meg. Megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{N+1}{s+1}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{s(N-s)(N+1)}{(s+1)^2(s+2)},$$

ami $N = 7$ és $s = 3$ speciális esetben visszaadja a numerikus eredményeket.

S15. Megoldás. A ξ valószínűségi változó eloszlásának a megállapításához válasszuk a következő modellt: Legyen

$$G \doteq \{P_1, \dots, P_s, F_1, \dots, F_{N-s}\} \quad (\text{a golyók halmaza}),$$

$$\Omega \doteq \{(g_1, \dots, g_N) | g_i \in G \ (i = 1, \dots, N); g_j \neq g_k, \text{ ha } j \neq k\},$$

azaz Ω a G elemeiből alkotott permutációk halmaza. Ekkor a ξ eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} \frac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_s} = \frac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_s(N-s)_{N-s}} = \frac{1}{\binom{N}{s}}, & \text{ha } k = 0; \\ \binom{s+k-1}{s-1} \frac{(s)_s(N-s)_{N-s}}{(N)_n} = \frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{\binom{N}{s}}, & \text{ha } k = 1, \dots, N-s. \end{cases}$$

Vizsgáljuk az $N = 7, s = 3$ esetet.

$s + k$	$3(k = 0)$	$4(k = 1)$	$5(k = 2)$	$6(k = 3)$	$7(k = 4)$
$\mathbb{P}(\xi = s + k)$	$\frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35}$	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35}$	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{10}{35}$	$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35}$

így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 3 \cdot \frac{1}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{6}{35} + 6 \cdot \frac{10}{35} + 7 \cdot \frac{15}{35} = 6,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{186}{5},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{186}{5} - 6^2 = \frac{6}{5}.$$

S16. Megoldás. Jelölje N a tojástartóban lévő tojások számát, és s azt, hogy ezek közül mennyi záp. Jelölje ξ az előző feladatban szereplő valószínűségi változót, azaz azt a számot, hogy a kihúzott tojások közül hányadik az utolsó záp. Jelölje η a megmentett tojások számát. Ekkor $\eta = N - \xi$. Így felhasználva az előző feladat eredményét is kapjuk, hogy az η eloszlása

$$\mathbb{P}(\eta = N - (s + k)) = \frac{\binom{s+k-1}{s-1}}{\binom{N}{s}} \quad (k = 0, 1, \dots, N - s).$$

A numerikus feladat megoldásához tegyük fel, hogy $M = 10$ és $s = 1$. Ekkor, a korábbi feladat alapján

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{N+1}{s+1} = \frac{11}{2}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{s(N-s)(N+1)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{33}{4} = 8.25,$$

így, mivel $\eta = 10 - \xi$ kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = 10 - \mathbb{E}(\xi) = 10 - \frac{11}{2} = \frac{9}{2} = 4.5, \quad \mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{33}{4}, \quad \mathbb{D}(\xi) = 2.8723..$$

Az eredmény megmutatja, hogy a tojásokat érdemes külön pohárban egyenként felütni, mert akkor 9 biztosan megmenthető.

S17. Megoldás. Jelölje ξ a megvizsgált sörök számát. Ekkor a ξ eloszlása (a $q = 1 - p$ jelölés felhasználásával):

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{q^{k-1}p}{1 - q^N} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

A ξ generátorfüggvénye:

$$\begin{aligned} G_\xi(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{q^{k-1}p}{1 - q^N} z^k = \sum_{k=1}^N \frac{pz}{1 - q^N} (qz)^{k-1} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{pz}{1 - q^N} (qz)^l = \\ &= \frac{pz}{1 - qz} \frac{1 - (qz)^N}{1 - qz} \doteq g(z)h(z). \end{aligned}$$

Mivel a g függvény éppen a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvénye, így a $g'(1)$ és $g''(1)$ értékét már egy korábbi feladat alapján ismerjük.

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = \frac{1}{p}, \quad g''(1) = \frac{2q}{p^2}.$$

A h függvény deriváltjai:

$$h'(z) = \frac{-Nq^N z^{N-1}}{1 - q^N}, \quad h''(z) = \frac{-N(N-1)q^N z^{N-2}}{1 - q^N}.$$

Így kapjuk, hogy:

$$h(1) = 1, \quad h'(1) = \frac{Nq^N}{1 - q^N}, \quad h''(1) = -\frac{N(N-1)q^N}{1 - q^N}.$$

A generátorfüggvény deriváltjai az 1 helyen:

$$\begin{aligned} G'_\xi(1) &= g'(1)h(1) + g(1)h'(1) = \frac{1}{p} - \frac{N}{1 - q^N} = \mathbb{E}(\xi), \\ G''_\xi(1) &= g''(1)h(1) + 2g'(1)h'(1) + g(1)h''(1) = \frac{2q}{p^2} - 2\frac{1}{p} \frac{Nq^N}{1 - q^N} - \frac{N(N-1)q^N}{1 - q^N}. \end{aligned}$$

Így

$$G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - \left[G'_{\xi}(1)\right]^2 = \frac{q}{p^2} - \left(\frac{N}{1-q^N}\right)^2 q^N = \mathbb{D}^2(\xi).$$

Visszatérve az akciós sörökhöz ($p = \frac{1}{10^3}$, $N = 4$ eset) kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = 1000 - \frac{4}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} \left(\frac{999}{1000}\right)^4 = 2.4987.$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = 999 \cdot 1000 - \frac{4^2}{\left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4\right)^2} \left(\frac{999}{1000}\right)^4 = 1.25.$$

Oldjuk meg a feladatot numerikusan is.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 2 \cdot \frac{\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 4 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^3 \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} = \\ &= 2.498749375, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 2^2 \cdot \frac{\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 3^2 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} + 4^2 \cdot \frac{\left(\frac{999}{1000}\right)^3 \cdot \frac{1}{1000}}{1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^4} = \\ &= 7.493747376, \end{aligned}$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 1.25.$$

5.3.5. Poisson eloszlás

•18. **Megoldás.** Jelölje ξ a szervizbe naponta érkező gépkocsik számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 5)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(4 \leq \xi \leq 7) &= \mathbb{P}((\xi = 4) \cup (\xi = 5) \cup (\xi = 6) \cup (\xi = 7)) = \\ &= p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \left(\frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!}\right) e^{-5} = 0.6016. \end{aligned}$$

•19. **Megoldás.** Jelölje ξ az egy szelet kalácsban lévő mazsolák számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 9)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(7 \leq \xi \leq 10) &= \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8) \cup (\xi = 9) \cup (\xi = 10)) = \\ &= p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = \left(\frac{9^7}{7!} + \frac{9^8}{8!} + \frac{9^9}{9!} + \frac{9^{10}}{10!}\right) e^{-9} = 0.4992. \end{aligned}$$

•20. **Megoldás.** Jelölje ξ az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát. Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban $\frac{5 \cdot 52}{100} = 2.6$ szem mazsola van. Így $\xi \sim \text{Poiss} (\lambda = 2.6)$.

Jelölje A_n azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve van közöttük mazsola nélküli szelet. Keressük azt az n -et amelyre $\mathbb{P}(A_n \geq 0.92)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \leq 1 - 0.92 = 0.08,$$

Az $\overline{A_n}$ jelenti azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve nincs közöttük mazsola nélküli szelet, azaz mindegyikben van mazsola. Ezeknek az eseményeknek a függetlenségét felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = (1 - p_0)^n = \left(1 - \frac{2.6^0}{0!} e^{-2.6}\right)^n = (1 - e^{-2.6})^n \leq 0.08.$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség logaritmus-vonás segítségével megoldható.

$$n \geq \frac{\ln(0.08)}{\ln(1 - e^{-2.6})} = 32.7266,$$

tehát legalább 33 db süteményt kell kivenni.

Abszolút folytonos eloszlások

•21. **Megoldás.** Mivel a ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, így $\mathbb{F}_\xi$ folytonos. Az $\mathbb{F}_\xi$ szakaszonként folytonos, így csak azt kell biztosítani, hogy az $\mathbb{F}_\xi$ ívei folytonosan csatlakozzanak. Ehhez elegendő, hogy

$$\mathbb{F}(6) = A(3.4 \cdot 6^2 + 6.2 \cdot 6) = 1,$$

ahonnan kapjuk, hogy $A = \frac{1}{159.6}$.

A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{159.6}(6.8x + 6.2), & \text{ha } x \in]0, 6] \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A ξ várható értéke:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \int_0^6 x \frac{1}{159.6}(6.8x + 6.2) dx = \frac{1}{159.6} \int_0^6 (6.8x^2 + 6.2x) dx = \\ &= \frac{1}{159.6} \left[\frac{6.8x^3}{3} + \frac{6.2x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{1}{159.6} \left(\frac{6.8 \cdot 6^3}{3} + \frac{6.2 \cdot 6^2}{2} \right) = \frac{501}{133}. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(29\xi - 486) = 29\mathbb{E}(\xi) - 486 = 29 \cdot \frac{501}{133} - 486 = -376.4594.$$

•22. Megoldás.

I. Mo.: Először meghatározzuk a B értékét. Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^B 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^3 dx = 1.4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=B} = 1.4 \frac{B^4}{4}.$$

Így $B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$

A ξ várható értéke:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^B x \cdot 1.4x^3 dx = 1.4 \int_0^B x^4 dx = 1.4 \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \frac{1.4}{5} \left(\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}} \right)^5 = \frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > \mathbb{E}(\xi)) &= 1.4 \int_{\mathbb{E}(\xi)}^B x^3 dx = 1.4 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=\frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \frac{1.4}{4} \left[x^4 \right]_{x=\frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}}^{x=\sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}} = \\ &= \frac{1.4}{4} \left(\frac{4}{1.4} - \frac{4}{1.4} \left(\frac{4}{5} \right)^4 \right) = 1 - \left(\frac{4}{5} \right)^4 = \frac{369}{625} = 0.5904. \end{aligned}$$

II. Mo.: Talán egyszerűbb úgy számolni, hogy először megkeressük a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, egyelőre ismeretlenül hagyva a B értékét. Mivel

$$1.4 \int_0^x t^3 dx = 1.4 \frac{x^4}{4},$$

így a keresett eloszlásfüggvény:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0; \\ \frac{1.4}{4} x^4 & \text{ha } 0 \leq x < B; \\ 1 & \text{ha } B < x. \end{cases}$$

Könnyen megkapható a B értéke abból, hogy az $\mathbb{F}_\xi$ íveinek folytonosan kell csatlakoznia, így $1 = \mathbb{F}_\xi(B) = \frac{1.4}{4} B^4$, amiből kapjuk, $B = \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}}.$

Ezt követően a várható érték az előző megoldásban látott módon számolható. Végül a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > \mathbb{E}(\xi)) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < \mathbb{E}(\xi)) = 1 - \mathbb{F}_\xi(\mathbb{E}(\xi)) = \\ &= 1 - \frac{1.4}{4} \left(\frac{4}{5} \sqrt[4]{\frac{4}{1.4}} \right)^4 = 1 - \left(\frac{4}{5} \right)^4 = \frac{369}{625} = 0.5904. \end{aligned}$$

•23. **Megoldás.** Először meghatározzuk a B értékét. Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{1.2}^{2.4} B(2x+1)dx = B \int_{1.2}^{2.4} (2x+1)dx = \\ &= B \left[\frac{2x^2}{2} + x \right]_{x=1.2}^{x=2.4} = B [2.4^2 + 2.4 - 1.2^2 - 1.2] = 5.52B. \end{aligned}$$

Így $B = \frac{1}{5.52}$. A ξ várható értéke:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \frac{1}{5.52} \int_{1.2}^{2.4} (2x^2 + x)dx = \frac{1}{5.52} \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=1.2}^{x=2.4} = \\ &= \frac{1}{5.52} \left(\frac{2 \cdot 2.4^3}{3} + \frac{2.4^2}{2} - \frac{2 \cdot 1.2^3}{3} - \frac{1.2^2}{2} \right) = 1.7955. \end{aligned}$$

•24. **Megoldás.** Először meghatározzuk az a értékét. Mivel $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x)dx$, így kapjuk, hogy

$$1 = \int_{2.8}^{+\infty} \frac{a}{x^3} dx = a \int_{2.8}^{+\infty} x^{-3} dx = a \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{x=2.8}^{x=+\infty} = a \left[\frac{1}{-2x^2} \right]_{x=2.8}^{x=+\infty} = \frac{a}{2 \cdot 2.8^2},$$

amiből kapjuk, hogy $a = 2 \cdot 2.8^2$.

A μ medián értékét keressük. Ehhez az $\mathbb{F}_{\xi}(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \mathbb{F}_{\xi}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} f_{\xi}(x)dx = 2 \cdot 2.8^2 \int_{2.8}^{\mu} x^{-3} dx = 2 \cdot 2.8 \left[\frac{1}{-2x^2} \right]_{x=2.8}^{x=\mu} = \\ &= 2 \cdot 2.8^2 \left(-\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{2 \cdot 2.8^2} \right) = -\frac{2 \cdot 2.8^2}{2\mu^2} + 1, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $\frac{2 \cdot 2.8^2}{\mu^2} = \frac{1}{2}$, $2 \cdot 2.8^2 = \mu^2$, $\mu = 2.8\sqrt{2}$.

5.3.6. Bizonyítsa be ... (nevezetes diszkrét eloszlások)

•25. **Megoldás.** Legyen ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a ξ eloszlása:

x_i	0	1
p_i	q	p

Ekkor a ξ várható értéke és szórásnégyzete

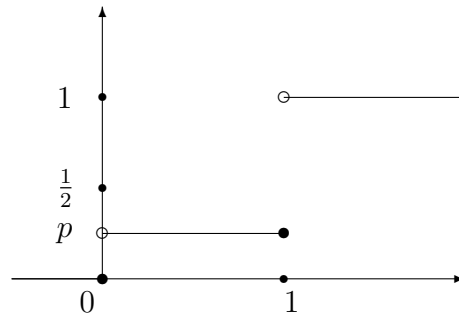
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq \end{aligned}$$

módon számolható.

◦**26. Megoldás.** Legyen ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó. Meghatározzuk a ξ mediánjainak a halmazát. Érdekes észrevenni, hogy $\mathbb{P}(\xi < \mu) = \mathbb{F}(\mu)$, továbbá $\mathbb{P}(\xi > \mu) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq \mu) = 1 - \mathbb{F}(\mu + 0)$. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2} &\iff \mathbb{F}(\mu) \leq \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(\xi > \mu) \leq \frac{1}{2} &\iff \frac{1}{2} \leq \mathbb{F}(\mu + 0). \end{aligned}$$

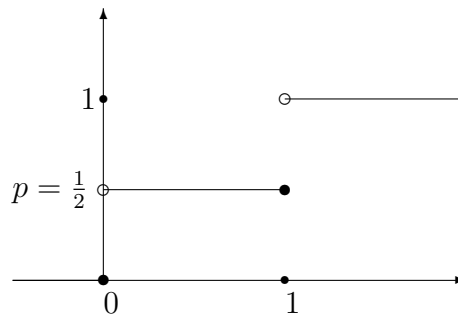
a. $\boxed{p < \frac{1}{2}}$ eset:



$$\begin{aligned} \left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2} \right\} &= \left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid \mathbb{F}(\mu) \leq \frac{1}{2} \right\} =]-\infty, 1], \\ \left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\xi > \mu) \leq \frac{1}{2} \right\} &= \left\{ \mu \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq \mathbb{F}(\mu + 0) \right\} = [1, +\infty], \end{aligned}$$

így ξ -nek egyetlen mediánja van az 1 azonban az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek nincs megoldása.

b. $\boxed{p = \frac{1}{2}}$ eset:

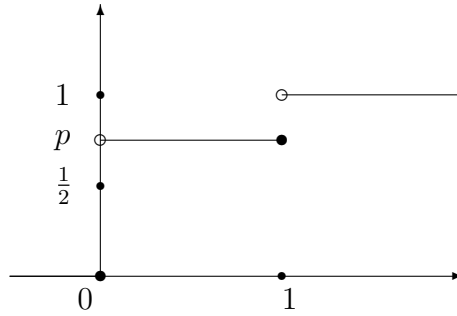


$$\left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{P}(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{F}(\mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} =]-\infty, 1],$$

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{P}(\xi > \mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \frac{1}{2} \leq \mathbb{F}(\mu + 0) \right. \right\} = [0, +\infty],$$

így a mediánok halmaza a $[0, 1]$ intervallum, de az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldáshalmaza a $]0, 1]$ intervallum így a 0 olyan mediánja a ξ -nek, amely nem megoldása az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek.

c. $\boxed{p > \frac{1}{2}}$ eset:



$$\left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{P}(\xi < \mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{F}(\mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} =]-\infty, 0],$$

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \mathbb{P}(\xi > \mu) \leq \frac{1}{2} \right. \right\} = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \left| \frac{1}{2} \leq \mathbb{F}(\mu + 0) \right. \right\} = [0, +\infty],$$

így $\mu = 0$ azaz a medián egyértelműen létezik, de az $\mathbb{F}_\xi(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletnek nincs megoldása.

