

Valószínűségszámítás és
Matematikai Statisztika
feladatok

Bevezetés

Hálásan köszönöm Glavositsné Holló Anikó segítségét.
Hallhatóimnak sikeres felkészülést kívánok.

Miskolc, 2025. szeptember 01.

Glavosits Tamás

Tartalomjegyzék

1. Feladatok	1
1. Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező	1
1.1. Kombinatorika	1
1.2. Klasszikus valószínűségi mező	2
2. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül, visszatevéssel, geometriai valószínűség, műveletek eseményekkel	4
2.1. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül	4
2.2. Golyóhúzás urnából visszatevéssel	4
2.3. Geometriai valószínűség	4
2.4. Műveletek eseményekkel	5
2.5. Poincare formula (szita-formula)	5
3. Bayes formula, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel, események páronkénti és teljes függetlensége	6
3.1. Bayes formula, teljes eseményrendszer, Bayes tétel	6
3.2. Események függetlensége	7
4. Várható érték és szórásnégyzet	9
4.1. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete	9
4.2. Abszolút folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete	9
5. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók	11
5.1. Hipergeometrikus és binomiális eloszlások	11
5.2. Geometriai és negatív binomiális eloszlások	11
5.3. Poisson eloszlás	12
6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók	13
6.1. Egyenletes eloszlás	13
6.2. Exponenciális eloszlás	13
6.3. Normális eloszlás	14
6.4. Csonkolt normális eloszlás	14
6.5. Lognormális eloszlás	15
7. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók	16

7.1.	Feltételes várható érték	18
8.	Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók	19
8.1.	Függetlenség és korrelálatlanság	19
8.2.	Többdimenziós egyenletes eloszlás	20
8.3.	Többdimenziós normális eloszlás	21
9.	Egyenlőtlenségek, a nagy számok törvényei, központi határeloszlás tétel	23
9.1.	Csebisev egyenlőtlenség	23
9.2.	Bernoulli-féle nagy számok törvénye	23
9.3.	Moivre-Laplace tétel	23
9.4.	Központi határeloszlás tétel	24
10.	Statisztika I., Pontbecslések	25
10.1.	Alapstatisztikák	25
10.2.	Maximum likelihood módszer	25
11.	Statisztika II., Intervallumbecslések	26
11.1.	$1 - \alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum	26
12.	Statisztika III., Hipotézisvizsgálat	27
12.1.	Egymintás u-próba	27
12.2.	Egymintás t-próba	27
12.3.	Kétmintás u-próba	27
12.4.	Illeszkedésvizsgálat	27
2.	Megoldások	28
1.	Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező	28
1.1.	Kombinatorika	28
1.2.	Klasszikus valószínűségi mező	30
2.	Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül, visszatevéssel, geometriai valószínűség, műveletek eseményekkel	34
2.1.	Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül	34
2.2.	Golyóhúzás urnából visszatevéssel	34
2.3.	Geometriai valószínűség	35
2.4.	Műveletek eseményekkel	37
2.5.	Poincare formula (szita-formula)	38
3.	Bayes formula, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel, események páronkénti és teljes függetlensége	40
3.1.	Bayes formula, teljes eseményrendszer, Bayes tétel	40
3.2.	Események függetlensége	42
4.	Várható érték és szórásnégyzet	46
4.1.	Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete	46
4.2.	Abszolút folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete	48

5.	Nevezetes diszkrét valószínűségi változók	55
5.1.	Hipergeometrikus és binomiális eloszlások	55
5.2.	Geometriai és negatív binomiális eloszlások	56
5.3.	Poisson eloszlás	59
6.	Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók	61
6.1.	Egyenletes eloszlás	61
6.2.	Exponenciális eloszlás	63
6.3.	Normális eloszlás	65
6.4.	Csonkolt normális eloszlás	67
6.5.	Lognormális eloszlás	69
7.	Diszkrét valószínűségi vektorváltozók	72
7.1.	Feltételes várható érték	90
8.	Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók	91
8.1.	Függetlenség és korrelálatlanság	91
8.2.	Többdimenziós egyenletes eloszlás	99
8.3.	Többdimenziós normális eloszlás	105
9.	Egyenlőtlenségek, a nagy számok törvényei, központi határeloszlás tétel	115
9.1.	Csebisev egyenlőtlenség	115
9.2.	Bernoulli-féle nagy számok törvénye	115
9.3.	Moivre-Laplace tétel	116
9.4.	Központi határeloszlás tétel	118
10.	Statisztika I., Pontbecslések	120
10.1.	Alapstatisztikák	120
10.2.	Maximum likelihood módszer	120
11.	Statisztika II., Intervallumbecslések	124
11.1.	$1 - \alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum	124
12.	Statisztika III., Hipotézisvizsgálat	127
12.1.	Egymintás u-próba	127
12.2.	Egymintás t-próba	127
12.3.	Kétmintás u-próba	128
13.	Illeszkedésvizsgálat	128

1. fejezet

Feladatok

1. Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

1.1. Kombinatorika

Ha egy dobókockával 1-szer, 2-szer, 3-szor dobunk, és a dobott számok összegét vizsgáljuk, az ekvivalens azzal, hogy 1, 2, 3, (...) dobókockával dobunk és a dobott számok összegét vizsgáljuk. A következő feladatban az első megfogalmazást fogjuk követni. A dobókocka a továbbiakban szabályos dobókockát jelent.

1. Feladat. • *Hányféle sorrendje van az A, A, B, B, B, C, C betűknek?*

2. Feladat. • *7 vendég érkezik egy kempingbe. A vendégeket 3 faházban tudják elhelyezni, melyek közül az első 2 ágyas, a második 3 ágyas, a harmadik 2 ágyas. Hányféleképpen lehet elhelyezni a vendégeket a faházban, ha az elhelyezésnél csak az számít, hogy melyik vendég melyik faházba kerül?*

3. Feladat. • *Hányféleképpen lehet 4 egyforma levelet 5 beszámozott rekeszbe rakni, ha minden rekeszbe*

a. legfeljebb egy levél kerülhet;

b. több levél is kerülhet.

4. Feladat. • *Hányféleképpen lehet 4 db beszámozott levelet 5 beszámozott rekeszbe elhelyezni, ha minden rekeszbe*

a. legfeljebb egy levél kerülhet;

b. több levél is kerülhet.

5. Feladat. • Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 5-féle cukorkát tölt zsákokkába. Minden zsákokkába 4 db-ot tölt véletlenszerűen. Hányféle zsákoska keletkezhet a töltés során?

6. Feladat. *

a. Judo versenyen, a díjkiosztáson a 4 díjazott még 1-1 cukorkát is kap. A cukorkák 3 félék (A, B, C). A díjkiosztó mindhárom cukorkaféleségből 2-2 darabot tart a zsebében, azaz 6 darabot. Hányféleképpen tudja kiosztani a 4 cukorkát?

b. Van r db különböző betű, ezek L_1, L_2, \dots, L_r . Az L_1 betűkből k_1 , az L_2 betűkből k_2, \dots , az L_r betűkből k_r darab van, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Hányféleképpen képezhető k tagú sorozat az n betűkből, ha $0 < k \leq n$.

(Írjon fel rekurziót. A kapott rekurzió segítségével is oldja meg az a. feladatot.)

1.2. Klasszikus valószínűségi mező

7. Feladat. a. Egy dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám legalább 2, de legfeljebb 4. (A esemény)

b. Egy dobókockával 2-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 4, de legfeljebb 8. (B esemény)

c. Egy dobókockával 3-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 és 12 közé esik. (C esemény)

8. Feladat.

a. Egy dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám osztható-e 2-vel vagy 3-mal?

b. Egy dobókockával 2-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 2-vel vagy 3-mal?

c. Egy dobókockával 3-szor, 4-szer, ... dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 2-vel vagy 3-mal?

A 32 lapos magyar kártya:

4 szín: piros - P, tők - T, makk - M, zöld - Z;

8 figura: VII:=7, VIII:=8, IX:=9, X:=10, alsó:=a, felső:=f, király:=k, ász:=d (disznó).

9. Feladat. 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kihúzott első lap piros, B azt az eseményt, hogy a kihúzott harmadik lap piros. Határozza meg az A és a B események valószínűségét.

10. Feladat. Adottak a $0, 0, 1, 1, 2$ számjegyek. Ezekből képezzük az összes lehetséges 5-tagú sorozatokat. Ezek a sorozatok a 10-es számrendszerben egy szám számjegyei. Tekintsük az alábbi eseményeket:

A := 5-jegyű számot kapunk;

B := 5-jegyű páros számot kapunk;

C := 5-jegyű páratlan számot kapunk.

Határozzuk meg az A, B, C események valószínűségét.

11. Feladat. • Egy urnában van 6 golyó beszámozva 0-tól 5-ig. Visszatevés nélkül kihúzunk 3-mat. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok a húzás sorrendjében a számjegyek

- egy 3-jegyű szám számjegyei; (A esemény)
- egy 3-jegyű páros szám számjegyei (B esemény)
- egy 3-jegyű páratlan szám számjegyei (C esemény).

12. Feladat. • Egy urnában van 6 golyó beszámozva 0-tól 5-ig. Visszatevéssel kihúzunk 3-mat. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok a húzás sorrendjében a számjegyek

- egy 3-jegyű szám számjegyei; (A esemény)
- egy 3-jegyű páros szám számjegyei (B esemény)
- egy 3-jegyű páratlan szám számjegyei (C esemény).

2. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül, visszatevéssel, geometriai valószínűség, műveletek eseményekkel

2.1. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül

1. Feladat. *Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak. Visszatevés nélkül kihúzzunk 4 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott piros golyók száma legfeljebb 2, ha*

- a. a piros golyók száma 3, a fehér golyók száma 6;
- b. a piros golyók száma 12, a fehér golyók száma 24;
- c. a piros golyók száma 30, a fehér golyók száma 60;
- d. a piros golyók száma 300, a fehér golyók száma 600.