◦**27. Megoldás.** Legyen $\xi \sim B(n, p)$ (azaz ξ binomiális eloszlású n, p paraméterekkel). Megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = np$, $\mathbb{D}^2(\xi) = np(1 - p)$.

I. Mo.: Ha $\xi \sim B(n, p)$, akkor a ξ valószínűségi változó n darab független p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó összege, így a várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_n) = np.$$

Mivel páronként független valószínűségi változók esetén a szórásnégyzet additív, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) = np(1 - p).$$

II. Mo.: A ξ valószínűségi változó generátorfüggvénye (a binomiális tétel alapján)

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^n p_k z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} z^k = (pz + 1 - p)^n,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G'_\xi(z) &= n(pz + 1 - p)^{n-1}p & G'_\xi(1) &= np \\ G''_\xi(z) &= n(n-1)(pz + 1 - p)^{n-2}p^2 & G''_\xi(1) &= n(n-1)p^2, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= G'_\xi(1) = np, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \left(G'_\xi(1)\right)^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

III. Mo.: A várható értékre vonatkozó összefüggés közvetlen számolással is kiügyeskedhető.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} k = np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} = np. \end{aligned}$$

***28. Megoldás.** Bebizonyítjuk, hogyha ξ egy **hipergeometrikus eloszlású** valószínűségi változó N , s , n paraméterekkel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{ns}{N}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} (1 - \frac{s}{N})$. A bizonyítás esetszétválasztós és rendkívül számolásigényes.

3 esetet vizsgálunk: $s = 1$, $s = 2$, $s > 2$.

$s = 1$ Mivel a $n = N$ eset triviális, így elegendő a $n \leq N-1$ esetet vizsgálni. Meghatározzuk a ξ eloszlását.

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \frac{n}{N} = \frac{ns}{N}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right), \end{aligned}$$

Másrészt azonban

$$n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$s = 2$ Mivel a $n = N$ eset triviális, így elegendő a $n \leq N-1$ esetet vizsgálni. A ξ eloszlása:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi = 1) &= \frac{\binom{2}{1} \binom{N-2}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{2(N-2)_{n-1} n!}{(N)_n (n-1)!} = \frac{2(N-2)_{n+1} n!}{N(N-1)(N)_n (n-1)!} = \frac{2(N-n)n}{N(N-1)}, \\ \mathbb{P}(\xi = 2) &= \frac{\binom{2}{2} \binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{2(N-n)n}{N(N-1)} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{N(N-1)} = \frac{2n(N-n+n-1)}{N(N-1)} = \frac{2n}{N} = \frac{sn}{N}, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 1 \cdot \frac{2(N-n)n}{N(N-1)} + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{N(N-1)} = \frac{2n(N+n-2)}{N(N-1)},\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{2n(N+n-2)}{N(N-1)} - \left(\frac{sn}{N}\right)^2 = \\ &= \frac{2n(N^2 - Nn - 2N + 2n)}{N^2(N-1)} = \frac{2n(N-n)(N-2)}{N^2(N-1)} = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{s > 2}$ Használni fogjuk a $\sum_{k(s,n,N)}^* a_k$ jelölést abban az értelemben, ha (a_n) egy tetszőleges sorozat és az összegzés azokra a k indexekre terjed ki, amelyekre $\max\{s, n - (N - s)\} \leq k \leq \min\{s, n\}$, illetve használni fogjuk az

$$\sum_{k(s,n,N)}^* \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

összefüggést is.

$$\begin{aligned}G'_\xi(1) &= \sum_{k(s,n,N)}^* \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} k = \sum_{k(s,n,N)}^* \frac{\frac{s}{k} \binom{s-1}{k-1} \binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-(k-1)} k}{\frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}} = \\ &= \frac{sn}{N} \sum_{l(s-1,n-1,N-1)}^* \frac{\binom{s-1}{l} \binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{sn}{N}, \\ G''_\xi(1) &= \sum_{k(s,n,N)}^* \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} k(k-1) = \sum_{k(s,n,N)}^* \frac{\frac{s(s-1)}{k(k-1)} \binom{s-2}{k-2} \binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-(k-2)} k}{\frac{N(N-1)}{n(n-1)} \binom{N-2}{n-2}} = \\ &= \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{l(s-2,n-2,N-2)}^* \frac{\binom{s-2}{l} \binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-l}}{\binom{N-2}{n-2}} = \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= G'_\xi(1) = \frac{sn}{N}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \left(G'_\xi(1)\right)^2 = \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{sn}{N} - \left(\frac{sn}{N}\right)^2 = \\ &= \frac{sn - sN - nN + N^2 + sn}{N(N-1)} = n \frac{s}{N} \frac{N-n}{N-1} \left(1 - \frac{s}{N}\right).\end{aligned}$$

◦29. **Megoldás.** Megmutatjuk, hogyha ξ egy **geometriai eloszlású** valószínűségi változó p paraméterrel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{q}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

A ξ valószínűségi változó generátorfüggvénye:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} (qz)^{k-1} = pz \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k = \frac{pz}{1-qz}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} G'_\xi(z) &= \frac{p(1-qz) + pzq}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}, & G'_\xi(1) &= \frac{1}{p}, \\ G''_\xi(z) &= p(-2) \frac{1}{(1-qz)^3} (-q) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}, & G''_\xi(1) &= \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= G'_\xi(1) = \frac{1}{p}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2 = \frac{2pq}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

*◦30. **Megoldás.** Dobások sorozatát végezzük egy olyan érmével, amelynél a fejdobás valószínűsége p az írásdobás valószínűsége $q := 1 - p$. Jelölje ξ azoknak a dobásoknak a számát, amikor r -dik alkalommal dobunk fejet. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ egy r, p **paraméterű negatív binomiális eloszlású** valószínűségi változó. Most meghatározzuk a ξ valószínűségi változó eloszlását, a várható értékét és szórásnégyzetét.

Ehhez kétféle modellt tudunk használni.

Az első modellben a Kolmogorov-féle valószínűségi mező megszámlálhatóan végtelen sok Bernoulli-féle valószínűségi mező szorzata. Ebből a modellből kombinatorikus megfontolások alapján könnyen megkapható, hogy a ξ valószínűségi mező eloszlása

$$p_{r+k-1} = \mathbb{P}(\xi = r+k-1) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

A második modellben a valószínűségi mező

$$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P}_1) \times \dots \times (\Omega_r, \mathbb{F}_r, \mathbb{P}_r),$$

ahol az $(\Omega_i, \mathbb{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mezők mindegyike megszámlálhatóan végtelen sok Bernoulli-féle valószínűségi mező szorzata. Minden egyes $(\Omega_i, \mathbb{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mezőn van értelmezve egy ξ_i valószínűségi változó, amely figyeli, hogy hányadik dobásra dobunk először fejet. Ekkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_r$, ahol ξ_i geometriai eloszlású p paraméterrel, továbbá a ξ_i valószínűségi változók

páronként függetlenek. Ebből a második modellből könnyen meghatározható a ξ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete ugyanis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_r) = \mathbb{E}(\xi_1) + \dots + \mathbb{E}(\xi_r) = \frac{r}{p}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_r) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \dots + \mathbb{D}^2(\xi_r) = \frac{rq}{p^2}.\end{aligned}$$

Szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy a ξ eloszlása a kétféle modellben ugyanaz, azonban ez egy kis számolással is kiügyeskedhető. Megmutatjuk, hogy a második modell is ugyanazt az eloszlást eredményezi. Most összegyűjtjük a szükséges előismereteket.

A geometriai eloszlásra vonatkozó ismeretek:

- Generátorfüggvénye: $G(z) = \frac{pz}{1-qz}$,
- Eloszlása: $p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$),
- Kapcsolat az eloszlás és a generátorfüggvény között $\frac{G^{(k)}(0)}{k!} = pq^{k-1}$ minden $k = 1, 2, \dots$ esetén, illetve $G(0) = 0$;
- Szorzatfüggvény magasabb rendű deriváltjai:

$$(f_1(z) \dots f_m(z))^{(n)} = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} f^{(k_1)}(z) \dots f^{(k_m)}(z)$$

Ezt az összefüggés analógiát mutat a polinomiális tétellel és ahhoz hasonlóan bizonyítható:

- a Newton-Leibnitz szabályból kell kiindulni, mely szerint $(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$,
 - ebből n szerinti teljes indukcióval kapjuk a $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x)^{(n-k)} g(x)^{(k)}$,
 - amiből m szerinti teljes indukcióval kapjuk a bizonyítandó képletet.
- Az (r, p) paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye $G_\xi(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r$. A generátorfüggvény segítségével megmutatjuk, hogy a negatív binomiális eloszlású valószí-

nűségi változó eloszlása: $p_{r+k-1} = \mathbb{P}(\xi = r + k - 1) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned}
 p_{r+k-1} &= \frac{1}{(r+k-1)!} \left[\left(\frac{pz}{1-qz} \right)^r \right]_{z=0}^{(r+k-1)} = \\
 &= \frac{1}{(r+k-1)!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0}} \binom{r+k-1}{k_1 \dots k_r} G^{(k_1)}(0) \dots G^{(k_r)}(0) = \\
 &= \frac{1}{(r+k-1)!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 > 0, \dots, k_r > 0}} \frac{(r+k-1)!}{k_1! \dots k_r!} k_1! p q^{k_1-1} \dots k_r! p q^{k_r-1} = \\
 &= p^r q^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 > 0, \dots, k_r > 0}} 1 = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^{k-1}.
 \end{aligned}$$

◦31. **Megoldás.** Megmutatjuk, hogyha ξ egy **geometriai eloszlású valószínűségi változó**, akkor ξ rendelkezik az **örökifjú tulajdonsággal**, azaz $\mathbb{P}(\xi = t + k | \xi > t) = \mathbb{P}(\xi = k)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\xi = t + k | \xi > t) &= \frac{\mathbb{P}((\xi = t + k) \cap (\xi > t))}{\mathbb{P}(\xi > t)} = \frac{\mathbb{P}(\xi = t + k)}{\mathbb{P}(\xi > t)} = \\
 &= \frac{pq^{t+k-1}}{\sum_{k=t+1}^{\infty} pq^{k-1}} = \frac{pq^{t+k-1}}{pq^t \sum_{k=0}^{\infty} q^k} = \frac{q^{k-1}}{\frac{1}{1-q}} = pq^{k-1} = \mathbb{P}(\xi = k).
 \end{aligned}$$

*◦32. **Megoldás.** Bebizonyítjuk, hogyha (ξ_i) ($i \in \mathbb{Z}_+$) hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változók N_i , s_i , $n_i = n$ paraméterekkel úgy hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{s_i}{N_i} = p$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\xi_i = k) &= \frac{\binom{s_i}{k} \binom{N_i - s_i}{n-k}}{\binom{N_i}{n}} = \frac{\frac{(s_i)_k}{k!} \frac{(N_i - s_i)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N_i)_n}{n!}} = \\
 &= \binom{n}{k} \frac{(s_i)_k (N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i)_{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{(s_i)_k (N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i)_k (N_i - k)_{n-k}},
 \end{aligned}$$

továbbá,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(s_i)_k}{(N_i)_k} = p^k, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i - k)_{n-k}} = (1-p)^{n-k}$$

így valóban teljesül, hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

***◦33. Megoldás.** Megmutatjuk, hogyha (ξ_i) ($i \in \mathbb{Z}_+$) binomiális eloszlású valószínűségi változók n_i , p_i paraméterekkel úgy hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i p_i = \lambda > 0$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$$\mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n_i}{k} p_i^k (1 - p_i)^{n_i - k} = \frac{(n_i)_k}{k!} p_i^k (1 - p_i)^{n_i - k},$$

azonban

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (n_i)_k (p_i)^k &= \lambda^k \\ \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - p_i)^{n_i - k} &= \left(1 - \frac{n_i p_i}{n_i}\right)^{n_i} \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - p_i)^{-k} = e^{-\lambda} \end{aligned}$$

így valóban teljesül, hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

6. fejezet

Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

6.1. Rövid elméleti összefoglaló

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Egyenletes;
2. Exponenciális;
3. Normális.

6.1.1. Az egyenletes eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával. Jele: $\xi \sim U(a, b)$.

A ξ valószínűségi változó **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

A ξ valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.1.2. Az exponenciális eloszlás

Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó λ **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó, ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0; \end{cases} \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. A ξ valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Tulajdonságok Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. **Örökifjú tulajdonság:** Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

2. **Poisson folyamat:** Ha időegység alatt bekövetkező események száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor két egymást követő bekövetkezés között eltelt idő exponenciális eloszlású ugyanazzal a λ paraméterrel.

6.1.3. A normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó **standard normális** (jele: $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$), ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. A η standard normális valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\eta) = 0, \quad \mathbb{D}^2(\eta) = 1.$$

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi **változó normális eloszlású** m és σ^2 **paraméterekkel** (jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), ha az **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor a ξ **várható értéke** és a **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2.$$

Tulajdonságok

1. **Standardizálás:** Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

6.2. Feladatok

6.2.1. Egyenletes eloszlás

- 1. Feladat.** Egy kör sugara egyenletes eloszlású a $(0, 1.4)$ intervallumban. Számítsa ki a kör területének, mint valószínűségi változónak a mediánját!
- 2. Feladat.** Egy ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változóról tudjuk, hogy $E(\xi) = 3.0$ és $D(\xi) = 4.1$. Mi a valószínűsége, hogy 2 egymástól függetlenül megismételt kísérlet mindegyikében ξ 2.1 és 6.6 közötti értéket vesz fel?
- 3. Feladat.** Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[-2.40, 2.40]$ intervallumon. Számítsa ki a $P(2\xi + 1 < 1.6)$ valószínűségét!

6.2.2. Exponenciális eloszlás

- 4. Feladat.** A ξ és η valószínűségi változók függetlenek. A ξ egyenletes eloszlású a $(-1.2, 3.0)$ intervallumon, míg az η 4.0 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számítsa ki a $P(\xi < 0.7, \eta < 5.6)$ valószínűséget!
- 5. Feladat.** Egy üzletbe átlag 29 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású: Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.5 perc?
- 6. Feladat.** A gépjárművezetői vizsgán a vizsga időtartama (percben mérve)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 0.02e^{-0.02x}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Az előttünk lévő már 13 perce vezet. Mi a valószínűsége, hogy 6 percen belül nem fejezi be a vizsgát?

- 7. Feladat.** Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciális eloszlásúnak feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?
- 8. Feladat.** Egy TV élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 14000 óra átlagos élettartammal. Mi a valószínűsége, hogy egy TV 20000 óránál tovább lesz jó?
- 9. Feladat.** Egy csiga életének hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó 1.48 év várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy kedvenc csigánk életének harmadik évében pusztul el?

•**10. Feladat.** Egy hallgató ennek a feladatnak a megoldásával átlagosan 3 perc alatt végez. A feladatra fordított idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott hallgató 9 percen belül oldja meg a feladatot?

•**11. Feladat.** Egy gép élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 9 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz, hogy egy gép legalább 0.85 valószínűséggel működtőképes lesz K évig.

•**12. Feladat.** Egy TV élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 6 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz hogy egy adott TV legalább 0.78 valószínűséggel működőképes lesz K évig.

•**13. Feladat.** A ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 1.80. Számítsa ki azt az m értéket, amelytől jobbra és balra megegyezik az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye alatti terület!

•**14. Feladat.** Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású 0.30 szórással. Határozza meg $E(8\xi^2 - 19\xi + 7)$ értékét!