2. Feladat. • *Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 10 piros és 20 fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzzunk 10 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül legalább 3 piros?*

2.2. Golyóhúzás urnából visszatevéssel

3. Feladat. • *Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 1 piros és 2 fehér golyó. Visszatevéssel kihúzzunk 4 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott piros golyók száma legfeljebb 2?*

4. Feladat. • *Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 10 piros és 20 fehér golyó. Visszatevéssel kihúzzunk 10 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül legalább 3 piros?*

2.3. Geometriai valószínűség

5. Feladat. • *Két ember véletlenszerűen megjelenik egy kávéházban dél és délután 1 óra között, ahol 20 percet töltenek el. Mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?*

6. Feladat. • *Egy félkörre ledobunk két pontot: A-t és B-t véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pontot összekötő szakasz hossza egyenlő a félkör sugarával?*

7. Feladat. • *Két pontot: x -et és y -t ledobunk véletlenszerűen a $[0, 1]$ intervallumra. A két pont a $[0, 1]$ intervallumot 3 szakaszra bontja. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szakaszokból háromszög szerkeszthető?*

2.4. Műveletek eseményekkel

8. Feladat. Legyenek X, Y, Z események, és definiáljuk az A, B, C, D, E, F eseményeket az alábbi módon:

- a. A bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 1 következik be;
 B bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül pontosan 1 következik be;
 C bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legalább 1 következik be;
- b. • D bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 2 következik be;
 E bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül pontosan 2 következik be;
 F bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legalább 2 következik be;

2.5. Poincare formula (szita-formula)

9. Feladat. Hófehérke mind a hét törpének ír egy-egy levelet. A borítékok és a levelek egyaránt névre szólóak. Jelölje p_7 annak a valószínűségét, hogy egyik törpe sem a neki szóló levelet kapja meg.

- a. Határozza meg a p_7 értékét.
- b. Hét törpe helyett n törpével számolva mennyi a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ határérték?

3. Bayes formula, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel, események páronkénti és teljes függetlensége

3.1. Bayes formula, teljes eseményrendszer, Bayes tétel

1. Feladat. • Van 3 gép. Tekintsük a következő eseményeket:

$B_i :=$ a termék az i -edik gépen készül ($i = 1, 2, 3$);

$A :=$ egy termék selejtes.

Továbbá ismert, hogy $\mathbb{P}(B_1) = 0.1$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.2$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.7$; illetve a selejtarányok az egyes gépeken 0.02, 0.01, 0.005.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék selejtes;
- Kiválasztunk egy terméket, ami selejtesnek bizonyul. Mennyi a valószínűsége, hogy a termék az első, a második, illetve a harmadik gépsoron készült?

2. Feladat. (Többfázisos kísérletek)

a. Egy urnában van 4 piros és 6 fehér golyó (összesen 10 golyó). Kihúzzunk egy golyót, amit vissza is teszünk. Ha a kihúzott golyó piros volt, berakunk az urnába még 5 piros golyót, ha fehér volt, még 3 fehér golyót. Ezt követően megint húzzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- másodszorra piros golyót húzzunk?
- az első húzáskor piros golyót húzzunk, feltéve, hogy másodszor piros golyót húzzunk.

b. Egy urnában van s piros és $N - s$ fehér golyó, összesen N golyó; kihúzzunk egy golyót, amit vissza is rakunk. Ha a kihúzott golyó piros volt, berakunk az urnába még k piros golyót, ha fehér volt, akkor még k fehér golyót. Ezt követően megint húzzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- először piros golyót húzzunk?
- másodszor piros golyót húzzunk.

3. Feladat. • Van 3 doboz, mindegyikben 4 golyó. Az első dobozban van 1 piros és 3 fehér golyó, a második dobozban van 2 piros és 2 fehér golyó, a harmadik dobozban van 3 piros és 1 fehér golyó. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, majd húzzunk belőle egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy piros golyót húzzunk?

4. Feladat. • A betegek 70%-át olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 80%-os gyógyulási arányt 85%-ra javítja. Kiválasztva egy gyógyult beteget, mennyi a valószínűsége, hogy az új kezelésben részesült?

5. Feladat. 32 lapos magyar kártyából húzunk két lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok azonos színűek, ha a laphúzás

- a. visszatevés nélküli;
- b. visszatevéses.

6. Feladat. Egy dobozban van 1 piros, 2 kék, 3 zöld golyó, összesen 6 golyó. Kihúzunk 2 golyót véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott két golyó különböző színű, ha a golyóhúzás

- a. visszatevés nélküli;
- b. visszatevéses.

3.2. Események függetlensége

7. Feladat. • Egy egér 3 folyosón keresztül tud eljutni egy sajthoz. Mindhárom folyosón 3 ajtó található, amelyek egymástól teljesen függetlenül 60% valószínűséggel vannak nyitva. Az ajtók beállnak egy csukott vagy nyitott állapotba, és úgy maradnak. Ha az egérke lát olyan folyosót, amelyen minden ajtó nyitva van, átszalad a sajthoz. Mennyi a valószínűsége, hogy az egérke el tud jutni a sajthoz?

8. Feladat. Az X és Y események függetlenek $\mathbb{P}(X) = 0.6$, $\mathbb{P}(Y) = 0.85$. Mennyi a valószínűsége, hogy az X és Y események közül

- a. egyik sem következik be;
- b. legfeljebb az egyik következik be;
- c. legalább az egyik következik be;
- d. mindkettő bekövetkezik.

9. Feladat. Az X, Y, Z események teljesen függetlenek, $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 0.6$. és definiáljuk az A, B, C, D, E, F eseményeket az alábbi módon:

- a. A bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 1 következik be;
 B bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül pontosan 1 következik be;
 C bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legalább 1 következik be;
- b. • D bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 2 következik be;
 E bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül pontosan 2 következik be;
 F bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legalább 2 következik be;

10. Feladat. 32 lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott lap piros, a B az az esemény, hogy a kihúzott lap ász.

a. függetlenek-e az A és a B események?

b. A húzás előtt eltávolítjuk a pakliból a zöld ászt. Függetlenek maradnak-e az A és B események?

11. Feladat. 32 lapos magyar kártyából kihúzunk 3 lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt az eseményt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Függetlenek-e az A és B események?

12. Feladat. Ketten dobnak kosárra. Az A játékos 0.6, a B játékos 0.8 valószínűséggel talál bele a kosárba. A játék addig tart, amíg valamelyik nem talál bele a kosárba. Mennyi a valószínűsége, hogy

a. \bullet A kezd és A nyer;

b. A kezd és B nyer;

c. B kezd és A nyer.

d. B kezd és B nyer;

4. Várható érték és szórásnégyzet

4.1. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

1. Feladat. • Egy lezser hallgató maximum 4-szer vizsgálhat és minden vizsgán 0.25 valószínűséggel sikeres. Átlagosan hányszor vizsgázik egy lezser hallgató?

2. Feladat. Két játékos dob kosárra, A és B. Az A játékos 0.6 a B játékos 0.8 valószínűséggel talál a kosárba. Az A játékos kezd. A játék véget ér, ha valamelyik játékos betalál a kosárba, de maximum 4-szer dobnak.

a. Átlagosan hány dobásig tart a játék?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az A játékos, illetve a B játékos nyer?

3. Feladat. Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor. Mennyi a fejdobások számának várható értéke és szórásnégyzete?

4. Feladat. • Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor. Mennyi a dobott számok összegének várható értéke és szórásnégyzete?

5. Feladat. • Egy játékos és a bank megpörgeti a szabályos pörgettyűt, amelyen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat lehet kipörgetni. A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget ki, mint a bank. Minden más esetben a bank nyer. Ha a játékos nyer, 2000 Ft-ot kap. Hány forintot kell a játék előtt a játékosnak befizetnie, hogy a bank játékonkénti átlagos nyeresége 200 Ft legyen?

6. Feladat. Két szabályos pörgettyűvel pörgetünk: egy pirossal és egy kézzel. Mindkét pörgettyűn az 1, 2, 3 számokat lehet kipörgetni. A kipörgetett számokat jelölje ξ_1 és ξ_2 . Határozza meg a $\xi := \min(\xi_1, \xi_2)$ és az $\eta := \max(\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi változók

- eloszlását,
- várható értékét,
- szórásnégyzetét.

4.2. Abszolút folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

7. Feladat. • Legyen egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} C(-x^2 + 1), & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a C paraméter értékét, a ξ várható értékét, a mediánját és szórásnégyzetét, valamint a $\mathbb{P}(\xi < \mathbb{E}(\xi))$ valószínűségeit.

8. Feladat. • Legyen egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ C(x^2 + 2x), & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

Határozza meg a C paraméter értékét, a ξ valószínűségi változó várható értéket és $\mathbb{E}(29\xi - 680)$ értéket.

9. Feladat. Ledobunk véletlenszerűen két pontot, x -et és y -t a $[0, 1]$ intervallumra. Jelölje ξ az x és az y pontok távolságát. Határozza meg a ξ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

10. Feladat. • Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység oldalhosszú négyzetre. Jelölje ξ a ledobott pontnak az egységnyi négyzet határától vett távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

11. Feladat. Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység sugarú körlemezre. Jelölje ξ a ledobott pontnak a körlemez határától mért távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét, második momentumát és szórásnégyzetét.

12. Feladat. Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység oldalhosszúságú kockába. (A ledobott pont a kocka határára és a belsejébe is eshet.) Jelölje ξ a ledobott pontnak a kocka határától mért távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

13. Feladat. Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység sugarú körlemezre. Jelölje ξ a ledobott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

14. Feladat. Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység sugarú gömbbe. (A ledobott pont eshet a gömb felszínére, de a belsejébe is.) Jelölje ξ a ledobott pontnak a gömb középpontjától mért távolságát. Határozza meg a ξ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét, második momentumát és szórásnégyzetét.

5. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

5.1. Hipergeometrikus és binomiális eloszlások

1. Feladat. • Egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Mennyi a valószínűsége, hogy 8 kísérletből

- a. legfeljebb 2-szer következik be,
- b. legfeljebb 6-szor következik be.
- c. legalább 6-szor következik be az A esemény.

2. Feladat. • Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 8 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 3 lány. A bírálóbizottság ezután sorsolással választott ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

3. Feladat. • Egy rejtvénypályázaton 4 díjat sorsolnak ki a helyes megfejtők között. (Egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat.) 50 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 20 Miskolcra. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

5.2. Geometriai és negatív binomiális eloszlások

4. Feladat. a. Adja meg a p paraméterű geometriai eloszlású (A változat) valószínűségi változó

- eloszlását;
- generátorfüggvényét;
- várható értékét és szórásnégyzetét.

b. Adja meg a p paraméterű r -ed rendű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó

- eloszlását;
- generátorfüggvényét;
- várható értékét és szórásnégyzetét.

5. Feladat. • Szabályos érmevel dobások sorozatát végezzük. A szabályos érme azt jelenti, hogy $\text{fej} = \frac{1}{2}$ és $\text{írás} = \frac{1}{2}$.

- a. átlagosan hány dobás kell ahhoz, hogy először fej dobást dobjunk?
- b. átlagosan hány dobás kell ahhoz, hogy harmadszor is fejet dobjunk?

6. Feladat. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros golyó és $N - s$ fehér. Addig húzunk visszatevés nélkül, amíg az első piros golyót ki nem húzzuk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát.*

a. *Határozza meg a ξ eloszlását.*

b. *Határozza meg a ξ várható értékét és szórásnégyzetét $N = 7$ és $s = 3$ speciális esetben.*

7. Feladat. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros golyó és $N - s$ fehér. Addig húzunk visszatevés nélkül, amíg az összes piros golyót ki nem húzzuk. Jelölje ξ a szükséges húzások számát.*

a. *Határozza meg a ξ eloszlását.*

b. *Határozza meg a ξ várható értékét és szórásnégyzetét $N = 7$ és $s = 3$ speciális esetben.*

5.3. Poisson eloszlás

8. Feladat. • *Egy szervízbe műszakonként átlagban 5 gépkocsi jelentkezik javításra és számuk Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy egy nap legalább 4, de legfeljebb 7 gépkocsit javítanak?*

9. Feladat. • *Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, és egy szeletben átlag 9 szem mazsola van. Mi a valószínűsége, hogy egy szeletben legalább 7, de legfeljebb 10 szem mazsola van?*

10. Feladat. • *Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?*

6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

6.1. Egyenletes eloszlás

1. Feladat. *Egy kör sugarú egyenletes eloszlású a $(1, 1.4)$ intervallumban. Számítsa ki a kör területének, mint valószínűségi változónak a mediánját!*

2. Feladat. *Legyen ξ lószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[-2.40, 2.40]$ intervallumon. Számítsa ki a $\mathbb{P}(2\xi + 1 < 1.6)$ valószínűséget.*

3. Feladat. • *Számítsa ki az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét, ha*

a. $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$;

b. $\xi \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

4. Feladat. • *Legyen $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$; $\alpha > 0$; $\beta \in \mathbb{R}$.*

a. *Határozza meg az $\eta := \alpha\xi + \beta$ valószínűségi változó eloszlását;*

b. *Hogyan kell megválasztani az α és β értékét úgy, hogy $\eta = \mathcal{U}(0, 1)$ legyen.*

6.2. Exponenciális eloszlás

5. Feladat. • *Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciálisnak feltételezve mi a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?*

6. Feladat. *Egy gép élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 9 év átlagos élettartammal. Adja meg azt a legnagyobb K számot, amelyre még igaz, hogy egy gép legalább 0.85 valószínűséggel működőképes lesz K évig.*

7. Feladat. • *Egy gép n olyan alkatrészt tartalmaz, melyek meghibásodása esetén a gép leáll. Az egyes alkatrészek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paraméterekkel. Jelölje η azt az időtartamot, amely a gép beindításától az első leállitásáig eltelik. Számítsa ki az η sűrűségfüggvényét és várható értékét.*

8. Feladat. *A ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 1.80. Számítsa ki azt az m értéket, amelytől jobbra és balra megegyezik az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye alatti terület.*

9. Feladat. • *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású 0.30 szórással. Határozza meg az $\mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7)$ értékét.*

10. Feladat. • *A gépjárművezetői vizsgán a vizsga időtartama (percben mérve) egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 0.02 \cdot e^{-0.02x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Az előttünk lévő már 13 perce vezet. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 percen belül nem fejezi be a vizsgát?

11. Feladat. • *Egy üzletbe átlag 29 vevő érkezik és számuk Poisson eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.5 perc?*

6.3. Normális eloszlás

12. Feladat. • *Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 50 mm. Határozza meg a munkadarab hosszának a szórását, ha 0.85 annak a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 50.05 mm.*

13. Feladat. • *Legyen ξ egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, amely 0.42 valószínűséggel vesz fel értéket a $] - 5.8, 5.8[$ intervallumon. Számítsa ki a $\mathbb{P}(0.5 \leq 1.7\xi < 1.7)$ valószínűséget.*

14. Feladat. *Henger alakú alkatrészeket gyártunk. Az átmérő m_1 mm várható értékű és σ_1 mm szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a hossz m_2 mm várható értékű és σ_2 mm szórású valószínűségi változó. Egy alkatrész jó, ha a hossza beleesik a várható értékének $3\sigma_1$ sugarú környezetébe, és az átmérője a várható értékének $2\sigma_2$ sugarú környezetébe. Mennyi a valószínűsége, hogy*

- a. *egy tetszőlegesen kiválasztott alkatrész jó;*
- b. *két alkatrészt véletlenszerűen kiválasztva legalább az egyik jó (az egyszerűség kedvéért a mintavétel visszatevéses).*

15. Feladat. • *Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó és $\alpha \in (0, 1)$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Határozzuk meg azt a K_α számot, amelyre $\mathbb{P}(\xi > K_\alpha) = \alpha$. Legyenek speciálisan $m = 20$, $\sigma^2 = 4$. Határozzuk meg a K_α értékét $\alpha = 0.90, 0.95, 0.99$ esetén.*

6.4. Csonkolt normális eloszlás

16. Feladat. *Biztosítótársaságok adatai alapján megállapítható, hogy a kár pénzben kifejezett nagysága olyan valószínűségi változó, amelyet az $m = 0$, $\sigma^2 > 0$ paraméterű normális eloszlás pozitív értékekre csonkított eloszlása jellemez.*

- a. Írjuk fel a csonkított eloszlás sűrűségfüggvényét,
- b. Számítsuk ki a kárösszeg várható értékét,
- c. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a keletkezett kár egy adott $a \in \mathbb{R}_+$ összegnél nagyobb lesz.

17. Feladat. Egy biztosítótársaságnál a kárösszeg (csonkolt normális eloszlású valószínűségi változó $m = 0$ és σ^2 eloszlással) várható értéke 500000 Ft.

- a. Határozza meg a σ értéket.
- b. Mennyi a valószínűsége, hogy a kárösszeg nagyobb $a \in \mathbb{R}$ számnál, ahol $a = 300000$ Ft, illetve 700000 Ft.

6.5. Lognormális eloszlás

18. Feladat (Függvénytranszformáció hatása az eloszlás és sűrűségfüggvényre). Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó \mathbb{F}_ξ eloszlásfüggvénnyel és f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$ egy olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre a ξ értékkészlete része D_g -nek. Határozza meg a $\zeta = g(\xi)$ eloszlás és sűrűségfüggvényét.

19. Feladat. Legyen ζ lognormális eloszlású valószínűségi változó, azaz $\zeta = e^\xi$, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Határozzuk meg a ζ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha ξ lognormális eloszlású valószínűségi változó (m és σ^2 paraméterekkel), akkor a $\zeta \sim a\xi^n$ szintén lognormális eloszlású, ahol $a > 0$ és $n \geq 1$.

21. Feladat. Cementpor szemcséinek átmérője m , σ^2 paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott cementpor szemcse átmérője az $]a, b[$ intervallumba esik?

7. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

1. Feladat. • Két dobókockával dobunk egy pirossal és egy kékkel. Jelölje ξ_1, ξ_2 a két dobott számot. Határozza meg

- $A \xi = \min(\xi_1, \xi_2)$ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét;
- Az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét;
- A (ξ, η) együttes eloszlását, a $\text{cov}(\xi, \eta)$ és az $r(\xi, \eta)$ értékeket.

2. Feladat. • Két pörgettyűvel pörgetünk: egy pirossal és egy kékkel. Mindkét pörgettyűvel az 1, 2, 3, számokat lehet kipörgetni. Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék pörgettyűvel kipörgetett számot. Határozza meg a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlását, valamint a $\text{cov}(\xi, \eta)$ és az $r(\xi, \eta)$ értékét, ha

- $\xi := \xi_1, \eta := \min(\xi_1, \xi_2)$;
- $\xi := \xi_1, \eta := \max(\xi_1, \xi_2)$;
- $\xi := \min(\xi_1, \xi_2), \eta := \max(\xi_1, \xi_2)$.

3. Feladat. • Definiáljuk a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót az alábbi táblázat segítségével:

(ξ, η)	1	3	5
2	0.1	0.2	0.1
3	0.1	0.4	0.1

- Mutassuk meg, hogy a ξ, η valószínűségi változók nem függetlenek, de korrelálatlanok;
- Határozzuk meg a $\mathbb{D}^2(\xi), \mathbb{D}^2(\eta)$, és $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ értékét;
- Határozzuk meg az $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ értékét;
- Határozzuk meg a ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós függvényét.
- Határozzuk meg az η -nak a ξ -re vonatkozó regressziós függvényét.