•**15. Feladat.** Egy céllövő találati pontossága 1.9 cm várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Legfeljebb hányszor lőhet, ha azt akarjuk, hogy még legalább 80%-os biztonsággal minden találata a 9.0 cm sugarú körbe essen?

•**16. Feladat.** Egy üzletbe átlag 24 vevő érkezik óránként és számuk Poisson-eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 2.7 perc?

6.2.3. Normális eloszlás

•**17. Feladat.** Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 65 és szórása 1.3. Mennyi a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 67.08?

•**18. Feladat.** Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 50 mm. Határozza meg a munkadarab hosszának a szórását, ha 0.85 annak a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 50.05 mm.

•**19. Feladat.** Legyen ξ egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, amelyik 0.42 valószínűséggel veszi fel értékét a $] - 5.8, 5.8[$ intervallumon. Számítsa ki a $P(0.5 \leq 1.7\xi + 1 < 1.7)$ valószínűséget!

•**20. Feladat.** Egy alkatrész élettartamáról azt tudjuk, hogy jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó 2 év várható értékkel és 2.90 év szórással. Mi a valószínűsége, hogy két ilyen alkatrész közül legalább az egyik az ötödik évben megy tönkre?

•**21. Feladat.** Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.031 kg szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenül kiválasztott zacskó közül

a. legalább az egyik első osztályú?

b. legfeljebb az egyik első osztályú?

•**22. Feladat.** Egy alkatrész hossza normális eloszlású valószínűségi változó 35 mm várható értékkel és 0.019 mm szórással. Az alkatrészt jónak minősítjük, ha a hossza 34.9454 mm és 35.0532 mm közé esik. Mi a valószínűsége, hogy 100 alkatrészt megvizsgálva legalább 99 jót találunk?

•**23. Feladat.** Hengeres alkatrészeket gyártunk. Az átmérő 16 mm várható értékű és 0.007 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a hossz 75 mm várható értékű és 0.05 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Egy alkatrész átmérőre jó, ha az átmérő a (15.986, 16.021) intervallumba esik. Egy alkatrész hosszra jó, ha a hossz a (74.95, 75.1) intervallumba esik. Egy alkatrész jó, ha átmérőre is és hosszra is jó. Átlagosan az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes, ha egy alkatrész átmérője és hossza független egymástól?

6.3. Megoldások

6.3.1. Egyenletes eloszlás

•**1. Megoldás.** Jelölje ξ a kör sugarát, η a kör területét. Ekkor $\eta = \xi^2\pi$, továbbá tudjuk, hogy $\xi \sim U(0, 1.4)$, így $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$, ha $x \in (0, 1.4)$.

Az η mediánját keressük, amihez szükségünk van az η eloszlásfüggvényére. Az η eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy $\eta = \xi^2\pi \geq 0$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Másrészt, $\xi \geq 0$, így $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$.

Azt is felhasználjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\xi^2\pi < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{1.4\sqrt{\pi}}, & \text{ha } 0 \leq \sqrt{\frac{x}{\pi}} < 1.4, \\ 1 & \text{azaz } 0 \leq x < 1.96\pi, \\ & \text{ha } 1.96\pi \leq x. \end{cases}$$

A μ medián értékének a meghatározásához az $\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Így kapjuk, hogy $\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{1.4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\mu} = 0.7\sqrt{\pi}$, $\mu = 0.49\pi$.

•2. Megoldás. Tudjuk, hogy $\xi \sim U(a, b)$ és $\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2} = 3.0$ és $\mathbb{D}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$. Az a és b paraméterek meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 6, \\ -a + b &= 4.1\sqrt{12}. \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $b = \frac{1}{2}(6 + 4.1\sqrt{12}) = 10.1014$, amiből kapjuk, hogy $a = 6 - b = 6 - 10 - 1014 = -4.1014$.

A ξ 2.1 és 6.6 közötti értéket

$$p = \mathbb{P}(2.1 < \xi < 6.6) = \frac{6.6 - 2.1}{10.1014 - (-4.1014)} = 0.3168$$

valószínűséggel vesz fel, tehát a keresett valószínűség két független módon megismételt kísérlet esetén $\mathbb{P}(A_1 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1) \cap \mathbb{P}(A_1) = p^2 = 0.1004$.

•3. Megoldás. Tudjuk, hogy $\xi \sim U(-2.4, 2.4)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2\xi + 1 < 1.6) &= \mathbb{P}(2\xi < 0.6) = \mathbb{P}(\xi < 0.3) = \mathbb{F}_\xi(0.3) = \\ &= \frac{x + 2.4}{4.8} \Big|_{x=0.3} = \frac{2.7}{4.8} = \frac{9}{16} = 0.5625. \end{aligned}$$

6.3.2. Exponenciális eloszlás

•4. Megoldás. $\xi \sim U(-1.2, 3.0)$, $\eta \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{4}\right)$. A ξ és η valószínűségi változók függetlensége alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < 1.0, \eta < 5.6) &= \mathbb{P}(\xi < 1.0)\mathbb{P}(\eta < 5.6) = \\ &= \mathbb{F}_\xi(1.0)\mathbb{F}_\eta(5.6) = \frac{0.7 + 1.2}{3 + 1.2} \left(1 - e^{-\frac{1}{4.0} \cdot 5.6}\right) = 0.3408. \end{aligned}$$

•5. **Megoldás.** Az időegység 1 óra. Jelölje ξ az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$, így $\xi \sim \text{Pois}(29)$.

Jelölje η a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor $\eta \sim \text{Exp}(\lambda = 29)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\eta > \frac{4.5}{60}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\eta < \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{F}_\eta\left(\frac{4.5}{60}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}}\right) = e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}} = 0.1136.\end{aligned}$$

•6. **Megoldás.** Jelölje ξ a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$. A számolás során felhasználjuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi > 6 + 13 | \xi > 13) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6 + 13 | \xi > 13) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 6) = \\ &= 1 - \mathbb{F}_\xi(6) = 1 - (1 - e^{-0.02 \cdot 6}) = e^{-0.02 \cdot 6} = 0.8869.\end{aligned}$$

•7. **Megoldás.** Jelölje η a várakozási időt percben mérve. Mivel $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x > 0$).

A λ paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy $-5\lambda = \ln(0.22)$, azaz $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

8. • **Megoldás.** Jelölje ξ a TV élettartamát órában mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 14000 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{14000}$ és $\xi \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{14000}\right)$. Mivel $\mathbb{F}_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{1}{14000}x}$ tetszőleges $x > 0$ esetén, így a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 20000) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 20000) = 1 - \mathbb{F}_\xi(20000) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{20000}{14000}}) = e^{-\frac{20}{14}} = 0.2397.\end{aligned}$$

9. • **Megoldás.** Jelölje ξ a csiga élettartamát években mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 1.48 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{1.48}$ és $\xi \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{1.48}\right)$.

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 < \xi < 3) &= \mathbb{P}(\xi < 3) - \mathbb{P}(\xi < 2) = \mathbb{F}_\xi(3) - \mathbb{F}_\xi(2) = \\ &= (1 - e^{-\frac{3}{1.48}}) - (1 - e^{-\frac{2}{1.48}}) = e^{-\frac{2}{1.48}} - e^{-\frac{3}{1.48}} = 0.1272.\end{aligned}$$

10.● Megoldás. Jelölje ξ a hallgató feladat megoldására fordított idejét percben mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 3 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{3}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{3})$.

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi < 9) = \mathbb{F}_{\xi}(9) = 1 - e^{-\frac{9}{3}} = 1 - e^{-3} = 0.9502.$$

11.● Megoldás. Jelölje ξ a gép élettartamát évben mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 9 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{9}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{9})$.

A K értékét keressük úgy, hogy a $\mathbb{P}(\xi > K) \geq 0.85$ feltétel teljesüljön.

$$\begin{aligned} 0.85 &\leq \mathbb{P}(\xi > K) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq K) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K) = 1 - \mathbb{F}_{\xi}(K) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{K}{9}}) = e^{-\frac{K}{9}}. \end{aligned}$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség már könnyen megoldható.

$$e^{-\frac{K}{9}} \geq 0.85, \quad -\frac{K}{9} \geq \ln(0.85), \quad K \leq -9 \ln(0.85) = 1.4627.$$

12.● Megoldás. Jelölje ξ a TV élettartamát évben mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 6 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{6}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{6})$.

A K értékét keressük úgy, hogy a $\mathbb{P}(\xi > K) \geq 0.78$ feltétel teljesüljön.

$$\begin{aligned} 0.78 &\leq \mathbb{P}(\xi > K) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq K) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K) = 1 - \mathbb{F}_{\xi}(K) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{K}{6}}) = e^{-\frac{K}{6}} \geq 0.78. \end{aligned}$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség már könnyen megoldható. $e^{-\frac{K}{6}} \geq 0.78$, $-\frac{K}{6} \geq \ln(0.78)$, $K \leq -6 \ln(0.78) = 1.4608$.

13.● Megoldás. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 1.8 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{1.8}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.8})$. Legyen $\eta \doteq \xi^2$. Érdemes észrevenni, hogy az η valószínűségi változó mediánját keressük, amit most m -mel jelölünk. Az m értékének a meghatározásához az $\mathbb{F}_{\eta}(m) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Ehhez először meg kell határozni az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mivel $\eta = \xi^2 \geq 0$, így $\mathbb{F}_{\eta}(x) = 0$, ha $x < 0$. Másrészt, $\xi \geq 0$, így $\sqrt{\xi^2} = |\xi| \xi$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_{\eta}(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(\xi < \sqrt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}}{1.8}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Tehát az $1 - e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = \frac{1}{2}$ exponenciális egyenletet kell megoldani. A megoldás: $e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = 0.5$, $-\frac{\sqrt{m}}{1.8} = \ln(0.5)$, $m = [1.8 \ln(0.5)]^2 = 1.5567$.

14.● Megoldás. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}(\xi) = 0.3 = \frac{1}{\lambda}$. Így

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \frac{1}{\lambda^2},$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. A várható érték linearitása alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7) &= 8\mathbb{E}(\xi^2) - 19\mathbb{E}(\xi) + 7 = \\ &= 8\frac{2}{\lambda^2} - 19\frac{1}{\lambda} + 7 = 16 \cdot 0.3^2 - 19 \cdot 0.3 + 7 = 2,74. \end{aligned}$$

15.● Megoldás. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 1.9 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{1.9}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.9})$. Egy lövés találatának a valószínűsége $\mathbb{P}(\xi < 9.0) = \mathbb{F}_\xi(9.0) = 1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}$, amiből a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy az

$$\left(1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}\right)^n \geq 0.8$$

exponenciális egyenlőtlenséget kell megoldanunk. A megoldás: $n \ln(1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}}) \geq \ln(0.8)$, $n \leq \frac{\ln(0.8)}{\ln(1 - e^{-\frac{9.0}{1.9}})} = 25.34$, tehát a céllövő legfeljebb 25-ször lőhet.

16.● Megoldás.

6.3.3. Normális eloszlás

17.● Megoldás. Jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 65, \sigma^2 = 1.3^2)$. Ekkor a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi < 67.08) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{67.08 - 65}{1.3}\right) = \Phi(1.6) = 0.9452.$$

18.● Megoldás. jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 50, \sigma^2)$. A feladat az ismeretlen szórás meghatározása. Ekkor

$$0.85 = \mathbb{P}(\xi < 50.05) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{50.05 - 50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right),$$

amiből az ismeretlen σ paramétert már könnyű kifejezni. $1.04 = \frac{0.05}{\sigma}$, $\sigma = \frac{0.05}{1.04} = 0.0481$.

19.● Megoldás. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 0, \sigma^2)$, ahol a σ^2 paraméter ismeretlen; továbbá $\mathbb{P}(-5.8 \leq \xi \leq 5.8) = 0.42$. Először a σ értékét határozzuk meg. Standardizálással kapjuk,

hogy $\eta \doteq \frac{\xi - 0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-5.8 \leq \xi \leq 5.8) &= \mathbb{P}\left(\frac{-5.8}{\sigma} \leq \eta \leq \frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - 1 = 0.42,\end{aligned}$$

azaz

$$\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) = \frac{0.42 + 1}{2} = 0.71$$

A kapott egyenlőségből az ismeretlen szórás már visszakereséssel meghatározható: $\frac{5.8}{\sigma} = 0.55$, $\sigma = \frac{5.8}{0.55} = 10.5455$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.5 \leq 1.7\xi + 1 < 1.7) &= \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7} \leq \xi < \frac{1.7 - 1}{1.7}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7 \cdot 10.5455} \leq \eta < \frac{1.7 - 1}{1.7 \cdot 10.5455}\right) = \\ &= \Phi(0.04) - \Phi(-0.03) = \\ &= \Phi(0.04) + \Phi(0.03) - 1 = \\ &= 0.5160 + 0.5160 - 1 = 0.028.\end{aligned}$$

20.● Megoldás. Jelölje ξ egy alkatrész élettartamát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(m = 2, \sigma^2 = 0.29^2)$. A feladatot a függetlenség feltételezése mellett oldjuk meg. Legyen $p \doteq \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5)$.

A p értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned}p = \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5) &= \mathbb{P}\left(\frac{4 - 2}{2.9} \leq \eta \leq \frac{5 - 2}{2.9}\right) = \\ &= \Phi(1.0345) - \Phi(0.6896) = 0.8485 - 0.7549 = 0.0936.\end{aligned}$$

Az ismeretlen valószínűség a szita formula alapján számolható: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2 = 0.1784$.

21.● Megoldás. Jelölje ξ a zacskóba töltött cukorka mennyiségét. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 1, \sigma^2 = 0.031^2)$. Ekkor standardizálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}p = \mathbb{P}(0.95 \leq \xi < 1.05) &= \mathbb{P}\left(\frac{0.95 - 1}{0.031} \leq \eta < \frac{1.05 - 1}{0.031}\right) = \\ &= \Phi(1.6129) - \Phi(-1.6129) = \\ &= 2\Phi(1.6129) - 1 = 2 \cdot 0.9463 - 1 = 0.8926.\end{aligned}$$

A feladat befejezéséhez két megoldást is adunk.

Mo. I.: Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Jelölje A , illetve B azokat az eseményeket, hogy az első zsákocská, illetve a második zsákocská első osztályú. Ezekkel a jelölésekkel:

- a. a szita formula alkalmazásával kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocská első osztályú:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.\end{aligned}$$

- b. a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy zsákocská első osztályú:

$$1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)^2 = 1 - p^2 = 0.2033.$$

Mo. II.: Az első megoldás során sikeresen kiszámoltuk a p valószínűséget, amely annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy zsákocská első osztályú. Most bevezetjük a ξ valószínűségi változót, amely ezúttal azt figyeli, hogy a kiválasztott két zsákocská közül hány zsákocská első osztályú. Ha sok zsákocská közül választunk, akkor teljesülnek azok a feltételek, amelyeket az első megoldás során hallgatólágosan feltételeztünk, nevezetesen, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ és az A és B események függetlenek. Ekkor $\xi \sim B(n = 2, p = 0.8926)$. Ezekkel a jelölésekkel kapjuk, hogy:

- a. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik zsákocská első osztályú:

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1 - p_0 = 1 - \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.$$

- b. Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb az egyik zsákocská első osztályú:

$$\mathbb{P}(\xi \leq 1) = 1 - p_2 = 1 - \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = 1 - p^2 = 0.2033.$$

Megnyugtató módon a második megoldás az elsővel egyező eredményt ad.

22.● Megoldás. Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész hosszát, és η 100 megvizsgált alkatrész közül a jó alkatrészek számát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 35, \sigma^2 = 0.019^2)$, $\eta \sim B(n = 100, p)$, ahol p ismeretlen paraméter. Ezekkel a jelölésekkel a $p_{99} + p_{100}$ értéket kell meghatározni.