4. Feladat. • Legyenek $\xi \in \{U, V\}$ ($U \neq V$) és $\eta \in \{W, Z\}$ ($W \neq Z$) valószínűségi változók. Igazolja, hogyha ξ és η korrelálatlanok, akkor függetlenek.

5. Feladat. • A (ξ, η) együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

	0	1	2
0	0.08	0.12	0.2
1	12	0.18	3

Határozza meg az $\mathbb{E}(\xi), \mathbb{D}^2(\xi), \mathbb{E}(\eta), \mathbb{D}^2(\eta), \text{cov}(\xi, \eta)$ értékét.

6. Feladat. • Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó az alábbi táblázattal definiálva:

(ξ, η)	0	1
0	α	0
1	0	$1 - \alpha$

ahol $\alpha \in]0, 1[$. Határozza meg az $r(\xi, \eta)$ értékét.

7. Feladat. • Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó az alábbi táblázattal definiálva:

(ξ, η)	0	1
0	0	α
1	$1 - \alpha$	0

Határozza meg az $r(\xi, \eta)$ értékét.

8. Feladat. Egy urnában van 3 golyó, melyek közül 1 piros és 2 fehér. Visszatevés nélkül kihúzzunk 2 golyót. Jelölje ξ a kihúzott piros, η a kihúzott fehér golyók számát. Határozza meg a $\mathbb{E}(\xi, \eta)^T$ vektort, a $\text{var}((\xi, \eta)^T)$ mátrixot és az $r(\xi, \eta)$ értékét az együttes eloszlás alapján.

9. Feladat. Egy urnában van 3 golyó, melyek közül 1 piros és 2 fehér. Visszatevéssel kihúzzunk 2 golyót. Jelölje ξ a kihúzott piros, η a kihúzott fehér golyók számát. Határozza meg a $\mathbb{E}(\xi, \eta)^T$ vektort, a $\text{var}((\xi, \eta)^T)$ mátrixot és az $r(\xi, \eta)$ értékét az együttes eloszlás alapján.

10. Feladat. Egy urnában van 4 golyó, melyek közül 2 piros, 1 kék, 1 zöld. Visszatevés nélkül kihúzzunk 2 golyót. Jelölje X a kihúzott piros, Y a kihúzott kék, Z a kihúzott zöld golyók számát.

a. Határozza meg a (X, Y) valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlását.

b. Az ismert képletek alkalmazásával határozza meg az $\mathbb{E}([X, Y, Z]^T)$ vektort és a $\text{var}([X, Y, Z]^T)$ variancia mátrixát.

11. Feladat. Egy urnában van 4 golyó, melyek közül 2 piros, 1 kék, 1 zöld. Visszatevés nélkül kihúzzunk 2 golyót. Jelölje X a kihúzott piros, Y a kihúzott kék, Z a kihúzott zöld golyók számát.

a. Határozza meg a (X, Y) valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlását.

b. Az ismert képletek alkalmazásával határozza meg az $\mathbb{E}([X, Y, Z]^T)$ vektort és a $\text{var}([X, Y, Z]^T)$ variancia mátrixát.

12. Feladat. Legyenek ξ_1, ξ_2, ξ_3 független valószínűségi változók $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ eloszlásfüggvényekkel. Jelölje \mathbb{F}_{\min} a $\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ és \mathbb{F}_{\max} a $\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényei. Fejezze ki az \mathbb{F}_{\min} és \mathbb{F}_{\max} eloszlásfüggvények az $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ eloszlásfüggvények segítségével.

13. Feladat. 3 dobókockával dobunk (egy pirossal, egy késsel és egy zölddel). Határozza meg a dobott számok

a. minimumának,

b. maximumának

az eloszlását és a várható értékét.

7.1. Feltételes várható érték

14. Feladat. Legyen A_1, A_2, \dots, A_n egy pozitív eseményekből álló teljes eseményrendszert. Igazolja, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi|A_n)\mathbb{P}(A_n),$$

ahol ξ egy diszkrét valószínűségi változó, x_1, x_2, \dots értékekkel és az $\mathbb{E}(\xi|A)$ feltételes valószínűség

$$\mathbb{E}(\xi|A) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_k|A)x_k$$

módon van definiálva

15. Feladat. Egy (szabályos) pörgettyűvel az 1, 2, 3 számokat lehet kipörgetni. Először a pörgettyűvel pörgetünk, majd annyiszor dobunk egy dobókockával, ahányat pörgettünk. Mennyi a 6-os dobások számának a várható értéke.

16. Feladat. Legyen ξ_1, ξ_2, \dots olyan azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyeknek létezik $\mathbb{E}(\xi_1)$ közös várható értéke. Legyen továbbá ν egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amely sok nemnegatív egész értékeket vehet fel. Igazolja, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\nu).$$

8. Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

8.1. Függelenség és korrelálatlanság

1. Feladat. • A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + x^3 y - xy^3), & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a. • Vizsgáljuk meg a marginálisok eloszlását függetlenség és korrelálatlanság szempontjából.

b. Határozza meg az $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ (a ξ és η átlagos abszolút eltérése) értékét!

2. Feladat. • Határozza meg a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó esetén az integráló tényezőt (azaz a C paraméter értékét), a marginálisok eloszlásfüggvényeit és várható értékét, továbbá a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét, ha a (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

a.

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C(xy + 1), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

c. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C(xy + x), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

d.

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3. Feladat. Legyen $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < -2x + 2\}$. Határozza meg a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó esetén az integráló tényezőt (azaz a C paraméter értékét), a marginális eloszlásfüggvényeit, továbbá az $\mathbb{E}\xi \cdot \eta$ értékét, ha a (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

a.

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, & \text{ha } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b.

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & \text{ha } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. Feladat. •Határozza meg a k konstans értékét és a marginálisok eloszlását, ha az együttes sűrűségfüggvény

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxye^{-k(x^2+y^2)}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5. Feladat. •Határozza meg a C paraméter értékét a $\mathbb{P}(\xi < 1, \eta > 1)$ valószínűséget és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét, ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

a. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C \left(x + \frac{y}{2} \right), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b.

$$f(x, y) = \begin{cases} C \left(x + \frac{y}{3} \right), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 3; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

6. Feladat. Az (X, Y) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} Cye^{-y(x+1)}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket.

8.2. Többdimenziós egyenletes eloszlás

7. Feladat. A (ξ, η) egyenletes eloszlású a

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < -x^2 + 1\}$$

halmazon. Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket.

8. Feladat. Ledobunk egy $P(x, y)$ pontot véletlenszerűen a $[0, 1] \times [0, 1]$ téglára. Határozza meg az alábbi valószínűségeket.

a. $\mathbb{P}(x + y > 0.5)$;

b. $\mathbb{P}(y < 4(-x^2 + x));$

c. $\mathbb{P}(x^2 + y^2 < 1);$

d. $\mathbb{P}(y < \sin(\pi x)).$

9. Feladat. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{ha } 0 < x < 6.6, 6.6 - x < y < 14.4 - x; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a C konstans értékét, a marginálisok eloszlásait és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értéket.

10. Feladat. Legyen a (ξ, η) egyenletes eloszlású a

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < -3x + 3\}$$

intervallumon. Határozza meg az $\mathbb{E}(\xi|\eta = 1)$, $\mathbb{E}(\xi|\eta = 2)$ és az $\mathbb{E}(\eta|\xi = \frac{1}{2})$ feltételes várható értékekkel.

8.3. Többdimenziós normális eloszlás

11. Feladat. Bizonyítsa be, hogyha a (ξ, η) egy kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, úgy hogy a marginális eloszlásai korrelálatlanok, akkor a ξ és η függetlenek.

12. Feladat. Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

a. $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}};$

b. $f(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2+2y^2}{8}};$

c. $f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}};$

13. Feladat. Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

a. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)};$

$$b. f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}};$$

$$c. f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}};$$

14. Feladat. Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

$$a. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}(x^2 + y^2 - xy - 4x - y + 7)};$$

$$b. f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 - 2xy - 6x + 8y + 10)};$$

$$c. f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{1}{4}(x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x - 16y + 24)}.$$

15. Feladat. Ledobunk n pontot egymástól függetlenül és véletlenszerűen a $[0, v]$ intervallumra. Határozza meg a ledobott pontok minimumának és maximumának várható értékét.

9. Egyenlőtlenségek, a nagy számok törvényei, központi határeloszlás tétel

9.1. Csebisev egyenlőtlenség

1. Feladat. • Legyen $\mathbb{E}(\xi) = 1.6$, $\mathbb{D}(\xi) = 0.1$. Adjon alsó becslést a $\mathbb{P}(0.220 \leq \xi < 1.980)$ valószínűségre.

9.2. Bernoulli-féle nagy számok törvénye

2. Feladat. • Legalább hányszor kell egy szabályos pénzérmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.7, valószínűséggel 0.37 és 0.63 közé essen?

3. Feladat. • Legalább hány elemű mintát kell vennünk, ha a visszatevéses mintavételnél a selejtarányt 0.11 pontossággal (legfejlebb ennyi eltéréssel) és 0.83 megbízhatósággal akarjuk becsülni?

4. Feladat. Egy párt népszerűségét kívánjuk közvélemény kutatással meghatározni. (igen-Nem választ kell adni a megkérdezetteknek.) Legalább hány embert kell megkérdezni, ha a százalékban mint népszerűséget ± 4 százalék pontossággal és 0.80 megbízhatósággal akarjuk becsülni. (A könnyebb számolás végett visszatevéses mintavételt tételezzünk fel!)

9.3. Moivre-Laplace tétel

5. Feladat. • Egy urna 123 golyót tartalmaz, melyek közül 103 piros és 20 fehér. Visszatevéssel kihúzzunk 600 golyót. Adjon közelítést annak a valószínűségére, hogy a kihúzott piros golyók száma az $[478, 526]$ intervallumba esik.