Az ismeretlen p paraméter meghatározása:

$$\begin{aligned}
 p &= \mathbb{P}(34.9468 \leq \xi < 35.0532) = \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{34.9468 - 35}{0.019} \leq \frac{\xi - 35}{0.019} < \frac{35.0532 - 35}{0.019}\right) = \\
 &= \Phi(2.8) - \Phi(-2.8) = \\
 &= 2\Phi(2.8) = 2 \cdot 0.9974 - 1 = 0.9948.
 \end{aligned}$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
 p_{99} + p_{100} &= \binom{100}{99} p^{99} (1-p)^1 + \binom{100}{100} p^{100} (1-p)^0 = \\
 &= 100 \cdot p^{99} (1-p) + p^{100} = \\
 &= p^{99} (100(1-p) + p) = \\
 &= p^{99} (100 - 99p) = 0.9041.
 \end{aligned}$$

23.● Megoldás. Jelölje ξ_1 az alkatrész átmérőjét, ξ_2 az alkatrész hosszát. Tudjuk, hogy $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m = 16, \sigma^2 = 0.007^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m = 75, \sigma^2 = 0.05^2)$, továbbá a ξ_1 és a ξ_2 valószínűségi változók függetlenek. Jelölje A azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész jó. A feladat a $\mathbb{P}(\bar{A})$ valószínűség meghatározása.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021, 74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\
 &= \mathbb{P}(15.986 < \xi_1 < 16.021) \mathbb{P}(74.95 < \xi_2 < 75.1) = \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{15.986 - 16}{0.007} < \eta_1 < \frac{16.021 - 16}{0.007}\right) \mathbb{P}\left(\frac{74.95 - 75}{0.05} < \eta_2 < \frac{75.1 - 75}{0.05}\right) = \\
 &= (\Phi(3) - \Phi(-2))(\Phi(2) - \Phi(-1)) = \\
 &= (\Phi(3) + \Phi(2) - 1)(\Phi(2) + \Phi(1) - 1) = \\
 &= (0.9987 + 0.9772 - 1)(0.9972 + 0.8413 - 1) = \\
 &= 0.9759 \cdot 0.8185 = 0.7988.
 \end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség: $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - 0.7988 = 0.2012$, tehát az alkatrészek 20.12% lesz selejtes, ami elég sok.

7. fejezet

Minta zárthelyik és nevezetes problémák

7.1. I.minta zárthelyi dolgozatok

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy urnában 10 golyó van, 4 piros és 6 fehér. Visszatevés nélkül kihúzunk 4 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók legalább a fele piros? Átlagosan hány piros golyót húzunk?
2. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3}$. Annak a valószínűsége, hogy A vagy B bekövetkezik $\frac{9}{10}$. Mennyi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik, de B nem?
3. Ledobunk két pontot (x -et és y -t) véletlenszerűen és egymástól függetlenül az $[0, 1]$ intervallumra. Mennyi a valószínűsége, hogy a ledobott számok négyzeteinek az összege kisebb, mint 1?
4. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + 1), & \text{ha } x \in (0, 1); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg az " a " paraméter értékét, a ξ eloszlásfüggvényét és a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} < \xi < \frac{1}{2}\right)$ valószínűségét.

5. Egy csiga életének a hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2.01 év várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy kedvenc csigánk életének a harmadik évében pusztul el?

Valószínűesszámitás ZH. 1.

B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy urnában van 3 golyó: 1 piros és 2 fehér. Visszatevéssel kihúzunk 4 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók legfeljebb fele piros? Átlagosan hány piros golyót húzunk?

2. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3}$. Annak a valószínűsége, hogy B bekövetkezik, de A nem $\frac{3}{10}$. Mennyi a valószínűsége, hogy A vagy B bekövetkezik?

3. Ledobunk egy pontot egy egység oldalú négyzetre.

A = a ledobott pontnak a négyzet bal alsó csúcsától való távolsága kisebb 1-nél.

B = a négyzetnek van olyan csúcsa, amely a ledobott ponttól $\frac{1}{2}$ -nél közelebb van.

Melyik esemény következik be nagyobb valószínűséggel?

4. A ξ folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ a \left(\frac{x^3}{3} + x \right), & \text{ha } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Határozza meg az "a" paraméter értékét, a ξ szórásnégyzetét!

5. Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson eloszlást követ és egy szeletben átlag 4 szem mazsola van. Mi a valószínűsége, hogy egy szeletben legalább 3, de legfeljebb 6 szem mazsola van?

7.2. II. Buffon-féle tűprobléma

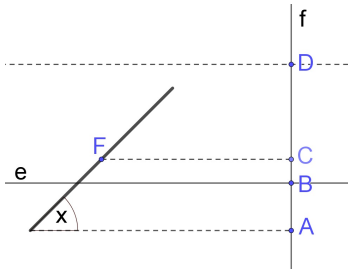
Probléma Buffon-féle tűprobléma. Egy kis hosszúságú tűt ejtünk egy vonalas papírra. A kis hosszúság azt jelenti, hogy a tű l hossza kisebb vagy egyenlő, a párhuzamos egyenesek d távolságánál. Mennyi a valószínűsége, hogy a tűnek a hozzá legközelebb eső egyenessel van közös pontja?

Megoldás. A probléma és a probléma geometriai valószínűség segítségével történő elméleti megoldása egyaránt **Georges Louis Leclerc**-től (1707-1788), Buffon grófjától származik. A módszer alkalmas a π közelítő értékének kísérleti úton történő meghatározására.

Legyen e a tűhöz legközelebbi egyenes és jelöljön f egy olyan egyenest, amely merőleges e -re. A tűnek az e egyeneshez viszonyított helyzetét az (x, y) koordináták írják le, ahol x a tűnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt szögét y a tű felezőpontjának e -től való távolságát jelöli. Ekkor

$$\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{d}{2}\right], \quad T(\Omega) = \frac{\pi d}{2}.$$

Jelölje A azt az eseményt, amikor a tűnek van közös pontja a hozzá legközelebb eső egyenessel, azaz az e egyenessel. Ez pontosan akkor következik be, amikor a tű felezőpontjának az e -től való távolsága (y) kisebb, vagy egyenlő a tűnek az f -re eső merőleges vetületének a felénél ($\frac{l}{2} \sin(x)$).

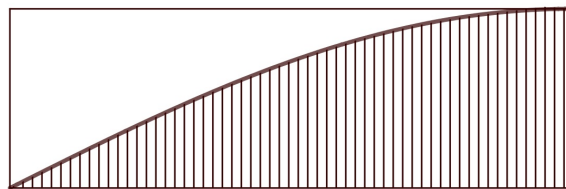


X a tűnek az e -vel bezárt szöge,

$\overline{AC}$ a a tűnek az f -re eső merőleges vetületének a fele,

$\overline{BC}$ a a tű felezőpontjának az e -től mért távolsága,

$\overline{BD}$ két párhuzamos egyenes távolságának a fele $= \frac{d}{2}$.



$l = d = 1$ eset,

$$y = \frac{1}{2} \sin(x).$$

Így

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega \mid 0 < y < \frac{l}{2} \sin(x) \right\},$$

$$T(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin(x) dx = \frac{l}{2} \left[-\cos(x) \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi d}{2}} = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d}.$$

8. fejezet

Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)

8.1. Rövid elméleti összefoglaló

8.1.1. Valószínűségi vektorváltozók

Valószínűségi vektorváltozó (két dimenziós eset):

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt **valószínűségi vektorváltozónak** nevezzük, ha

$$(\xi < x, \eta < y) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \text{ és } \eta(\omega) < y\} \in \mathcal{F} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Legyen (ξ, η) egy valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az $\mathbb{F}_{\xi, \eta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_{\xi, \eta}(x, y) \doteq \mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

módon definiált függvényt a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó **együttes eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Valószínűségi vektorváltozó (általános eset, n dimenzió):

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Egy $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt **valószínűségi vektorváltozónak** nevezzük, ha

$$(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F}$$

minden $((x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$ esetén.

Az $n = 1$ eset visszaadja a valószínűségi változó már megismert fogalmát.

Tulajdonságok:

Az együttes eloszlásfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. Nemnegatív és mindkét változójában balról folytonos;
2. $\mathbb{F}_{\xi,\eta}(b_1, b_2) - \mathbb{F}_{\xi,\eta}(a_1, b_2) - \mathbb{F}_{\xi,\eta}(b_1, a_2) + \mathbb{F}_{\xi,\eta}(a_1, a_2)$ minden $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ esetén.
3. Határértékek $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}_{\xi,\eta}(x, y) &= 0 & (y \in \mathbb{R}), \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} \mathbb{F}_{\xi,\eta}(x, y) &= 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \mathbb{F}_{\xi,\eta}(x, y) &= 1.\end{aligned}$$

8.1.2. Marginális eloszlások

Egy valószínűségi vektorváltozó projekciói alacsonyabb dimenziós valószínűségi változók. Az így kapott alacsonyabb dimenziós valószínűségi változóknak az eloszlását **marginális eloszlásoknak**, vagy **peremeloszlásoknak** nevezzük.

Vizsgáljuk a kétdimenziós esetet. Legyen (ξ, η) egy valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvények (egy dimenziós) valószínűségi változók. Például, ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egy $\omega \in \Omega$ helyen az $(1, 3)$ értéket veszi fel, azaz $(\xi, \eta)(\omega) = (1, 3)$, akkor $\xi(\omega) = 1, \eta(\omega) = 3$, azaz $\text{pr}_1(\xi, \eta) = \xi, \text{pr}_2(\xi, \eta) = \eta$.

Magasabb dimenzióban sokféle marginális eloszlás van. Például egy háromdimenziós valószínűségi vektorváltozónak 3 kétdimenziós és 3 egydimenziós marginális eloszlása van.

Egy valószínűségi vektorváltozó egyértelműen meghatározza a marginális eloszlásait, azonban a marginális eloszlások nem határozzák meg az együttes eloszlást. Látni fogunk olyan példákat, hogy $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ és $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ olyan valószínűségi vektorváltozók, hogy a megfelelő marginálisok eloszlásai megegyeznek, azaz a ξ_1 -nek és az η_1 -nek, illetve a ξ_2 -nek és az η_2 -nek ugyanaz az eloszlásfüggvénye, azonban az együttes eloszlások különbözők.

A marginális eloszlásfüggvények meghatározása az együttes eloszlásfüggvényből:

Legyen (ξ, η) egy tetszőleges valószínűségi vektorváltozó. Az együttes eloszlásfüggvényből a marginális eloszlások eloszlásfüggvényei eloszlásfüggvényei az alábbi határátmenetek segítségével határozhatóak meg:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\xi}(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbb{F}_{\xi,\eta}(x, y) & (x \in \mathbb{R}), \\ \mathbb{F}_{\eta}(y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{F}_{\xi,\eta}(x, y) & (y \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

8.1.3. Valószínűségi vektorváltozók típusai

Ahogy azt a valószínűségi változók esetén láttuk, a valószínűségi vektorváltozók között is vannak diszkrét és folytonos valószínűségi vektorváltozók, bár olyanok is vannak, amelyek nem sorolhatóak be egyik csoportba sem. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban mégis a diszkrét és a folytonos valószínűségi vektorváltozók a legfontosabbak.

Diszkrét és folytonos valószínűségi változók:

Egy (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót **diszkrétnek** nevezünk, ha értékkészlete megszámlálható. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó értékkészletét $\{(x_i, y_j) \mid i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}$ módon jelöljük. Érdekes megjegyezni, hogyha a (ξ, η) egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó, akkor

$$(\xi = x_i, \eta = y_j) \doteq \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} \subseteq \Omega$$

módon definiált halmazok események tetszőleges $i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$ esetén. Így értelmes a következő definíció:

$$p_{i,j} \doteq \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots).$$

A kapott p_{ij} számokat a (ξ, η) **diszkrét valószínűségi változó eloszlásának** nevezzük.

Egy (ξ, η) **valószínűségi vektorváltozót folytonosnak** nevezünk, ha létezik hozzá egy olyan $f_{\xi\eta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amellyel

$$\mathbb{F}_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi\eta}(u, v) dv du \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Az $f_{\xi\eta}$ függvényt a (ξ, η) **valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Diszkrét esetben a közös eloszlás, abszolút folytonos esetben a közös sűrűségfüggvény az egy dimenziós esetben megismert jó tulajdonságokkal analóg tulajdonságokkal rendelkezik.

Tulajdonságok:

Legyen (ξ, η) egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a p_{ij} együttes eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $p_{ij} \geq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ esetén;
2. $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Megfogalmazhatók analóg tulajdonságok folytonos esetben is. Legyen (ξ, η) egy folytonos valószínűségi vektorváltozó. Ekkor az $f_{\xi,\eta}$ együttes sűrűségfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx = 1$.

Vizsgáljuk meg, hogy a marginálisok eloszlása hogyan határozhatóak meg az együttes eloszlásból diszkrét illetve abszolút folytonos esetben.

Marginális eloszlások meghatározása:

Diszkrét valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásai szintén diszkrét eloszlások. Például, ha (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó p_{ij} közös eloszlással, akkor a marginálisok az alábbi módon határozhatóak meg:

$$p_{i\cdot} \doteq \mathbb{P}(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$p_{\cdot j} \doteq \mathbb{P}(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Folytonos valószínűségi változó marginális eloszlásai szintén folytonos eloszlások. Például, ha (ξ, η) egy folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\xi,\eta}$ együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor a marginális eloszlások sűrűségfüggvényei az együttes sűrűségfüggvényből

$$f_{\xi}(x) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f_{\eta}(y) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

módon határozhatóak meg.

8.1.4. Várható érték vektor, variancia mátrix

Ha ismerjük a marginálisok eloszlását, akkor ezekből a tanult módon már sok minden kiszámítható, például kiszámíthatók a marginálisok várható értékei és szórásnégyzetei.

Folytonos esetben, a marginálisok várható értékeinek illetve szórásnégyzeteinek meghatározásához nem feltétlenül szükséges meghatároznunk a marginálisok sűrűségfüggvényeit. Ezek az értékek közvetlenül meghatározhatóak az együttes sűrűségfüggvényből az alábbi módon:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx, \quad \mathbb{E}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx, \quad \mathbb{E}(\eta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx.$$

Ha az egy dimenziós marginálisok várható értékeit beleírjuk egy vektorba, akkor megkaptuk a **várhatóérték-vektort**. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték vektora az

$$\mathbb{E}(\xi) \doteq \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\xi_1) \\ \mathbb{E}(\xi_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\xi_n) \end{bmatrix}$$

vektor.

Transzformációs formula valószínűségi vektorváltozók esetén: Ha (ξ, η) egy valószínűségi vektorváltozó, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy "elég jó" függvény, akkor az $\mathbb{E}(g(\xi, \eta))$ várható érték (diszkrét, illetve folytonos esetben)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\xi, \eta)) &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}, \\ \mathbb{E}(g(\xi, \eta)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Ez a képlet - az egydimenziós képlettel analóg módon azt fejezi ki, hogy az $g(\xi, \eta)$ valószínűségi változó várható értéke a az együttes eloszlásból közvetlenül meghatározható.

A ξ, η valószínűségi változók **kovarianciájának** a

$$\text{cov}(\xi, \eta) \doteq \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta)))$$

módon definiált számot nevezzük. Mint ahogy azt a szórásnégyzet esetén láttuk, a kovarianciát sem szeretjük definíció alapján számolni, helyette az alábbi képletet használjuk:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta).$$

Az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ mennyiség pedig a transzformációs formula esetén diszkrét, illetve folytonos esetben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\ \mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

módon számolható.

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ valószínűségi változó **szórásmátrixa**, vagy **variancia mátrixa** az az $(n \times n)$ típusú mátrixot nevezzük, amelynek (i, j) -dik komponense a $\text{cov}(\xi_i, \xi_j)$, azaz

$$\text{var}(\xi) \doteq \begin{bmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \text{cov}(\xi_2, \xi_1) & \text{cov}(\xi_2, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\xi_n, \xi_1) & \text{cov}(\xi_n, \xi_2) & \dots & \text{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{bmatrix}$$

Érdemes észrevenni, hogy a szórásmatrix egy olyan szimmetrikus mátrix, amelynek a főátlójában a valószínűségi vektorváltozó komponenseinek a szórásnégyzetei állnak.

A ξ és η valószínűségi változók **korrelációs együtthatójának** az

$$r(\xi, \eta) \doteq \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)}$$

módon nevezett számot nevezzük.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Ekkor a

$$\{\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \xi \text{ egy valószínűségi változó} \}$$

halmaz a vektorműveletek szokásos pontonkénti értelmezése mellett egy valós vektortér. Ezen a vektortéren a kovariancia egy szimmetrikus bilineáris forma, amiből származó kvadratikusság pozitív szemidefinit. Röviden a kovariancia egy szemi-belsőszorzat.