6. Feladat. • Egy célpontra 200 lövést adnak le. Minden lövés 0.4 valószínűséggel talál. Milyen határok közé fog esni 90%-os valószínűséggel a találatok száma. Oldja meg a feladatot a nagy számok törvénye és a Moivre Laplace tétel segítségével egyaránt.

7. Feladat. Egy kétforintost 200-szor feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a feldobások száma 680 és 720 közé esik.

8. Feladat. Számítsuk ki közelítő pontossággal az

$$\frac{1}{2^{500}} \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$$

kifejezés számértékét, majd határozzuk meg a

$$\sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$$

összeg közelítő értékét.

9.4. Központi határeloszlás tétel

9. Feladat. • Bizonyos üzletekben a 11 és 12 óra között megjelenő vevők száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 30$ várható értékkel. 100 ilyen üzletet figyelembe véve mekkora annak a valószínűsége, hogy a 11 és 12 óra közötti időben az összes megjelent vevők száma 3000 és 3100 közé esik.

10. Feladat. Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$ határérték értékét.

11. Feladat. Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots független $U(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók.

a. Határozzuk meg az $\eta_n = \sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

b. Jelölje \mathbb{F} azt az eloszlásfüggvényt, amelyhez az (η_n) valószínűségi változók sorozatának \mathbb{F}_n eloszlásfüggvénye konvergál (gyenge konvergencia).

12. Feladat. Az előző feladat eredményének a felhasználásával határozza meg az

$$\zeta_n := \frac{\log(\xi_1) + \log(\xi_2) + \dots + \log(\xi_n)}{n}$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, ahol ξ_1, ξ_2, \dots független $U(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók.

13. Feladat. $U(0, \vartheta)$ eloszlásból származó minta ismeretlen ϑ paraméterek becslése.

10. Statisztika I., Pontbecslések

10.1. Alapstatisztikák

1. Feladat. • 10 elemű minta:

3.6, 1.3, 0.5, 6.2, 1.0, 9.8, 3.0, 3.1, 6.5, 7.6.

Határozza meg az

- a. átlagot,
- b. tapasztalati második momentumot,
- c. tapasztalati szórásnégyzetet,
- d. korrigált tapasztalati szórásnégyzetet,
- e. tapasztalati mediánt,
- f. medián abszolút eltérést.

10.2. Maximum likelihood módszer

2. Feladat. • A momentumok módszerével, illetve a maximum likelihood módszerrel határozza meg

- a. a Bernoulli eloszlásból származó minta ismeretlen p paraméterét,
- b. a Poisson eloszlás ismeretlen λ paraméterét,
- c. az exponenciális eloszlás ismeretlen λ paraméterét,
- d. a normális eloszlás m és σ^2 paraméterét.

3. Feladat. • $U(0, \vartheta)$ eloszlásból származó minta ismeretlen ϑ paraméterének becslése.

11. Statisztika II., Intervallumbecslések

11.1. $1 - \alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum

1. Feladat. • Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, amelyre:

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$\sigma_0^2 = 0.3162.$$

Adjuk meg a 95%-os konfidencia intervallumot μ számára.

2. Feladat. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, amelyre:

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$\sigma_0 = 0.3162.$$

Adjuk meg a 99%-os konfidencia intervallumot μ számára.

3. Feladat. • Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ független minta.

Most μ -t és σ_0 -t sem ismerjük.

Legyen

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$s_n^* = 0.3162.$$

Adjunk meg ξ számára egy konfidencia intervallumot 95%-os megbízhatósági szinttel.

4. Feladat. • Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ egy független minta.

$$n = 10;$$

$$s_n^2 = 0.099;$$

Szerkesszünk konfidencia-intervallumot σ_0 számára 0.95 megbízhatósági szinttel.

12. Statisztika III., Hipotézisvizsgálat

12.1. Egymintás u-próba

1. Feladat. • $H_a \alpha = 0.05$. $n = 10$, $\mu_0 = 1$, $\sigma = 0.001$.

a. $\bar{\xi} = 0.9992$.

b. $\bar{\xi} = 0.9995$.

c. $\bar{\xi} = 1.0005$.

d. $\bar{\xi} = 1.0007$.

12.2. Egymintás t-próba

2. Feladat. • α tipikus értéke 0.05, így $\alpha = 0.05$. $n = 10$, $s_n^* = \sqrt{0.0012}$, $\mu_0 = 1$.

a. $\bar{\xi} = 0.9645$.

b. $\bar{\xi} = 0.9821$.

c. $\bar{\xi} = 1.0213$.

d. $\bar{\xi} = 1.0252$.

12.3. Kétmintás u-próba

3. Feladat. • $n = 5$, $m = 6$,

a. $\bar{\xi} = 0.98$, $\bar{\eta} = 1.02$, $\sigma = 0.03$.

b. $\bar{\xi} = 0.99$, $\bar{\eta} = 1.01$, $\sigma = 0.03$.

12.4. Illeszkedésvizsgálat

4. Feladat. • Szabályos-e a dobókocka?
($\alpha = 0.05$ szignifikancia szint.)

2. fejezet

Megoldások

1. Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

1.1. Kombinatorika

1. Megoldás. • $P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$.

2. Megoldás. • Jelöljék a vendégeket az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok, a faházakat az A, A, B, B, B, C, C betűk (az ágyszámoknak megfelelően).

Az alábbi táblázat egy példát mutat a vendégek faházakba történő elhelyezésére

1	2	3	4	5	6	7
B	A	B	C	A	C	C

Így a táblázat alapján kapjuk, hogy a vendégeket a faházakba 210-féleképpen lehet elszállásolni.

$$P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

3. Megoldás. • 4 egyforma levél 5 beszámozott rekeszbe:

a. $n = 5, k = 4, C_n^k = \binom{n}{k} = \binom{5}{4} = 5$.

b. $n = 5, k = 4, C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{8}{4} = 70$.

4. Megoldás. • 4 beszámozott levél 5 beszámozott rekeszbe:

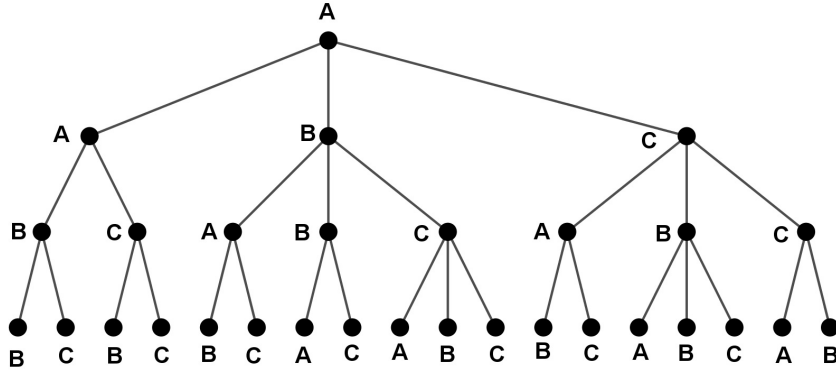
a. $n = 5, k = 4, V_n^k = (n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

b. $n = 5, k = 4, V_n^{k(i)} = 5^4 = 625$.

5. Megoldás. • $n = 5, k = 4, C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{8}{4} = 70$.

6. Megoldás. *

a. Készítsünk gráfot. Szimmetria okokból elegendő az A csúcsú részfat részletezni.



$3 \cdot 18 = 54$ a 4-tagú sorozatok száma.

b. A keresett k -tagú sorozatok számát jelölje

$$S_k^{k_1, k_2, \dots, k_r},$$

ami $k = n$ esetén a $P_n^{k_1 k_2 \dots k_r(i)}$ -vel egyenlő. Ha $k < n$, akkor a keresett szám kiszámolásához alkalmazhatjuk a következő szabályokat

$$S_k^{k_1, k_2, \dots, k_r} = S_k^{k_{\varphi(1)}, k_{\varphi(2)}, \dots, k_{\varphi(r)}},$$

ahol a φ az $1, 2, \dots, r$ elemek egy permutációja.

$$S_k^{k_1, k_2, \dots, k_r} = S_{k-1}^{k_1-1, k_2, \dots, k_r} + S_{k-1}^{k_1, k_2-1, \dots, k_r} + \dots + S_{k-1}^{k_1, k_2, \dots, k_r-1}$$

$$S_k^{k_1, k_2, \dots, k_r, 0} = S_k^{k_1, k_2, \dots, k_r},$$

$$S_1^{k_1, k_2, \dots, k_r} = r.$$

Az előző feladat megoldása a kapott rekurziós képlet felhasználásával:

$$\begin{aligned} S_4^{2,2,2} &= S_3^{1,2,2} + S_3^{2,1,2} + S_3^{2,2,1} = 3S_3^{1,2,2} = 3(S_2^{2,2} + S_2^{1,1,2} + S_2^{1,2,1}) = \\ &= 3S_2^{2,2} + 6S_2^{1,1,2} \end{aligned}$$

$$S_2^{2,2} = S_1^{1,2} + S_1^{2,1} = 2S_1^{1,2} = 4$$

$$S_2^{1,1,2} = S_1^{1,2} + S_1^{1,1,2} = 2S_1^{1,2} + S_1^{1,1,1} = 7$$

Így kapjuk, hogy

$$S_4^{2,2,2} = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 7 = 54.$$

1.2. Klasszikus valószínűségi mező

7. Megoldás.

a. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A := \{2, 3, 4\}$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

b. $\Omega = \{(i, j) | i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6\} = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$.

Foglaljuk táblázatba a dobott számok összegét.