Ha egy X valós vektortéren a $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ egy szemi-belsőszorzat, akkor belőle $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ módon egy szemi-norma származik. A szemi-belsőszorzat és a belőle származó szemi-norma közötti kapcsolatot Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség írja le:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

A kovarianciából - mint szemi-belső szorzatból származó szemi-norma a szórással, így a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség alapján fennáll közöttük a következő kapcsolat:

$$\text{cov}(\xi, \eta) \leq \mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta),$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy

$$|r(\xi, \eta)| \leq 1.$$

Ez elég hasznos a számolás során, mivel, ha a korrelációs együtthatóra a számolások során mondjuk azt kapjuk, hogy $r(\xi, \eta) = 2$, akkor biztosak lehetünk benne, hogy rosszul számoltunk.

8.1.5. Függelenség és korrelálatlanság

Ha a ξ, η valószínűségi változókat **függetleneknek** nevezzük, ha

$$\mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathbb{P}(\xi < x)\mathbb{P}(\eta < y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\mathbb{F}_{\xi\eta}(x, y) = \mathbb{F}_{\xi}(x)\mathbb{F}_{\eta}(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

ami azt jelenti, hogy a együttes eloszlásfüggvény a marginálisok eloszlásfüggvényeinek a szorzata.

Ha a ξ, η valószínűségi változók diszkrét, akkor a fenti definíció ekvivalens azzal, hogy

$$\mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i)\mathbb{P}(\eta = y_j) \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots),$$

azaz

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots),$$

ami azt jelenti, hogy a együttes eloszlás egyenlő a marginálisok eloszlásainak a szorzatával.

Folytonos esetben azt kapjuk, hogy

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

azaz az együttes sűrűségfüggvények a marginálisok szorzata.

A diszkrét és a folytonos esetben is a ξ és η valószínűségi változók függetlensége maga után vonja a várható értékek közötti alábbi kapcsolatot:

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta),$$

azaz független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával, amennyiben a tekintett várható értékek léteznek. Ez utóbbi egyenlőségből rendezéssel kapjuk, hogy

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0.$$

Ha a ξ, η valószínűségi változók olyanok, hogy $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ akkor azt mondjuk, hogy a ξ és az η valószínűségi változók **korrelálatlanok**.

A fentiekből következik, hogyha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor korrelálatlanok. A megfordítás nem igaz. Tehát a korrelálatlanság gyengébb tulajdonság a függetlenségnél.

8.2. Feladatok

8.2.1. Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)

1. Feladat Legyen (ξ, η) egy diszkrét valószínűségi változó, úgy, hogy az együttes eloszlást az alábbi táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
$x_1 = 4$	0.1	0.2	0.1
$x_2 = 6$	0.1	0.4	0.1

- Mutassuk meg, hogy ξ és η nem függetlenek.
- Határozzuk meg az $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}(\eta)$, $\mathbb{D}^2(\xi)$, $\mathbb{D}^2(\eta)$, $\text{cov}(\xi, \eta)$, $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$, $r(\xi, \eta)$ értékeket!
- Határozzuk meg az $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ várható értéket!
- Határozzuk meg a ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbáját!
- Határozzuk meg az η -nak a ξ -re vonatkozó regressziós görbáját!

2. Feladat. Számítsa ki a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatóját, ha a (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 36, \eta = 33) = 0.23$, $P(\xi = 36, \eta = 45) = 0.13$ és $P(\xi = 48, \eta = 33) = 0.29$. Ismert, hogy ξ csak a 36 és 48, míg η csak a 33 és 45 értékeket veheti fel.

3. Feladat. A (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 6, \eta = 29) = 0.14$, $P(\xi = 6, \eta = 48) = 0.25$ és $P(\xi = 17, \eta = 29) = 0.13$. Ismert, hogy ξ csak a 6 és 17, míg η csak a 29 és 48 értékeket veheti fel. Számítsa ki az $E(\eta | \xi = 17)$ feltételes várható értéket!

4. Feladat. A (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 21, \eta = 20) = 0.14$, $P(\xi = 21, \eta = 45) = 0.11$ és $P(\xi = 28, \eta = 20) = 0.13$. Ismert, hogy ξ csak a 21 és 28, míg η csak a 20 és 45 értékeket veheti fel. Számítsa ki $D(\xi + \eta)$ értékét!

8.3. Megoldások

8.3.1. Valószínűségi vektorváltozók (diszkrét eset)

1. Megoldás. Először meghatározzuk a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$	
$x_1 = 4$	0.1	0.2	0.1	0.4
$x_2 = 6$	0.1	0.4	0.1	0.6
	0.2	0.6	0.2	1

Tehát a marginális eloszlások táblázatai: A ξ eloszlása:

x_i	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$
p_i	0.4	0.6

η eloszlása:

y_i	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
p_j	0.2	0.6	0.2

a. A ξ és η nem függetlenek, hiszen a marginális eloszlások szorzata nem egyenlő az együttes eloszlással. Ez könnyen ellenőrizhető, ha például az első sort és az első oszlopot nézzük: $0.2 \cdot 0.4 \neq 0.1$.

b. A marginális eloszlásokat már sikeresen meghatároztuk. Ezekből a táblázatokból, illetve az együttes eloszlástáblázatból a kért mérőszámok (a tanult képletek alapján) már könnyen meghatározhatóak.

A ξ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 4 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.6 = 5.2, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 4^2 \cdot 0.4 + 6^2 \cdot 0.6 = 28, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 28 - 5.2^2 = 0.96.\end{aligned}$$

A η várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.2 = 3, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 1^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.6 + 5^2 \cdot 0.2 = 10.6, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 10.6 - 3^2 = 1.6.\end{aligned}$$

$\text{cov}(\xi, \eta)$ meghatározásához szükségünk van az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értékére, ami az együttes eloszlástáblázatból számolható az a transzformációs formula felhasználásával.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= 4 \cdot 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 5 \cdot 0.1 + \\ &\quad + 6 \cdot 1 \cdot 0.1 + 6 \cdot 3 \cdot 0.4 + 6 \cdot 5 \cdot 0.1 = \\ &= 15.6.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 15.6 - 5.2 \cdot 3 = 0.$$

Mivel $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, így ξ és η korrelálatlanok, azonban - mint ahogyan azt láttuk - nem függetlenek.

A $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ értékét a kapott értékekből a legkönnyebb meghatározni, így nincs szükség a $\xi + \eta$ eloszlásának a meghatározására.

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 0.96 + 0 + 1.6 = 2.56.$$

c. A $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ (A ξ és η abszolút átlagos eltérése) a meghatározása könnyű a együttes eloszlástáblázat és a transzformációs formula alapján:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\xi - \eta|) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_i - y_j| p_{ij} = \\ &= |1 - 4| \cdot 0.4 + |3 - 4| \cdot 0.2 + |5 - 4| \cdot 0.1 + \\ &+ |1 - 6| \cdot 0.1 + |3 - 6| \cdot 0.4 + |5 - 6| \cdot 0.1 = 2.4 \end{aligned}$$

d. A ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbéje egy függvény, ami az η értékészletén van értelmezve és egy y_j értékhez az $\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j) \in \mathbb{R}$ számot rendeli.

Az $\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j)$ feltételes várható érték az alábbi módon számolható:

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j) = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i|\eta = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_i x_i p_{ij}.$$

Így kapjuk, hogy a ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbéje:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 1) = \frac{1}{0.2}(4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1) = 5, \\ 3 &\mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 3) = \frac{1}{0.6}(4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.4) = 5.3, \\ 5 &\mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 5) = \frac{1}{0.2}(4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1) = 5. \end{aligned}$$

módon definiált függvény.

e. A η -nak az ξ -re vonatkozó regressziós görbéje egy függvény, ami az ξ értékészletén van értelmezve és egy x_i értékhez az $\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i) \in \mathbb{R}$ számot rendeli.

Az $\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i)$ feltételes várható érték az alábbi módon számolható:

$$\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i) = \sum_j y_j \mathbb{P}(\eta = y_j|\xi = x_i) = \sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{1}{p_{i\cdot}} \sum_j y_j p_{ij}.$$

Így kapjuk, hogy az η -nak a ξ -re vonatkozó regressziós görbéje:

$$4 \mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = x_1) = \frac{1}{0.4}(1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.1) = 3,$$

$$6 \mapsto \mathbb{E}(\eta|\xi = x_2) = \frac{1}{0.6}(1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.1) = 3.$$

2. Megoldás Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45) = 1 - (0.23 + 0.13 + 0.29) = 0.35$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 33$	$y_2 = 45$	
$x_1 = 36$	0.23	0.13	0.36
$x_2 = 48$	0.29	0.35	0.64
	0.52	0.48	

A ξ eloszlása:

x_i	$x_1 = 36$	$x_2 = 48$
p_i	0.36	0.64

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 36 \cdot 0.36 + 48 \cdot 0.64 = 43.68, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 36^2 \cdot 0.36 + 48^2 \cdot 0.64 = 1941.12, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 33.1776, \\ \mathbb{D}(\xi) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{33.1776} = 5.76.\end{aligned}$$

Az η eloszlása:

y_i	$y_1 = 33$	$y_2 = 45$
p_j	0.52	0.48

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{D}^2(\eta)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 33 \cdot 0.52 + 45 \cdot 0.48 = 38.76, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 33^2 \cdot 0.52 + 45^2 \cdot 0.48 = 1538.28, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 35.9424, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{35.9424} = 5.9952.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta)$ értéket.

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = 36 \cdot 33 \cdot 0.23 + 36 \cdot 45 \cdot 0.13 + 48 \cdot 33 \cdot 0.29 + 48 \cdot 45 \cdot 0.35 = 1699.2$$

A $\text{cov}(\xi, \eta)$:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 6.1632.$$

Az $r(\xi, \eta)$:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{6.1632}{5.76 \cdot 5.9952} = 0.1785.$$

3. Megoldás Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 18, \eta = 48)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 17, \eta = 48) = 1 - (0.14 + 0.25 + 0.13) = \frac{12}{25} = 0.48.$$

módon számolható ki. Foglalkozzunk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 29$	$y_2 = 48$	
$x_1 = 6$	0.14	0.25	0.39
$x_2 = 17$	0.13	0.48	0.61
	0.27	0.73	

A keresett feltételes várható érték:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta|\xi = 6) &= 29 \cdot \mathbb{P}(\eta = 29|\xi = 6) + 48 \cdot \mathbb{P}(\eta = 48|\xi = 6) = \\ &= 29 \frac{\mathbb{P}(\eta = 29, \xi = 6)}{\mathbb{P}(\xi = 6)} + 48 \frac{\mathbb{P}(\eta = 48, \xi = 6)}{\mathbb{P}(\xi = 6)} = \\ &= \frac{1}{0.39} (29 \cdot 0.14 + 48 \cdot 0.25) = 41.1795. \end{aligned}$$

4. Megoldás. Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45) = 1 - (0.14 + 0.11 + 0.13) = 0.62$$

módon számolható ki. Foglalkozzunk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$	
$x_1 = 21$	0.14	0.11	0.25
$x_2 = 28$	0.13	0.62	0.75
	0.27	0.73	1

A ξ eloszlása:

ξ	$x_1 = 21$	$x_2 = 28$
p_i	0.25	0.75

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 21 \cdot 0.25 + 28 \cdot 0.75 = 26.25, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 21^2 \cdot 0.25 + 28^2 \cdot 0.75 = 698.25, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 9.1875, \\ \mathbb{D}(\xi) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{9.1875} = 3.0311.\end{aligned}$$

Az η eloszlása:

η	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$
p_j	0.27	0.73

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{D}^2(\eta)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 20 \cdot 0.27 + 45 \cdot 0.73 = 38.25, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 20^2 \cdot 0.27 + 45^2 \cdot 0.73 = 1586.25, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 123.1875, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{123.1875} = 11.0990.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értéket.

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = 21 \cdot 20 \cdot 0.14 + 21 \cdot 45 \cdot 0.11 + 28 \cdot 20 \cdot 0.13 + 28 \cdot 45 \cdot 0.62 = 1016.75$$

A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 1016.75 - 26.25 \cdot 38.25 = 12.1875.$$

A $\mathbb{D}(\xi + \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 9.1875 + 2 \cdot 12.1875 + 123.1875 = 156.75.$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi + \eta)} = \sqrt{156.75} = 26.9452.$$

9. fejezet

Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)

9.1. Feladatok

9.1.1. Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)

1. Feladat. Legyen a (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + x^3y - xy^3), & \text{ha } |x| \leq 1, |y| \leq 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- a. Bizonyítsuk be, hogy f valóban sűrűségfüggvény!
- b. Határozzuk meg a marginális eloszlások sűrűségfüggvényeit, azaz f_ξ -t, f_η -t, $\mathbb{E}(\xi)$ -t, $\mathbb{D}^2(\xi)$ -t, $\mathbb{E}(\eta)$ -t, $\mathbb{D}^2(\eta)$ -t, $\text{cov}(\xi, \eta)$ -t, $r(\xi, \eta)$ -t.
- c. Határozzuk meg a ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbét!
- d. Határozzuk meg az η -nak a ξ -re vonatkozó regressziós görbét!
- e. Határozzuk meg az alábbi valószínűséget: $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq \eta \leq \frac{3}{4})!$

2. Feladat. A (ξ, η) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{ha } 0 < x < 6.6 \text{ és } 6.6 - x < y < 14.4 - x; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a korrelációs együttható értékét!

3. Feladat. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} A \left(\frac{x}{10.2} + y \right), & \text{ha } 0 < x < 10.2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg $E(\xi)$ értékét!

4. Feladat. Legyen a (ξ, η) vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-x-1.9y}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Milyen valószínűséggel esik η a $(0.95, 3.80)$ intervallumba, ha $\xi = 4.3$?

5. Feladat. Legyen a (ξ, η) vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} xye^{-k(x^2+y^2)}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Hol veszi fel a ξ peremeloszlás-függvénye a 0.15 értéket?

6. Feladat. Egy henger milliméterben mért átmérője a ξ valószínűségi változó, hossza milliméterben mérve az η valószínűségi változó. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y) = x^2 + Ay^2$, a $0 < x < 1, 0 < y < 1.70$ tartományon és 0 egyébként. Számítsa ki az alábbi valószínűséget:

$$P(\xi > 0.5, \eta > 1.53).$$

9.2. Megoldások

9.2.1. Valószínűségi vektorváltozók (folytonos eset)

1. Megoldás.

a. Megmutatjuk, hogy f valóban sűrűségfüggvény.

Először bebizonyítjuk, hogy, hogy $f(x, y) \geq 0$ minden $|x| \geq 1, |y| \geq 1$ esetén, azaz

$$y^2xy \leq 1 + x^2xy \quad (|x| \geq 1, |y| \geq 1)$$

Legyen

$$T \doteq]-1, 1[\times]-1, 1[.$$

A T téglát a négy síknegyed négy, páronként belső pont nélküli részre vágja. Ezek a következők:

$$T_1 \doteq]0, 1[\times]0, 1[, \quad T_2 \doteq]-1, 0[\times]-0, 1[, \quad T_3 \doteq]-1, 0[\times]-1, 0[, \quad T_4 \doteq]-1, 0[\times]0, 1[.$$

Ha $(x, y) \in T_1 \cup T_3$, akkor $y^2xy \in [0, 1]$, $1 + x^2xy \in [1, 2]$, így teljesül a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Ha $(x, y) \in T_2 \cup T_4$, akkor $y^2xy \in [-1, 0]$, $1 + x^2xy \in [0, 1]$, így a bizonyítandó egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

Ellenőrizni kell még az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

egyenlőség teljesülését.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + x^3y - xy^3) dy dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left[y + x^3 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 2 dx = \frac{1}{2} [x]_{x=-1}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$

b. Mivel

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 + x^3y - xy^3) dy = \frac{1}{4} \left[y + x^3 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

ha $x \in [-1, 1]$, így kapjuk, hogy

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in]-1, 1[; \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így kapjuk, hogy $\xi \sim U[-1, 1]$, amiből kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = 0$ és $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{3}$. Hasonló számítások mutatják, hogy $\eta \sim U[-1, 1]$, $\mathbb{E}(\eta) = 0$ és $\mathbb{D}^2(\eta) = \frac{1}{3}$. Ebből az is látszik, hogy ξ és η nem függetlenek, ugyanis független valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye egyenlő a marginális sűrűségfüggvények szorzatával, azonban az együttes sűrűségfüggvény nem konstans a T téglán.

A kovariancia meghatározásához határozzuk meg először az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értékét.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dydx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} xy(1+x^3y-xy^3)dydx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (xy + x^4y^2 - x^2y^4)dydx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left[x\frac{y^2}{2} + x^4\frac{y^3}{3} - x^2\frac{y^5}{5} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^2 \right) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3}\frac{x^5}{5} - \frac{2}{5}\frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.\end{aligned}$$

Így $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$, azaz ξ és η korrelálatlanok, de nem függetlenek. Végül

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = 0.$$

c. ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbéje:

$$\begin{aligned}y \mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} x \frac{\frac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)}{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x + x^4y - x^2y^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}y - \frac{x^3}{3}y^3 \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}y - \frac{2}{3}y^3 \right) = \frac{y}{5} - \frac{y^3}{3}.\end{aligned}$$

d. η -nak az ξ -re vonatkozó regressziós görbéje:

$$\begin{aligned}x \mapsto \mathbb{E}(\eta|\xi = x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} dy = \\ &= \int_{-1}^{+1} y \frac{\frac{1}{4}(1+x^3y-xy^3)}{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (y + x^3y^2 - xy^4) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} + x^3\frac{y^3}{3} - x\frac{y^5}{5} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x \right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{5}.\end{aligned}$$

2. Megoldás. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a megadott paralelogrammán. A C konstans értéke meghatározható integrálással, de egyszerűbb úgy kiszámolni,

hogy ha egy kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású egy tartományon, akkor az együttes sűrűségfüggvényben szereplő konstans értéke egyenlő a tartomány területének a reciprokával. Mivel a tartomány az általunk vizsgált esetben egy paralelogramma, így a terület könnyen számolható az $T = \text{alap} \cdot \text{magasság}$ képlet segítségével, így $C = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6}$.

A marginálisok várható értékei a marginális eloszlások meghatározása nélkül, a tanult "burkolt képletek" segítségével számolhatóak. Sőt, lehet még egyszerűbben, integrálás nélkül, mivel szimmetria okokból az $(\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\eta))$ pár éppen a paralelogramma átlói metszéspontjának a koordinátái. Így kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = 3.3$, $\mathbb{E}(\eta) = 7.2$.

A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékének a meghatározásához először ki kell számolnunk az $E(\xi\eta)$ várható értéket. Itt már nincs mese (...), integrálnunk kell. Alkalmazzuk a transzformációs szabályt.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dydx = \int_0^{6.6} \int_{6.6-x}^{14.4-x} xy \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} dydx = \\ &= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x \int_{6.6-x}^{14.4-x} y dy dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=6.6-x}^{y=14.4-x} dx = \\ &= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x(10.5 - x)7.8 dx = \frac{1}{6.6} \int_0^{6.6} (10.5x - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{6.6} \left[10.5 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=6.6} = \frac{1}{6.6} \left(10.5 \frac{6.6^2}{2} - \frac{6.6^3}{3} \right) = 10.5 \frac{6.6}{2} - \frac{6.6^2}{3} = 20.13.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\text{cov}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 20.13 - 3.3 \cdot 7.2 = -3.63$.

A korrelációs együttható meghatározásához ki kell számolnunk az $\mathbb{E}(\xi^2)$ és $\mathbb{E}(\eta^2)$ várható értékeket. Alkalmazzuk a transzformációs formulát és a "burkolt képleteket".

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dy dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x^2 \int_{6.6-x}^{14.4-x} 1 dy dx = \\ &= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x^2 [y]_{y=6.6-x}^{y=14.4-x} dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} x \cdot 7.8 dx = \\ &= \frac{1}{6.6} \int_0^{6.6} x^2 dx = \frac{1}{6.6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=6.6} = \frac{6.6^2}{3} = 14.52,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = 14.52 - 3.3^2 = 3,63$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dy dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} \int_{6.6-x}^{14.4-x} y^2 dy dx = \\ &= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6} \int_0^{6.6} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=6.6-x}^{y=14.4-x} dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 3} \int_0^{6.6} (14.4-x)^3 - (6.6-x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 12} ([(6.6-x)^4]_{x=0}^{x=6.6} - [(14.4-x)^4]_{x=0}^{x=6.6}) = \\ &= \frac{-6,6^4 - 7.8^4 + 14.4^4}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 12} = \frac{3027}{50} = 60,54.\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = 60,54 - 7.2^2 = 8.7$. A korrelációs együttható:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-3.63}{\sqrt{3,63}\sqrt{8.7}} = -0.6459.$$

3. Megoldás. Az A konstans értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = A \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= A \int_0^{10.2} \left[\frac{xy}{10.2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = A \int_0^{10.2} \left(\frac{x}{10.2} + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= A \left[\frac{x^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=10.2} = A \left(\frac{10.2^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{10.2}{2} \right) = 10.2 \cdot A,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $A = \frac{1}{10.2}$. A keresett várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 x \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{10.2} + xy \right) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left[\frac{x^2 y}{10.2} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left(\frac{x^2}{10.2} + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{10.2} \left[\frac{x^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=10.2} = \\ &= \frac{1}{10.2} \left(\frac{10.2^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{10.2^2}{4} \right) = \frac{7 \cdot 10.2}{12} = 5.95.\end{aligned}$$

4. Megoldás. Könnyű látni, hogy a ξ, η peremeloszlások független exponenciális eloszlások.

$$f(x, y) = A e^{-x-1.9y} = (A_1 e^{-x}) (A_2 e^{-1.9y}) \quad (x > 0, y > 0).$$

Így $A_1 = 1$ és $A_2 = 1.9$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.95 < \eta < 3.80 | \xi = 4.3) &= \mathbb{P}(0.95 < \eta < 3.80) = \\ &= \mathbb{F}_\eta(3.80) - \mathbb{F}_\eta(0.95) = \\ &= (1 - e^{-1.9 \cdot 3.8}) - (1 - e^{-1.9 \cdot 0.95}) = \\ &= e^{-1.9 \cdot 0.95} - e^{-1.9 \cdot 3.8} = 0.1637.\end{aligned}$$

5. Megoldás. Először meghatározzuk a k konstans értékét. Tudjuk, hogy

$$1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xy e^{-k(x^2+y^2)} dy dx = \int_0^{+\infty} x e^{-kx^2} dx \int_0^{+\infty} y e^{-ky^2} dy = \left[\int_0^{+\infty} x e^{-kx^2} dx \right]^2.$$

Az ismeretlen primitív függvényt könnyű kitalálni. Deriváljuk az e^{-kx^2} , majd mindkét oldalt osszuk el $(-2k)$ -val.

$$\left(e^{-kx^2} \right)' = -2kx e^{-kx^2}, \quad \left(\frac{1}{-2k} e^{-kx^2} \right)' = x e^{-kx^2}.$$

Így kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^{+\infty} x e^{-kx^2} dx = \left[\frac{1}{-2k} e^{-kx^2} \right]_{x=0}^{x=+\infty} = 0 - \frac{1}{-2k} = \frac{1}{2k},$$

amiből kapjuk, hogy $2k = 1$, azaz $k = \frac{1}{2}$.

Így a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x e^{-kx^2}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel

$$\int_0^x f_\xi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{+\infty}^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \right), \quad (x > 0)$$

így a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A feladat szerint azt a helyet keressük, ahol a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye felveszi az 0.15 értéket. Ehhez az $\frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}) = 0.15$ egyenletet kell megoldanunk. Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy $x = \sqrt{-2 \ln(0.7)} = 0.8446$.

6. Megoldás. Először meghatározzuk az A paraméter értékét.

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_0^1 \int_0^{1.7} (x^2 + Ay^2) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + A \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1.7} dx = \\
 &= \int_0^1 \left(1.7x^2 + \frac{1.7^3}{3} A \right) dx = \left[1.7 \frac{x^3}{3} + \frac{1.7^3}{3} Ax \right]_{x=0}^{x=1} = \\
 &= \frac{1.7 + 1.7^3}{3} A,
 \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy $A = \frac{3}{1.7+1.7^3}$.
 A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\xi > 0.5, \eta > 1.53) &= \int_{0.5}^1 \int_{1.53}^{1.7} \left(x^2 + \frac{3}{1.7 + 1.7^3} y^2 \right) dy dx = \\
 &= \int_{0.5}^1 \left[x^2 y + \frac{3}{1.7 + 1.7^3} \frac{y^3}{3} \right]_{y=1.53}^{y=1.7} dx = \\
 &= \int_{0.5}^1 (1.7x^2 + 0,2013) dx = \\
 &= \left[1.7 \frac{x^3}{3} + 0,2013x \right]_{x=0.5}^{x=1} = 0.3952.
 \end{aligned}$$

10. fejezet

Markov, Csebisev egyenlőtlenség, Bernoulli-féle nagy számok törvénye, Központi határeloszlás tétel, Moivre-Laplace tétel

10.1. Rövid elméleti összefoglaló

Markov egyenlőtlenség Legyen η valószínűségi változó úgy, hogy $\eta \geq 0$ és létezik $\mathbb{E}(\eta)$, továbbá $c > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(\eta < c) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\eta)}{c}.$$

Csebisev egyenlőtlenség Legyen ξ egy valószínűségi változó úgy, hogy létezik $\mathbb{D}^2(\xi)$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Bernoulli-féle nagy számok törvénye. n független kísérletet végzünk. Egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát vizsgáljuk. Jelölje $\frac{k_n}{n}$ az A esemény bekövetkezéseinek relatív gyakoriságát. Ekkor érvényes a következő becslés:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Az ε konstanst pontosságnak; az egyenlőtlenség bal oldalát megbízhatóságnak nevezzük.

Moivre Laplace Tétel. A binomiális eloszlás standard normálissal közelíthető. Legyen $\xi \sim B(n, p)$ $0 \leq a < b \leq n$. Ekkor

$$\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

A Központi Határeloszlás Tétel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy pozitív és véges a szórásnégyzetük. A közös szórásnégyzetet jelölje σ^2 , a közös várható értéket m , a valószínűségi változók n -edik részletösszegét S_n , azaz $S_n \doteq \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

Azaz az n -edik részletösszegek standardizáltjának eloszlásfüggvénye tart a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez, ha n tart a végtelenhez.

10.2. Feladatok

- 1. Feladat.** Legyen $E(\xi) = 1.6$, $D(\xi) = 0.10$. Adjon alsó becslést a $P(1.220 < \xi < 1.980)$ valószínűségre.
- 2. Feladat.** Legalább hányszor kell egy szabályos pénzérmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.77 valószínűséggel 0.37 és 0.63 közé essen?
- 3. Feladat.** Legalább hány elemű mintát kell vennünk, ha visszatevésees mintavételnél a selejtarányt 0.11 pontossággal (legfeljebb ennyi eltéréssel) és 0.83 megbízhatósággal akarjuk becsülni?
- 4. Feladat.** Egy párt népszerűségét kívánjuk közvélemény-kutatással meghatározni. (Igen - nem választ kell adni a megkérdezetteknek.) Legalább hány embert kell megkérdezni, ha a százalékban mért népszerűséget ± 4 százalék pontossággal és 0.80 megbízhatósággal akarjuk becsülni? (A könnyebb számolás végett visszatevésees mintavételt tételezzünk fel!)
- 5. Feladat.** Egy urna 103 fehér és 20 fekete golyót tartalmaz. Visszatevéssel kihúzunk 600 golyót. Adjon közelítést annak a valószínűségére, hogy a fehérek száma a $[478, 526]$ intervallumban lesz!

10.3. Megoldások

1. Megoldás. A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(\xi) - \varepsilon < \xi < \mathbb{E}(\xi) + \varepsilon) > 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Először meghatározzuk a pontosságot.

$$\begin{aligned} 1.6 - \varepsilon_1 &= 1.220 & \implies & \varepsilon_1 = 0.38, \\ 1.6 + \varepsilon_2 &= 1.980 & \implies & \varepsilon_2 = 0.38, \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.38$. A keresett alsó becslés:

$$1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0.1^2}{0.38^2} = 0.9370.$$

2. Megoldás. A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. Mivel az érme szabályos, $p = \frac{1}{2}$.

$$\left| \frac{k_n}{n} - p \right| < \varepsilon \iff p - \varepsilon \leq \frac{k_n}{n} \leq p + \varepsilon,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \varepsilon_1 &= 0.37 & \implies & \varepsilon_1 = 0.13, \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_2 &= 0.63 & \implies & \varepsilon_2 = 0.13, \end{aligned}$$

így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.13$. Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.13^2} \geq 0.77$$

$$n \geq \frac{1}{(1 - 0.77) \cdot 4 \cdot 0.13^2} = 64.3, \text{ azaz } n \geq 64.$$

3. Megoldás. A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. $\varepsilon = 0.11$. A megbízhatóság:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0.83 \implies n \geq \frac{1}{(1 - 0.83) \cdot 4 \cdot 0.11^2} = 121.5.$$

Így kapjuk, hogy $n \geq 122$.

4. Megoldás. A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. A pontosság: $\varepsilon = 0.04$. A megbízhatóság:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0.8 \quad \implies \quad n \geq \frac{1}{(1 - 0.8) \cdot 4 \cdot 0.04^2} = 781.25.$$

Így kapjuk, hogy $n \geq 782$.

5. Megoldás. Jelölje ξ a kihúzott fehér golyók számát. Ekkor $\xi \sim B\left(n = 600, p = \frac{103}{123}\right)$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\xi \in [478, 526]) = \sum_{k=478}^{526} \binom{600}{k} \left(\frac{103}{123}\right)^k \left(\frac{20}{123}\right)^{600-k}$$

módon számolható. Ez a szumma azonban nem számolható könnyen, mivel túl sok tagból áll és a tagokban nagyon nagy számokat kell nagyon kicsi számokkal szorozni. Helyette a Moivre-Laplace tételt alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(478 \leq \xi \leq 526) &\approx \Phi\left(\frac{526 - 600 \cdot \frac{103}{123} + \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) - \Phi\left(\frac{478 - 600 \cdot \frac{103}{123} - \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) = \\ &= \Phi(2.6620) + \Phi(2.7592) - 1 = 0.996 + 0.9971 - 1 = 0.9932. \end{aligned}$$

11. fejezet

Matematikai statisztika I. Alapstatisztikák, Maximum-likelihood becslés

11.1. Rövid elméleti összefoglaló

A statisztika részterületei:

- Becsléelmélet;
- Hipotézisvizsgálat.

A becsléelmélet részterületei:

- Pontbecslés;
- Intervallumbecslés.

Ezen a gyakorlaton a pontbecslések témaköréhez tartozó két fontos területtel ismerkedünk meg, ezek az alapstatisztikák és a maximum likelihood-becslés.

Az alapstatisztikák a következők:

- Átlag;
- Tapasztalati szórásnégyzet;
- Korrigált tapasztalati szórásnégyzet;
- Szórás együttható;

- Tapasztalati medián (med);
- Medián abszolút eltérés (MAD);
- Tapasztalati eloszlásfüggvény.

Minta: $\xi_1, \xi_2, \dots$ azonos eloszlású valószínűségi változókat mintának nevezzük.

Minta realizáció: $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots \in \mathbb{R}^N$ azaz szám, vagy vektorsorozat mintarealizációnak nevezzük.

A minta és a minta realizáció között nem teszünk különbséget. θ az ismeretlen paraméter $\theta \in \Theta$. A Θ a paraméterter. A statisztika feladata az ismeretlen paraméter, vagy paraméterek becslése.

A statisztika: egy $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. A g függvény az ismeretlen θ **torzítatlan becslése**, ha $\mathbb{E}(g(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \theta$, illetve **aszimptotikusan torzítatlan becslése**, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \theta.$$

11.1.1. Alapstatisztikák

- **Átlag:**

- Definíciója: $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$.
- Tulajdonságai: Az átlag az elméleti várható érték torzítatlan becslése. (azaz $\mathbb{E}(\bar{\xi}) = m$).