(i, j)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	--

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3 + 4 + 5 + 6 + 5}{36} = \frac{23}{36} = 0.6389.$$

c. $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_6$, ahol C_i jelöli azt az eseményt, hogy az első dobott szám i , a második, és a harmadik összege $6 - i$ és $12 - i$ közé esik, ahol $i = 1, 2, \dots, 6$. Látható, hogy a fenti unió egy diszjunkt unió, így

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \dots + \mathbb{P}(C_6)$$

A b. pontban látott táblázat alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}(C_1) = \frac{4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2}{6^3} = \frac{29}{6^3}$$

$$\mathbb{P}(C_2) = \frac{3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3}{6^3} = \frac{30}{6^3}$$

$$\mathbb{P}(C_3) = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4}{6^3} = \frac{29}{6^3}$$

$$\mathbb{P}(C_4) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5}{6^3} = \frac{26}{6^3}$$

$$\mathbb{P}(C_5) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6^3} = \frac{21}{6^3}$$

$$\mathbb{P}(C_6) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6^3} = \frac{15}{6^3}$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{29 + 30 + 29 + 26 + 21 + 15}{6^3} = \frac{25}{36} = 0.6944.$$

8. Megoldás.

a. $\Omega \doteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 3, 4, 6\}$. A dobókocka szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Így a kedvező/összes képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b. Legyen $\Omega \doteq \{(i, j) | i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$. Ekkor $|\Omega| = 6^2 = 36$. A dobókockák szabályosságát feltételezve klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Az A esemény valószínűségének a kiszámolásához érdemes észrevenni, hogy a dobott két szám összege csak 2, 3, ..., 12 lehet. Ezek közül a kettővel, vagy hárommal oszthatók a

$$2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$$

Ha táblázatba rendezzük az Ω elemeket, akkor az azonos összegű számpárok egy a táblázat bal alsó sarkából a jobb felsőbe mutató átlóval párhuzamos vonalba rendeződnek, így könnyű őket összeszámolni.

		•	•	•		•	
2		•	•		•		•
3		•		•		•	•
4			•		•	•	•
5		•		•	•	•	
6			•	•	•		•
		8	9	10		12	

Tehát a kedvező esetek száma:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 = 24.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

c. Számítógéppel ellenőriztük, hogy 3, 4, 5, 6 dobás esetén a keresett valószínűség szintén $\frac{2}{3}$.

A 32 lapos magyar kártya:

4 szín: piros - P, tök - T, makk - M, zöld - Z;

8 figura: VII:=7, VIII:=8, IX:=9, X:=10, alsó:=a, felső:=f, király:=k, ász:=d (disznó).

9. Megoldás. $L := \{\text{lapok halmaza}\} = \{L_1, L_2, \dots, L_{32}\}$.

$\Omega := \{(L_1, L_2, L_3) | L_i \in L (i = 1, 2, 3); L_i \neq L_j \text{ ha } i \neq j\}$.

Így kapjuk, hogy $|\Omega| = V_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30$. $|A| = 8 \cdot 31 \cdot 30$; $|B| = 31 \cdot 30 \cdot 8$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8 \cdot 31 \cdot 30}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

10. Megoldás. $\Omega = \{a \text{ képezhető } 5\text{-tagú sorozatok}\}$, $|\Omega| = \mathbb{P}_5^{2,2,1(i)} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$. $A := \{a \text{ kapott } 5\text{-jegyű számok}\}$.

$$|A| = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 18,$$

$B := \{a \text{ kapott } 5\text{-jegyű páros számok}\}$, $C := \{a \text{ kapott } 5\text{-jegyű páratlan számok}\}$. Könnyű látni, hogy $A = B \cup C$ diszjunkt unió, így $|B|$ és $|C|$ közül elegendő az egyiket kiszámolni. Mivel a $|B|$ -t könnyebb kiszámolni, így a $|B|$ -vel kezdünk.

$$|B| = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 3,$$

ugyanis az első helyre nem írhatok 0-t vagy 2-est, mivel ezekben az esetekben a kapott szám nem lenne 5-jegyű, vagy nem lenne páros. A maradék 3 helyre a megadott 3 számot $3 \cdot 2 \cdot 1$ -féleképpen lehet beírni.

$$|C| = |A| - |B| = 18 - 3 = 15.$$

Így a keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

11. Megoldás. •

Számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Visszatevés nélkül kihúzzunk 3-mat. $|\Omega| = V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. $|A| := 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$; a B halmaz számosságának a megállapításához érdemes észrevenni, hogy $B = B_1 \cup B_2$ diszjunkt unió, ahol $B_1 := \{a \text{ kapott } 3\text{-jegyű páros szám első számjegye páros}\}$, $B_2 := \{a \text{ kapott } 3\text{-jegyű páros szám első számjegye páratlan}\}$, $|B_1| = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$, ugyanis az első helyre kerülhet a 2 és a 4 jegyek valamelyike, a harmadik helyre a megmaradt 2 páros szám valamelyike, végül a második helyre a megmaradt 4 számjegy bármelyike. $|B_2| = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$, ami hasonló gondolatmenettel látható, mint amit a $|B_1|$ esetén alkalmaztunk, így kapjuk, hogy

$|B| = |B_1| + |B_2| = 16 + 36 = 52$. Mivel $|C| = |A| \setminus |B|$, így $|C| = 100 - 52 = 48$. A keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} = 0.8333;$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{52}{120} = \frac{13}{30} = 0.4333;$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0.4;$$

12. Megoldás. •

Számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ezúttal visszatevéssel kihúzzunk 3-mat. $|\Omega| = V_6^{3(i)} = 6^3 = 120$. $|A| = 5 \cdot 6^2$; $|B| = |C| = 5 \cdot 6 \cdot 3$. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 6^2}{6^3} = \frac{5}{6} = 0.8333.$$

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(C) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{12} = 0.4167.$$

2. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül, visszatevéssel, geometriai valószínűség, műveletek eseményekkel

2.1. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül

1. Megoldás. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát.

a. (3 piros, 6 fehér golyó)

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{3}{0}\binom{6}{4} + \binom{3}{1}\binom{6}{3} + \binom{3}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{20}{21} = 0.9524$$

b. (12 piros és 24 fehér golyó)

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{12}{0}\binom{24}{4} + \binom{12}{1}\binom{24}{3} + \binom{12}{2}\binom{24}{2}}{\binom{36}{4}} = \frac{46}{51} = 0.9019$$

c. (30 piros és 60 fehér golyó)

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{30}{0}\binom{60}{4} + \binom{30}{1}\binom{60}{3} + \binom{30}{2}\binom{60}{2}}{\binom{90}{4}} = \frac{59}{66} = 0.8939$$

d. (300 piros és 600 fehér golyó)

$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{300}{0}\binom{600}{4} + \binom{300}{1}\binom{600}{3} + \binom{300}{2}\binom{600}{2}}{\binom{900}{4}} = \frac{1198}{1347} = 0.8893.$$

2. Megoldás. • (10 piros és 20 fehér golyó, kihúzunk 10 golyót)

$$\mathbb{P}(\xi \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{20}{10} + \binom{10}{1}\binom{20}{9} + \binom{10}{2}\binom{20}{8}}{\binom{30}{10}} = 0.7493.$$

2.2. Golyóhúzás urnából visszatevéssel

3. Megoldás. • (1 piros és 2 fehér golyó, kihúzunk 4 golyót) Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{3}, n = 4)$. A keresett valószínűség:

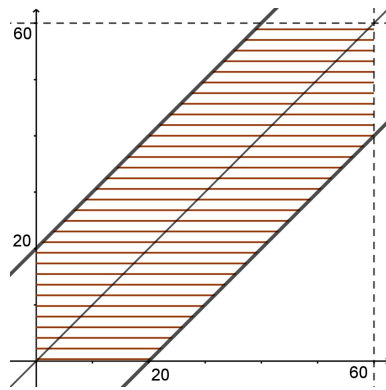
$$\mathbb{P}(\xi \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{81} = 0.6914.$$

4. Megoldás. • (10 piros és 20 fehér golyó, kihúzunk 10 golyót) Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{3}, n = 10)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{10}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \right) = 0.7009. \end{aligned}$$

2.3. Geometriai valószínűség

5. Megoldás. • (Két ember a kávéházban) $\Omega := [0, 60] \times [0, 60]$; $A := \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leq 20\}$.

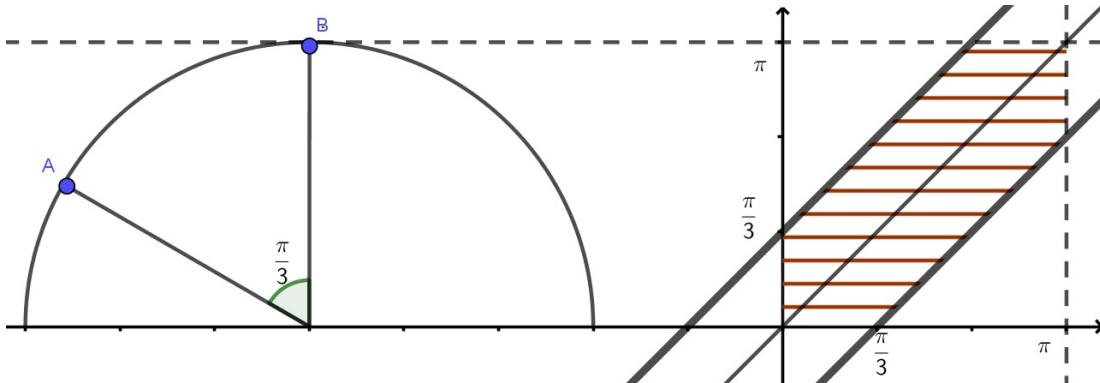


$$\begin{aligned} |x - y| &\leq 20 \\ \iff \\ -20 &\leq x - y \leq 20 \\ \iff \\ y &\leq x + 20 \text{ és } y \geq x - 20 \end{aligned}$$

$T(\Omega) = 60^2$ és $T(A) = 60^2 - 2 \cdot \frac{40^2}{2} = 60^2 - 40^2$ Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} = 0.4444.$$

6. Megoldás. • $\Omega := [0, \pi] \times [0, \pi]$; $A := \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leq \frac{\pi}{3}\}$.