- **Tapasztalati szórásnégyzet**, más néven empirikus szórásnégyzet:

- Definíciója: $s_n^2 \doteq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$.
- Kiszámítása: $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - (\bar{\xi})^2$.
- Tulajdonságai: A tapasztalati szórásnégyzet az elméleti szórásnégyzet aszimptotikusan torzítatlan becslése.

- **Korrigált tapasztalati szórásnégyzet**

- Definíciója: $s_n^{*2} \doteq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$.
- Kiszámítása: $s_n^{*2} = \frac{n}{n-1} s_n^2$, azaz ha már kiszámoltuk az empirikus szórásnégyzetet, akkor a korrigált empirikus szórásnégyzetet célszerű abból számolni.

- Tulajdonságai: A korrigált tapasztalati szórásnégyzet az elméleti szórásnégyzet torzítatlan becslése.
- **Szórás együttható:**
 - Definíciója: $\frac{s_n}{\bar{x}}$.
- **Tapasztalati medián** (jele: med):
 - Ha a mintát nagyság szerint rendezzük, akkor rendezett mintát kapunk. A rendezett minta tagjait $*$ -gal jelöljük: $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$. A rendezett minta tagjai már nem valószínűségi változók. A rendezett minta segítségével definiálhatjuk a minta **mediánját**, amely páratlan elemszám esetén a minta középső eleme, páros esetén a két középső számtani közepe. A tapasztalati mediánnal az elméleti mediánt becsljük.
- **MAD (Medián abszolút eltérés).**
 - Úgy számoljuk, hogy minden mintaelemből levonjuk a mediánt, vesszük az így kapott számok abszolút értékét, majd ezek mediánját, azaz $\text{MAD}(\xi_i) = \text{med}(|\xi_i - \text{med}|)$.
- **Tapasztalati eloszlásfüggvény.**
 - Definíciója: $\mathbb{F}_n^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \xi_1^*; \\ \frac{k}{n}, & \text{ha } \xi_k^* < x \leq \xi_{k+1}^* \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \\ 1, & \text{ha } x > \xi_n^*. \end{cases}$$
 - A tapasztalati eloszlásfüggvény egy balról folytonos, monoton növekvő lépcsős függvény, amely a rendezett minta minden eleménél $\frac{1}{n}$ -et ugrik. (itt most feltételezzük, hogy a rendezett minta minden eleme különböző).
 - **Glivenko-Cantelli tétel (a statisztika alaptétele):**

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}(x)| = 0 \right) = 1,$$

azaz a tapasztalati eloszlásfüggvény segítségével rekonstruálható a mintából az elméleti eloszlásfüggvény, ha n elég nagy.

Numerikus feladat: Legyen a minta: 0.961, 0.055, 0.24, 0.321, 0.134, 0.888, 0.786, 0.415, 0.799, 0.870. Határozzuk meg az alapstatisztikákat.

Megoldás:

- Átlag: $\bar{\xi} =$.
- Tapasztalati második momentum: $m_2 = 0.4079$.
- Tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^2 = m_2 - \bar{\xi}^2 = 0.4079 - 0.5469^2 = 0.1088$.
- Tapasztalati szórás: $s_n = \sqrt{s_n^2} = 0.3299$.
- Korrigált tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^{*2} = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{10}{9}0.1088 = 0.1209$.
- Szórásegyüttható: $\frac{s_n}{\bar{\xi}} = \frac{0.3299}{5.469} = 0.0603$.
- Medián: $\text{med} = \frac{0.415+0.786}{2} = 0.6005$.
- Mad:

$ 0.055 - 0.6005 = 0.5455,$	$ 0.134 - 0.6005 = 0.4665,$
$ 0.24 - 0.6005 = 0.3605,$	$ 0.321 - 0.6005 = 0.2795,$
$ 0.415 - 0.6005 = 0.1855,$	$ 0.876 - 0.6005 = 0.1855,$
$ 0.799 - 0.6005 = 0.1985,$	$ 0.870 - 0.6005 = 0.2695,$
$ 0.888 - 0.6005 = 0.2875,$	$ 0.961 - 0.6005 = 0.3605.$

Így kapjuk, hogy $\text{MAD} = \frac{0.2+0.2875}{2} = 0.2835$.

11.1.2. A maximum-likelihood becslés

Maximum-Likelihood becslés Folytonos eloszlás esetén Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy független minta, θ az ismeretlen paraméter.

Likelihood függvény: $L(\theta) = L(\theta, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n f(\xi_i, \theta)$, ahol $(x, \theta) \mapsto f(x, \theta)$ ($x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta$) jelöli az elméleti eloszlásfüggvényt.

A Loglikelihood függvény: $l(\theta) = -\ln L(\theta) = -\sum_{i=1}^n \ln(f(\xi_i, \theta))$.

Becslés: Az ismeretlen θ paramétert $\hat{\theta}$ -val becsüljük. A $\hat{\theta}$ a Likelihood függvény maximum-helye, azaz az az érték, melyre

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}).$$

A numerikus példák megoldása során nem maximumhelyet, hanem stacionárius pontot keresünk, amihez a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk.

Maximum-Likelihood becslés folytonos eloszlás esetén Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy független minta, θ az ismeretlen paraméter.

Likelihood függvény: $L(\theta) = L(\theta, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n f(\xi_i, \theta)$, ahol $(x, \theta) \mapsto f(x, \theta)$ ($x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta$) jelöli az elméleti eloszlásfüggvényt.

A Loglikelihood függvény: $l(\theta) = -\ln L(\theta) = -\sum_{i=1}^n \ln(f(\xi_i, \theta))$.

Becslés: Az ismeretlen θ paramétert $\hat{\theta}$ -val becsüljük. A $\hat{\theta}$ a Likelihood függvény maximumhelye, azaz az az érték, melyre

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}).$$

A numerikus példák megoldása során nem maximumhelyet, hanem stacionárius pontot keresünk, amihez a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk.

Becslés: Az ismeretlen θ paramétert $\hat{\theta}$ -val becsüljük. A $\hat{\theta}$ a Likelihood függvény maximumhelye, azaz az az érték, melyre

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}).$$

A numerikus példák megoldása során nem maximumhelyet, hanem stacionárius pontot keresünk, amihez a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk.

Maximum-Likelihood becslés diszkrét eloszlás esetén Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy független minta, θ az ismeretlen paraméter.

Likelihood függvény: $L(\theta) = L(\theta, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n p(\xi_i, \theta)$, ahol $p(k, \theta)$ jelöli az elméleti eloszlást.

A Loglikelihood függvény: $l(\theta) = -\ln L(\theta) = -\sum_{i=1}^n \ln(p(\xi_i, \theta))$.

Becslés: Az ismeretlen θ paramétert $\hat{\theta}$ -val becsüljük. A $\hat{\theta}$ a Likelihood függvény maximumhelye, azaz az az érték, melyre

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}).$$

A numerikus példák megoldása során nem maximumhelyet, hanem stacionárius pontot keresünk, amihez a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk.

Mindkét fenti esetben, ha az ismeretlen paraméter egy vektor, például $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, akkor az

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta_1, \theta_2) = 0.$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Numerikus feladatok:

1. $\xi_i \in \text{Pois}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és a λ -t keressük;
2. $\xi_i \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és a m -et és σ^2 -et keressük;

12. fejezet

Matematikai Statisztika II. (intervallumbecslések)

12.1. Rövid elméleti összefoglaló

12.1.1. Intervallumbecslések

Az intervallumbecslés Adott egy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független minta, amelynek eloszlása egy ismeretlen θ paramétert tartalmaz. Keressük a $\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ statisztikákat, amelyekre:

$$\mathbb{P}(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < \theta < \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \geq 1 - \alpha.$$

Ekkor a $(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$ intervallumot $1 - \alpha$ **megbízhatósági szintű konfidencia intervallumnak** nevezzük.

A továbbiakban $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a független minta. Az alábbi eseteket vizsgáljuk:

1. μ -t becsüljük σ^2 ismert. Ekkor a következő statisztikát használjuk:

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

2. μ -t becsüljük σ^2 ismeretlen. Ekkor a következő statisztikát használjuk:

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

A t_{n-1} eloszlást $n - 1$ szabadságfokú t-eloszlásnak nevezzük.

3. σ^2 -et becsüljük. Ekkor a következő statisztikát használjuk:

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

A χ_{n-1}^2 eloszlást $n - 1$ **szabadságfokú khi-négyzet eloszlásnak** nevezzük.

Numerikus feladat. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, amelyre $n = 10$, $\bar{\xi} = 1.12$, $\sigma_0 = 0.3162$. Adjuk meg a 95%-os konfidencia-intervallumot μ számára.

Megoldás. Tudjuk, hogy $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P} \left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} < u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha,$$

amiből kapjuk, hogy $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - (1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})) = 2\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 1 - \alpha$, azaz $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$. A $u_{\frac{\alpha}{2}}$ értéke visszakereshető a normális eloszlás táblázatból, $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,960$. Ezzel az $u_{\frac{\alpha}{2}}$ értékkel

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} < u_{\frac{\alpha}{2}}$$

teljesül. Ezt az egyenlőtlenséget kell μ -re rendezni.

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{\sigma_0 u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \implies \bar{\xi} - \frac{\sigma_0 u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma_0 u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Tehát a keresett konfidencia intervallum: $0.92 < \mu < 1.32$.

Numerikus feladat. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, μ -t és σ_0 -t sem ismerjük. Legyen $n = 10$, $\bar{\xi} = 1.12$, $s_n^* = 0.3162$. Adjuk meg a μ számára egy konfidencia-intervallumot 95%-os megbízhatósági szinttel.

Megoldás. Az alkalmazott statisztika ebben az esetben:

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

Mivel a t_{n-1} eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus az y tengelyre, így most is egy origóra szimmetrikus intervallumot keresünk.

$$\mathbb{P} \left(-x < \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} < x \right) = 1 - \alpha$$

Jelölje $\mathbb{F}$ a t_{n-1} eloszlás eloszlásfüggvényét. Ekkor $\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(-x) = 1 - \alpha$, amiből kapjuk, hogy $\mathbb{F}(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Sajnos az általunk használt táblázat nem úgy definiálja az eloszlásfüggvényt, ahogy mi, hanem egy $G(x) \doteq \mathbb{P}(\xi \geq x)$ ($x \in \mathbb{R}$) módon definiált függvény értékei szerepelnek. Ekkor $\mathbb{F}(x) + G(x) = 1$, Így azt az x értéket keressük, amelyre $G(x) = 1 - \mathbb{F}(x) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$, ($n = 10$, akkor $n - 1 = 9$. Tehát a 9. sort és a 0.25 oszlopot nézem.) Így $x = 2.262$. Ezzel az x értékkel

$$-2.262 < \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} < 2.262$$

teljesül, ezt az egyenlőtlenséget kell μ -re rendezni.

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{2.262 \cdot s_n^*}{\sqrt{n}} \implies \bar{\xi} - \frac{2.262 \cdot s_n^*}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{2.262 \cdot s_n^*}{\sqrt{n}}.$$

Tehát a keresett konfidencia intervallum: $0.8938 < \mu < 1.3462$.

Numerikus feladat. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta. Legyen $n = 10$, $s_n^2 = 0.099$. Szerkesszünk konfidencia-intervallumot σ_0 számára 95%-os megbízhatósági szinttel.

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Mivel a χ_{n-1}^2 eloszlás sűrűségfüggvénye nem szimmetrikus az y tengelyre, sőt a $[0, \infty[$ félegyenesre koncentrálódik, ezért olyan nemnegatív x_a és x_f számokat keresünk, amelyekre

$$\mathbb{P}(x_a < \frac{ns_n^2}{\sigma^2} < x_f) = 1 - \alpha$$

teljesül, de még azt sem tudjuk garantálni, hogy a legrövidebb ilyen tulajdonságú intervallumot megtaláljuk. Ez az egyenlet ekvivalens a következővel, amiben $\mathbb{F}$ jelöli a χ_{n-1}^2 eloszlás eloszlásfüggvényét.

$$\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha$$

Ehhez elegendő, ha az x_a és x_f számokat úgy választjuk meg, hogy

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}$$

teljesül. Megint abba a problémába ütközünk, hogy nem az eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza az általunk használt táblázat, hanem egy olyan G függvény értékeit, amelyre $G(x) + \mathbb{F}(x) = 1$. Így azokat az x_a és x_f számokat keressük, amelyekre

$$G(x_f) = \frac{\alpha}{2}, \quad G(x_a) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $n = 10$, így a táblázat 9. sorát és a 0.25, illetve 0.75 oszlopát kell nézni. Így kapjuk, hogy $x_f = 19.023$ és $x_a = 2.7004$. Ezekkel az értékekkel

$$2.7004 < \frac{ns_n^2}{\sigma^2} < 19.023.$$

A kapott egyenlőtlenséget σ -ra kell rendezni.

$$\frac{1}{19.023} < \frac{\sigma^2}{ns_n^2} < \frac{1}{2.7004} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{ns_n^2}{19.023}} < \sigma < \sqrt{\frac{ns_n^2}{2.7004}}.$$

Tehát a keresett konfidencia intervallum $0.228 < \sigma < 0.7023$.

13. fejezet

Matematikai statisztika III. hipotézisvizsgálat

13.1. Rövid elméleti összefoglaló

13.1.1. Hipotézisvizsgálatok

Egyszerű alap és ellenhipotézis Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ egy minta. A közös eloszlásfüggvény $\mathbb{F}(\cdot; \theta)$, ahol θ az ismeretlen paraméter. $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ a paraméter, (illetve $\Theta \subseteq \mathbb{R}^N$, azaz a paramétertér elemei vektorok). A Θ_0 és a Θ_1 olyan részhalmazai a Θ -nak, amelyeknek diszjunkt uniója a Θ . Hipotéziseket fogalmazunk meg a θ ismeretlen paraméterrel kapcsolatban.

- H_0 **alaphipotézis**: $\theta \in \Theta_0$.
- H_1 **ellenhipotézis**: $\theta \in \Theta_1$.

A továbbiakban csak egyszerű alap és ellenhipotézissel foglalkozunk. Egyszerű alaphipotézisről beszélünk, ha Θ_0 egy elemű, azaz $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ és ennek megfelelően $\Theta_1 = \Theta \setminus \{\theta_0\}$, ahol a θ_0 egy rögzített eleme a paramétertérnek.

Tehát röviden:

- H_0 **egyszerű alaphipotézis**: $\theta = \theta_0$.
- H_1 **ellenhipotézis**: $\theta \neq \theta_0$.

Döntenünk kell arról, hogy az alap, vagy az ellenhipotézist fogadjuk el. A döntés a kritikus tartomány segítségével történik.

A kritikus tartomány. Legyen $\chi = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \text{ mintarealizáció}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a mintatér. (A mintatér komponensei is lehetnek vektorok). A mintatér felosztjuk két részhalmazzra $\chi = C \cup \overline{C}$. A C halmaz a kritikus tartomány. A kritikus tartomány segítségével döntünk.

- $H_a (x_1, \dots, x_n) \in C$, akkor H_0 -t elvetjük és H_1 -et fogadjuk el.
- $H_a (x_1, \dots, x_n) \in \overline{C}$, akkor H_0 -t elfogadjuk.

A próba szignifikancia szintje. Egy próbát α -szintűnek nevezünk, ha

$$\mathbb{P}(\xi \in C | H_0) \leq \alpha.$$

Akár elfogadjuk, akár elvetjük az alaphipotézist, vétethetünk hibákat.

Az első és a másodfajú hiba. Elsőfajú hiba a $\mathbb{P}(\xi \in C | H_0)$ valószínűség, azaz annak a valószínűsége, hogy H_0 -t elvetjük, pedig igaz.

Másodfajú hiba annak a $\mathbb{P}(\xi \in \overline{C} | H_1)$ valószínűség, azaz annak a valószínűsége, hogy H_0 -t elfogadjuk, pedig hamis.

Az első és a másodfajú hiba egyaránt veszélyes. Gondoljunk bele, hogy az alaphipotézisünk az, hogy egy adott gyógyszer gyógyít egy adott betegséget. Elsőfajú hiba esetén a beteg emberek nem szedhetik a hatásos gyógyszert. Másodfajú hiba esetén a beteg embereknek hatástalan gyógyszert kell szedniük.

A szignifikancia szint azt mondja meg, hogy legfeljebb mekkora lehet az elsőfajú hiba. Értéke előre meg van adva. Tipikus értékek: 0.05, 0.01.

Most röviden összefoglaljuk, azokat a próbákat, amelyekkel ezen a gyakorlaton megismerkedünk.

Várható értékre vonatkozó próbák:

- **Egymintás próbák:**

- **Egymintás u próba.** A minta elméleti várható értéke μ és μ_0 egy megadott érték. Alaphipotézisünk $\mu = \mu_0$. Az egymintás u próba akkor alkalmazható, ha ha a minta σ szórása ismert.
- **Egymintás t próba.** A minta elméleti várható értéke μ és μ_0 egy megadott érték. Alaphipotézisünk $\mu = \mu_0$. Az egymintás t próba akkor alkalmazható, ha ha a minta σ szórása nem ismert. Ekkor σ szerepét s_n^* veszi át.

- **Kétmintás próbák:**

- **Kétmintás u próba.** A két minta várható értéke μ_1 és μ_2 . Alaphipotézisünk $\mu_1 = \mu_2$ azaz a két minta várható értékének egyezését vizsgáljuk. A kétmintás u próba akkor alkalmazható, ha ha a két minta σ szórása ismert és megegyezik.

- **Kétmintás t próba.** A két minta várható értéke μ_1 és μ_2 . Alaphipotézisünk $\mu_1 = \mu_2$ azaz a két minta várható értékének egyezését vizsgáljuk. A kétmintás t próba akkor alkalmazható, ha a két minta szórása megegyezik, azonban nem ismert. Az ismeretlen szórások egyezését az **F próbával** ellenőrizzük. Ha a két minta szórása különböző, akkor a várható értékek egyezése Welch próbával ellenőrizhető, azonban a Welch próbát nem ismertetjük ebben a jegyzetben.

Szórásnégyzetre vonatkozó próba:

- **χ^2 próba.** Ez egy egymintás próba, amelyben az ismeretlen szórásra vonatkozik. Ennek megfelelően az alaphipotézisünk: $\sigma = \sigma_0$, ahol σ a minta szórásnégyzete, σ_0 egy megadott érték. A próba használatához nem szükséges ismerni a minta várható értékét.

13.1.2. Az egymintás U-próba

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $\xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta. σ^2 ismert. A μ -re adunk hipotézist σ ismeretében.

Hipotézisek:

- $H_0 : \mu = \mu_0$.
- $H_1 = \mu \neq \mu_0$.

Adott α szignifikancia-szint esetén úgy döntünk, hogy kiszámítjuk az u_t és u_{sz} értéket.

$$u_t = u_{\text{táblázat}}, \quad u_{sz} = u_{\text{számított}}.$$

- **Az u_{sz} számítása:**

$$u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}.$$

- **Az u_t számítása:** Tudjuk, hogy $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, feltéve, hogy $\mu = \mu_0$, így

$$\mathbb{P} \left(-u_t < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < u_t \middle| H_0 \right) = \Phi(u_t) - \Phi(-u_t) = 2\Phi(u_t) - 1 = 1 - \alpha,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Phi(u_t) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

A kapott összefüggés alapján a normális eloszlástáblázatból meghatározzuk az u_t értéket. Például, ha a szignifikancia szint $\alpha = 0.05$. Ekkor $\Phi(u_t) = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$, amiből kapjuk, hogy

$$u_t = 1.960.$$

- **A döntés:** Ha $|u_{sz}| < u_t$, akkor H_0 -t elfogadom (ellenkező esetben elvetem).

Numerikus feladat. A következő feladatokban: $n = 6$, $\mu_0 = 1$, $\sigma = 0.02$.

- $\bar{\xi} = 0.98$. Ekkor $|u_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} = 2.4495$, így $|u_{sz}| \not< u_t$, tehát H_0 -t elvetjük.
- $\bar{\xi} = 0.99$. Ekkor $|u_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} = 1.2247$, így $|u_{sz}| < u_t$, tehát H_0 -t elfogadjuk.
- $\bar{\xi} = 1.01$. Ekkor $|u_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} = 1.2247$, így $|u_{sz}| < u_t$, tehát H_0 -t elfogadjuk.
- $\bar{\xi} = 1.02$. Ekkor $|u_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} = 2.4495$, így $|u_{sz}| \not< u_t$, tehát H_0 -t elvetjük.

13.1.3. Az egymintás t-próba

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $\xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta. σ^2 nem ismert.

Hipotézisek:

- H_0 : $\mu = \mu_0$.
- H_1 : $\mu \neq \mu_0$.

Adott α szignifikancia-szint esetén úgy döntünk, hogy kiszámítjuk az t_t és t_{sz} értéket.

$$t_t = t_{\text{táblázat}}, \quad t_{sz} = t_{\text{számított}}.$$

- **Az t_{sz} kiszámítása:**

$$t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n}.$$

- **A t_t számítása:** Tudjuk, hogy $\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$, feltéve, hogy $\mu = \mu_0$. Jelölje $\mathbb{F}$ a t_{n-1} eloszlásfüggvényét. $\mathbb{F}(t_t) - \mathbb{F}(-t_t) = 2\mathbb{F}(t_t) - 1 = 1 - \alpha$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(t_t) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

A baj azonban az, hogy az általunk használt táblázatban egy olyan G függvény értékei szerepelnek, amelyre $G(x) \doteq \mathbb{P}(\xi \geq x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Így $\mathbb{F}(x) + G(x) = 1$, azaz $\mathbb{F}(x) = 1 - G(x)$. $1 - G(t_t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, amiből kapjuk, hogy

$$G(t_t) = \frac{\alpha}{2}.$$

Az α tipikus értéke 0.05. Így $G(t_t) = 0.025$, ebből kell visszakeresni a t_t értékét.

- **Döntés:** $|t_{sz}| < t_t$, akkor H_0 elfogadom, ellenkező esetben elvetem.

Numerikus feladat. Legyen $n = 6$, $s_n^* = 0.02$, $\mu_0 = 1$, $\alpha = 0.05$. Ekkor $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, így $t_t = 2.262$ (9. sor 0.025 oszlop). Döntsünk az alábbi esetekben:

- $\bar{\xi} = 0.98$. Ekkor $|t_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu_0}{s_n^*} \sqrt{n} = 2.4495$. Így H_0 -t elfogadom.
- $\bar{\xi} = 0.99$. Ekkor $|t_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = 1.2247$. Így H_0 -t elvetem.
- $\bar{\xi} = 1.01$. Ekkor $|t_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = 1.2247$. Így H_0 -t elvetem.
- $\bar{\xi} = 1.02$. Ekkor $|t_{sz}| = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = 2.4495$, Így H_0 -t elfogadom.

13.1.4. A kétmintás u-próba

Adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ($\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$) és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ($\eta_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$) független minták.

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Adott α szignifikancia-szint esetén úgy döntünk, hogy kiszámítjuk az t_t és t_{sz} értéket.

$$u_t = t_{\text{táblázat}}, \quad u_{sz} = t_{\text{számított}}.$$

- **Az u_{sz} kiszámítása:**

$$u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

feltéve, hogy $\mu_1 = \mu_2$.

- **Az u_t kiszámítása:** α szignifikancia szint esetén az u_t -re teljesül, hogy $\Phi(u_t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, így a megfelelő u_t értéket kikeresem a táblázatból.
- **Döntés:** $|u_{sz}| < u_t$, akkor H_0 elfogadom, ellenkező esetben elvetem.

Numerikus feladat. Tegyük fel, hogy $m = 5$, $n = 6$. $\alpha = 0.05$ szignifikancia szintű próbát nézünk. Ekkor - mint ahogy azt korábban már láttuk - $u_t = 1.96$.

- $\bar{\xi} = 0.98$, $\bar{\eta} = 1.02$, $\sigma = 0.03$. Ekkor

$$|u_{sz}| = \left| \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right| = \left| \frac{0.98 - 1.02}{0.03} \sqrt{\frac{6 \cdot 5}{6+5}} \right| = 2.2019 \not< 1.96,$$

tehát H_0 -t elvetem.

b. $\bar{\xi} = 0.99, \bar{\eta} = 1.01, \sigma = 0.03$. Ekkor

$$|u_{sz}| = \left| \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right| = \left| \frac{0.99 - 1.01}{0.03} \sqrt{\frac{6 \cdot 5}{6+5}} \right| = 1.1010 < 1.96,$$

tehát H_0 -t elfogadom.

13.1.5. A kétmintás t-próba

Adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ($\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$) és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ($\eta_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$) független minták. Azonban most a σ^2 közös szórásnégyzet nem ismert.

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Adott α szignifikancia-szint esetén úgy döntünk, hogy kiszámítjuk az t_t és t_{sz} értéket.

$$t_t = t_{\text{táblázat}}, \quad t_{sz} = t_{\text{számított}}.$$

- **Az t_{sz} kiszámítása:**

$$t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{(m-1)s_m^{*2} + (n-1)s_n^{*2}}{m+n-2}}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2},$$

feltéve, hogy $\mu_1 = \mu_2$.

- **Az t_t kiszámítása:** α szignifikancia szint esetén a t_t értékét a $t_{n+m-2}(t_t) = \frac{\alpha}{2}$ összefüggés alapján visszakeressük a táblázatból.
- **Döntés:** $|t_{sz}| < t_t$, akkor H_0 elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

Fontos, hogy a kétmintás t-próba csak akkor alkalmazható, ha $\sigma_1 = \sigma_2$. Ezt a tényt kétmintás F-próbával ellenőrizzük.

13.1.6. Az F-próba

Adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ($\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$) és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ($\eta_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$) független minták.

- $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$.
- $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$.

A döntéshez ki kell számolni a f_{sz} statisztika értékét, illetve a táblázatból ki kell keresni a megadott α szignifikancia értékhez tartozó x_a , x_f értékeket.

- **Az f_{sz} kiszámítása:**

$$f_{sz} = \frac{s_m^{*2}}{s_n^{*2}} \sim F_{m-1, n-1},$$

feltéve, hogy $m > n$.

- **A x_a , x_f érték kiszámítása:** Jelölje $\mathbb{F}$ az $F_{m-1, n-1}$ eloszlás eloszlásfüggvényét. Az x_a , x_f értékeket úgy határozzuk meg, hogy: $\mathbb{F}(x_b) - \mathbb{F}(x_f) = 1 - \alpha$ teljesüljön. Ehhez elegendő, ha

$$\mathbb{F}(x_b) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}.$$

- **Döntés:** $x_a < f_{sz} < x_b$, akkor H_0 elfogadom, ellenkező esetben elvetem.

13.1.7. A khí-négyzet próba

χ^2 -próba: Adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) független minta.

- H_0 : $\sigma = \sigma_0$.
- H_1 : $\sigma \neq \sigma_0$.

A döntéshez ki kell számolni a χ_{sz} statisztikát és a x_a , x_b értékeket, melyek segítségével adott szignifikancia szint esetén döntünk.

- **A χ_{sz} kiszámítása:**

$$\chi_{sz} = \frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

feltéve, hogy $\sigma = \sigma_0$.

- **Az x_a és x_b értékek meghatározása:** Jelölje $\mathbb{F}$ az χ_{n-1}^2 eloszlás eloszlásfüggvényét. Az x_a , x_f értékeket úgy határozzuk meg, hogy: $\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha$, amihez elég, ha

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}.$$

A táblázatban $\chi_{n-1}(x) + \mathbb{F}(x) = 1$, ennek megfelelően a

$$\chi_{n-1}(x_f) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad \chi_{n-1}(x_a) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

összefüggéseknek eleget tevő x_a és x_b értékeket nézzük ki a táblázatból.

- **Döntés:** Ha $x_a < f_{sz} < x_f$, akkor H_0 elfogadom, ellenkező esetben elvetem.

13.1.8. Illeszkedésvizsgálat

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ egy független minta $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel. A hipotézisek:

- $H_0: \mathbb{F} = \mathbb{F}_0.$
- $H_1: \mathbb{F} \neq \mathbb{F}_0.$

A döntéshez ki kell számolnunk a χ_{sz} és χ_t értékeket.

Felosztjuk a számegeyenest n részre: osztópontok

$$-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = +\infty.$$

A felosztás elejéről illetve a végéről elhagyjuk azokat a részintervallumokat, amelyekbe nem esik mintaelem.

Az intervallumba esés valószínűsége H_0 feltételezése esetén az $\mathbb{F}_0$ eloszlásfüggvény segítségével

$$\mathbb{P}(a_{i-1} \leq \xi < a_i) = \mathbb{F}_0(a_i) - \mathbb{F}_0(a_{i-1}) = p_i$$

módon számolható.

Jelölje az η_i az i . intervallumba eső mintaelemek számát. Ekkor

$$\sum_{i=1}^k \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi_{k-1}^2$$

feltéve, hogy $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0$, azaz H_0 igaz. Ekkor már meg is van a döntéshez szükséges χ_{sz} és χ_t értékünk.

- **A χ_{sz} számolása:**

$$\chi_{sz} = \sum_{i=1}^k \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i}.$$

- **A χ_t számolása:** A fentiek alapján tudjuk, hogy

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i} < \chi_t \middle| H_0 \right) = 1 - \alpha.$$

Azonban nekünk most nem ilyen táblázatunk van. A komplementer esemény valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i} \geq \chi_t \middle| H_0 \right) = \alpha,$$

így a megfelelő χ_t érték a χ^2 táblázatból kikereshető: $k-1$. sor (k volt a részintervallumok száma) és α oszlop.

- **A döntés:** $\chi_{sz} < \chi_t$, akkor H_0 elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

Numerikus feladat: Szabályos-e a dobókocka? Egy dobókockával 100 dobást végeztünk. Az egyes dobások gyakoriságait az alábbi táblázat tartalmazza.

1	2	3	4	5	6
7	26	21	18	15	13

Döntsünk $\alpha = 0.05$ szignifikancia szint esetén, arról, hogy szabályos-e a dobókocka, azaz H_0 jelenti azt, hogy szabályos.

Ekkor $\mathbb{F}_0$ egy olyan eloszlásfüggvény, amely az 1, 2, ..., 6 számok mindegyikén $\frac{1}{6}$ -ot ugrik. Tekintsük a

$$a_0 = 0.5, \quad a_1 = 1.5, \quad a_2 = 2.5, \quad a_3 = 3.5, \quad a_4 = 4.5, \quad a_5 = 5.5, \quad a_6 = 6.5.$$

beosztást. Ekkor

$$p_i = \mathbb{P}_0(a_i) - \mathbb{P}_0(a_{i-1}) = \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Így $np_i = \frac{1}{6} \cdot 100 = \frac{100}{6}$ minden $i = 1, 2, \dots, 6$ esetén.

$$\begin{aligned} \chi_{sz} &= \sum_{i=1}^6 \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i} = \\ &= \frac{6}{100} \left[\left(18 - \frac{100}{6}\right)^2 + \left(26 - \frac{100}{6}\right)^2 + \left(21 - \frac{100}{6}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(17 - \frac{100}{6}\right)^2 + \left(15 - \frac{100}{6}\right)^2 + \left(23 - \frac{100}{6}\right)^2 \right] = \\ &= 13.04. \end{aligned}$$

Másrészt $\alpha = 0.05$, szabadsági fok $k - 1 = 5$, így a táblázatból kapjuk, hogy $\chi_t = 16.750$ $\chi_{sz} < \chi_t$ teljesül, így elfogadjuk H_0 -t.

13.1.9. Normális eloszlásból származtatott eloszlások

1. **χ^2 eloszlás:** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ függetlenek. Ekkor $\xi_1^2, \dots, \xi_n^2 \sim \chi_n^2$ (n szabadságfokú χ^2 eloszlás)
2. **t vagy Student eloszlás:** $\xi_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, χ_n^2 függetlenek. Ekkor $\frac{\xi_0}{\sqrt{\chi_n^2}} \sqrt{n} \sim t_n$. William Gosset ír üzletember dolgozta ki Dublinban.
3. **F eloszlás:** χ_n^2, χ_m^2 független eloszlások. $\frac{\chi_n^2}{\chi_m^2} \sim F_{n,m}$ (n, m szabadságfokú F eloszlás) vagy Snedecor eloszlás.