Így az előző feladat alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{5}{9} = 0.4444.$$

7. Megoldás. • Bevezetjük a szokásos jelöléseket:

$$\begin{aligned}\Omega &\doteq [0, 1] \times [0, 1], \\ A &\doteq \{(x, y) \in \Omega \mid \text{a } 3 \text{ szakaszból háromszög szerkeszthető}\}, \\ A_1 &\doteq \{(x, y) \in A \mid x \leq y\}, \\ A_2 &\doteq \{(x, y) \in A \mid y < x\}.\end{aligned}$$

Ekkor

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2), \quad \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 2\mathbb{P}(A_1),$$

így elegendő $\mathbb{P}(A_1)$ -et kiszámolni. Ehhez tegyük fel, hogy $x \leq y$. Az x és y pontok 3 részre bontják a $(0, 1)$ intervallumot.

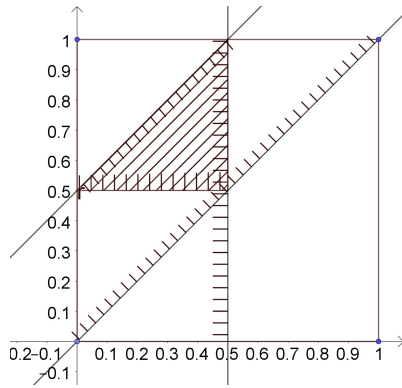


A kapott 3 szakasz hossza: x , $y - x$, $1 - y$. Ezekre a szakaszhosszokra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x + (y - x) \geq 1 - y &\Leftrightarrow y \geq 1 - y &\Leftrightarrow 2y \geq 1 &\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}, \\ x + 1 - y \geq y - x &\Leftrightarrow 2x + 1 \geq 2y &\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \geq y, \\ y - x + 1 - y \geq x &\Leftrightarrow 1 \geq 2x &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A kapott lineáris egyenlőtlenségek félsíkokat határoznak meg a síkban, ezeket a félsíkokat kell összemetszenünk. A félsíkok határegyenesét úgy kapjuk, hogy a kisebb, vagy nagyobb egyenlő relációjeleket egyenlőségjelre cseréljük. A kapott egyenes két félsíkra bontja a síkot. Úgy győződünk meg arról, hogy melyik félsík pontjai elégítik ki a lineáris egyenlőtlenséget, hogy egy

tetszőlegesen megválasztott pont, mondjuk az origót a lineáris egyenlőtlenségbe helyettesítjük.

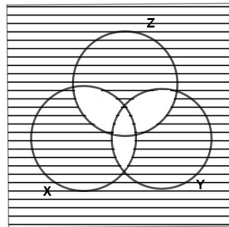


$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{t(A_1)}{t(\Omega)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{1}{8},$$

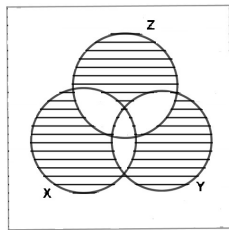
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

2.4. Műveletek eseményekkel

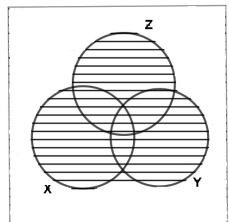
8. Megoldás. a.



$$A = \overline{(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)}$$

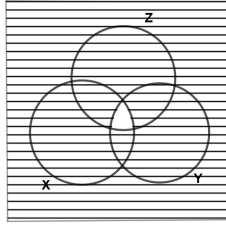


$$B = (X \cap \bar{Y} \cap \bar{Z}) \cup (\bar{X} \cap Y \cap \bar{Z}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y} \cap Z)$$

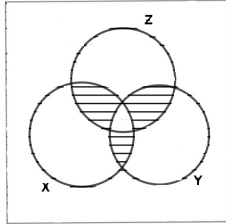


$$C = X \cup Y \cup Z$$

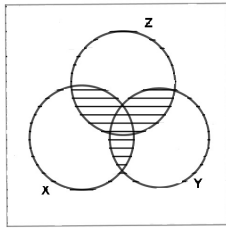
b. •



$$D = \overline{X \cap Y \cap Z}$$



$$E = (X \cap Y \cap \bar{Z}) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (\bar{X} \cap Y \cap Z)$$



$$F = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

2.5. Poincare formula (szita-formula)

9. Megoldás. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i -edik törpe megkapja a levelet. Így

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7$$

Az A eseményt jelöli, hogy van olyan törpe, amely megkapja a nevére szóló levelet. Az A esemény valószínűségét a Poincare formula segítségével tudjuk meghatározni.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^7 \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots - \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_7} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_7})$$

$$\Omega = \{\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mid \varphi \text{ bijekció}\} \implies |\Omega| = 7!$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \binom{7}{1} \frac{6!}{7!} - \binom{7}{2} \frac{5!}{7!} + \binom{7}{3} \frac{4!}{7!} - \binom{7}{4} \frac{3!}{7!} + \binom{7}{5} \frac{2!}{7!} - \binom{7}{6} \frac{1!}{7!} + \binom{7}{7} \frac{0!}{7!} = \\ &= \sum_{k=1}^7 (-1)^{k+1} \binom{7}{k} \frac{(7-k)!}{7!} \end{aligned}$$

Azonban

$$\binom{7}{k} \frac{(7-k)!}{7!} = \frac{7!}{(7-k)!k!} \frac{(7-k)!}{7!} = \frac{1}{k!}.$$

A keresett valószínűség

$$p_7 = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 + \sum_{k=1}^7 (-1)^k \frac{1}{k!} = \sum_0^7 \frac{(-1)^k}{k!},$$

amiből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

3. Bayes formula, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel, események páronkénti és teljes függetlensége

3.1. Bayes formula, teljes eseményrendszer, Bayes tétel

1. Megoldás. • *A teljes valószínűség tétele és a Bayes tétel alapján kapjuk, hogy*

$$a. \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = 0.1 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.01 + 0.7 \cdot 0.005 = 0.0095.$$

b.

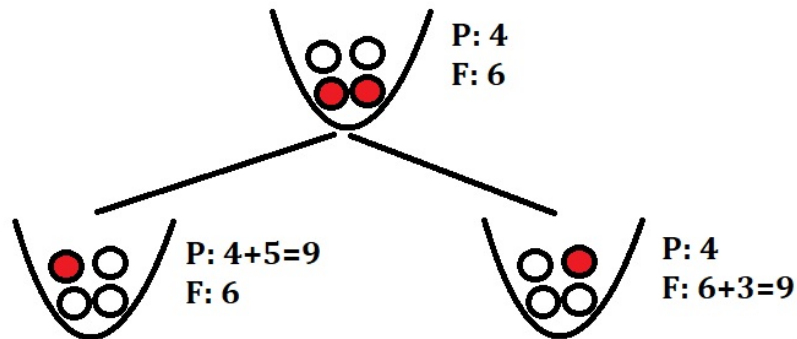
$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.04}{0.0095} = \frac{8}{19} = 0.4211$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.01}{0.0095} = \frac{4}{19} = 0.2105$$

$$\mathbb{P}(B_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.005}{0.0095} = \frac{7}{19} = 0.3684.$$

2. Megoldás. (*Kétfázisos kísérletek*)

a.



Események

B_1 = az első húzásakor piros golyót húzunk;

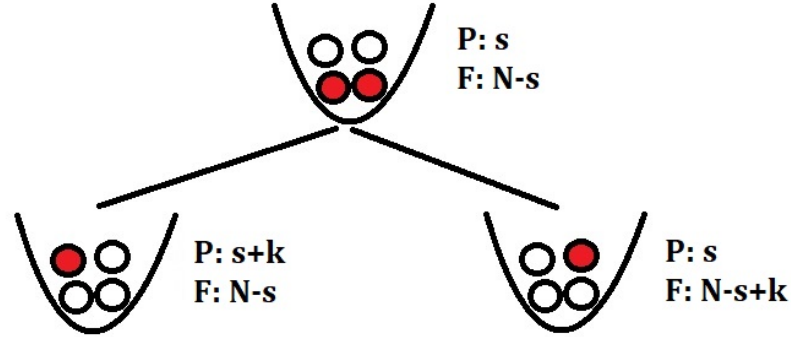
B_2 = az első húzásakor fehér golyót húzunk;

A = a második húzásakor piros golyót húzunk.

$$\bullet \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{9}{15} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{13} \cdot \frac{6}{10} = \frac{138}{355} = 0.4246.$$

$$\bullet \mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{9}{15} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{138}{355}} = \frac{71}{115} = 0.6174.$$

b.



- $\mathbb{P}(B_1) = \frac{s}{N}$;
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{s+k}{N+k} \frac{s}{N} + \frac{s}{N+k} \frac{N-s}{N} = \frac{s}{N} \left(\frac{s+k}{N+k} + \frac{N-s}{N+k} \right) = \frac{s}{N}$.

3. Megoldás. • Vezessük be a következő eseményeket:

$B_i :=$ az i -edik dobozt választottuk ($i = 1, 2, 3$).

$A :=$ piros golyót húzunk.

Mivel a B_1, B_2, B_3 események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Megoldás. • Vezessük be az alábbi eseményeket:

$A =$ egy beteg meggyógyult;

$B =$ egy beteg az új kezelésben részesült.

Az alábbi adatokat ismerjük:

$$\mathbb{P}(B) = 0.7, \quad \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.3, \quad \mathbb{P}(A|B) = 0.85, \quad \mathbb{P}(A|\bar{B}) = 0.80.$$

A feladat a $\mathbb{P}(B|A)$ feltételes valószínűség meghatározása. A Bayes tétel alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{0.85 \cdot 0.7}{0.85 \cdot 0.7 + 0.80 \cdot 0.3} = \frac{119}{167} = 0.7126.$$

5. Megoldás. Vezessük be a B_1, B_2, B_3, B_4 eseményeket annak megfelelően, hogy az első kihúzott lap piros, vagy tők, vagy zöld vagy makk, illetve jelölje A azt az eseményt, hogy a kihúzott két lap egyenlő. Mivel a B_1, B_2, B_3, B_4 események teljes eseményrendszert alkotnak, így használhatjuk a teljes valószínűség tételt:

a.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) = \\ &= \frac{1}{4} \left(4 \cdot \frac{7}{31} \right) = \frac{7}{31} = 0.2258,\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) = \\ &= \frac{1}{4} \left(4 \cdot \frac{8}{32} \right) = \frac{1}{4} = 0.25.\end{aligned}$$

6. Feladat. Definiáljuk a B_1, B_2, B_3 eseményeket annak megfelelően, hogy a kihúzott első golyó piros, vagy kék, vagy zöld, illetve jelölj A azt az eseményt, hogy a kihúzott két golyó különböző színű. Mivel a B_1, B_2, B_3 események teljes eseményrendszert alkotnak, így használhatjuk a teljes valószínűség tételét

a.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= \frac{2+3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1+3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1+2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{11}{15} = 0.7333,\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= \frac{2+3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1+3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1+2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{19}{36} = 0.5278.\end{aligned}$$

3.2. Események függetlensége

7. Megoldás. • Jelölje az egyes folyosókon való átjutást A, B, C . Ekkor a $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ valószínűséget kell kiszámolni. A szita-formula alkalmazásával a szimmetria és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 3 \cdot 0.6^3 - 3 \cdot 0.6^6 + 0.6^9 = 0.5181.$$

8. Megoldás. Az X és Y események függetlenek $\mathbb{P}(X) = 0.6, \mathbb{P}(Y) = 0.85$.

a. egyik sem következik be;

$$\mathbb{P}(\bar{X} \cap \bar{Y}) = \mathbb{P}(\bar{X}) \cdot \mathbb{P}(\bar{Y}) = 0.4 \cdot 0.15 = \frac{3}{50} = 0.06.$$

b. legfeljebb az egyik következik be;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y)) &= \mathbb{P}(X \cap \bar{Y}) + \mathbb{P}(\bar{X} \cap Y) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(\bar{Y}) + \mathbb{P}(\bar{X})\mathbb{P}(Y) = \\ &= 0.6 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.85 = 0.43\end{aligned}$$

c. legalább az egyik következik be;

$$\mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0.6 + 0.85 - 0.6 \cdot 0.85 = \frac{47}{50} = 0.94.$$

d. mindkettő bekövetkezik.

$$\mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0.6 \cdot 0.85 = 0.51.$$

9. Megoldás. • Az X, Y, Z események teljesen függetlenek, $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 0.6$.

a. Egy korábbi feladat eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\text{legfeljebb } 1) = 1 - \mathbb{P}((X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)) = \\ &= 1 - [3\mathbb{P}(X \cap Y) - 3\mathbb{P}(X \cap Y \cap Z) + (x \cap Y \cap Z)] = 1 - [3 \cdot 0.6^2 - 20.6^3] = \\ &= \frac{44}{125} = 0.352. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\text{pontosan } 1) = \mathbb{P}(X \cap \bar{Y} \cap \bar{Z}) + \mathbb{P}(\bar{X} \cap Y \cap \bar{Z}) + \mathbb{P}(\bar{X} \cap \bar{Y} \cap Z) = \\ &= 3\mathbb{P}(X)(1 - \mathbb{P}(x))^2 = 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 = \frac{36}{125} = 0.288. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\text{legalább } 1) = \mathbb{P}(X \cup Y \cup Z) = 3\mathbb{P}(X) - 3\mathbb{P}(X)^2 + \mathbb{P}(X)^3 = \frac{117}{125} = 0.936.$$

b. Egy korábbi feladat eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\text{lefeljebb } 2) = \mathbb{P}(\overline{X \cap Y \cap Z}) = 1 - \mathbb{P}(X)^3 = 1 - 0.6^3 = \frac{98}{125} = 0.784.$$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\text{pontosan } 2) = 3\mathbb{P}(X \cap Y \cap \bar{Z}) = 3\mathbb{P}(X)^2(1 - \mathbb{P}(X)) = 3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = \frac{54}{125} = 0.432.$$

$$\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{44}{125} = \frac{81}{125} = 0.648.$$

10. Megoldás. Kártyahúzás

a. $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{32}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{32}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}$, mivel $\frac{8}{32} \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{32}$, így az A és a B események függetlenek.

b. $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{31}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{31}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{31}$. Mivel $\frac{8}{31} \cdot \frac{4}{31} \neq \frac{1}{31}$, így ebben az esetben az A és a B események nem függetlenek.

11. Megoldás. Egy korábbi feladatban láttuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8 \cdot 31 \cdot 30}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{32 \cdot 31 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{4}{15}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{8 \cdot 31 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{120}.$$

és mivel $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{15} \neq \frac{7}{120}$, így az A és B események nem függetlenek.

12. Megoldás. (Feltételezzük a dobások eredményeinek a függetlenségét.)

a. • Oldjuk meg a feladatot paraméteresen. Vezessük be az alábbi paramétereket.

$$\mathbb{P}(A \text{ talált}) = p, \quad \mathbb{P}(B \text{ talál}) = q.$$

Tegyük fel, hogy A kezd és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a valószínűsége, hogy A nyer. Nyilvánvaló, hogy az A játékos az 1., 3., 5., ... dobások során tud nyerni.

1. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = p;$

3. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = (1 - p)(1 - q)p;$

5. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = [(1 - p)(1 - q)]^2 p;$

(...)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) &= p + (1 - p)(1 - q)p + [(1 - p)(1 - q)]^2 p + \dots = \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - p)(1 - q)]^k = \frac{p}{1 - (1 - p)(1 - q)}. \end{aligned}$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = \frac{0.6}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{15}{23} = 0.6522.$$

b. A kezd és B nyer

$$\mathbb{P}(A \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = 1 - \mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = 1 - \frac{p}{1 - (1 - p)(1 - q)}.$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = 1 - \frac{15}{23} = \frac{8}{23} = 0.3478.$$

c. B kezd és A nyer. A fentiek alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = 1 - \frac{q}{1 - (1 - p)(1 - q)}.$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = 1 - \frac{0.8}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{3}{23} = 0.1304.$$

d. B kezd és B nyer. A fentiek alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = \frac{q}{1 - (1 - p)(1 - q)}.$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = \frac{0.8}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{20}{23} = 0.8696.$$

4. Várható érték és szórásnégyzet

4.1. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

1. Megoldás. • (Lezser hallgató) Jelölje ξ a szükséges vizsgák számát. Ekkor a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4 értékeket veheti fel az alábbi valószínűséggel

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 & p_1 &= 0.25; \\x_2 &= 2 & p_2 &= 0.75 \cdot 0.25; \\x_3 &= 3 & p_3 &= 0.75^2 \cdot 0.25; \\x_4 &= 4 & p_4 &= 0.75^3;\end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum x_i p_i = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75^3 = \frac{175}{64} = 2.7344.$$

2. Megoldás. (Ketten dobnak kosárra)

a. Jelölje ξ a dobások számát. A ξ diszkrét valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4 értékeket veszi fel a következő valószínűségekkel:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 & p_1 &= 0.6; \\x_2 &= 2 & p_2 &= 0.4 \cdot 0.8; \\x_3 &= 3 & p_3 &= 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.6; \\x_4 &= 4 & p_4 &= 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = 0.4^2 \cdot 0.2;\end{aligned}$$

Így a keresett várható érték:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 + 3 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.4^2 \cdot 0.2 = \frac{189}{125} = 1.512.$$

b. Megvizsgáljuk, hogy milyen valószínűséggel nyer az A játékos, illetve a B játékos (ha A kezd).

$$\mathbb{P}(A \text{ nyer}) = 0.6 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.6 = \frac{81}{125} = 0.648;$$

$$\mathbb{P}(B \text{ nyer}) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = \frac{215}{625} = 0.3456;$$

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem nyer}) = 0.4^2 \cdot 0.2^2 = \frac{4}{625} = 0.0064;$$

3. Megoldás. (Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor) Egy szabályos érmét feldobunk 1-szer. Jelölje ξ a fejdobások számát. Ekkor a ξ Bernoulli eloszlású valószínűségi változó $P = \frac{1}{2}$ paraméterrel. Így $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{4}$.

Feldobjuk az érmét 100-szor. Jelölje ξ_i az i -edik dobás során a fejdobások számát. ($i = 1, 2, \dots, 100$).

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_{100}) = 100\mathbb{E}(\xi) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Mivel a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ valószínűségi változók páronként függetlenek, így

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \dots + \mathbb{D}^2(\xi_{100}) = 100\mathbb{D}^2(\xi) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25.$$

4. Megoldás. • A feladat megoldása analóg az előző feladat megoldásával. Egy kockával 1-szer dobunk. Jelölje ξ a dobott számot.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} = 15.1666,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.9126.$$

Jelölje ξ_i az i -edik dobás során dobott számot ($i = 1, 2, \dots, 100$). Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_{100}) = 100\mathbb{E}(\xi) = 100 \cdot \frac{21}{6} = 350.$$

Mivel a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ valószínűségi változók páronként függetlenek, így

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + \dots + \mathbb{D}^2(\xi_{100}) = 100\mathbb{D}^2(\xi) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{30} = 291.6667$$

$$\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{291.6667} = 17.0783.$$

5. Megoldás. • Jelölje ξ a bank pörgetésenkénti nyereségét. A ξ valószínűségi változó az x , $x - 2000$ értékeket veheti fel, ahol a játékosnak a pörgetés előtt x forintot kell befizetnie a banknak.

A bank nyelési esélye:

J/B	1	2	3	4	5	6	7
1	*	*	*	*	*	*	*
2		*	*	*	*	*	*
3			*	*	*	*	*
4				*	*	*	*
5					*	*	*
6						*	*
7							*

$$\mathbb{P}(a \text{ bank nyer}) = \frac{\frac{7^2-7}{2} + 7}{49} = \frac{4}{7}$$

$$\mathbb{P}(a \text{ bank veszít}) = \frac{3}{7}$$

Így a ξ eloszlása:

x_i	x	$x-2000$
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

A ξ várható értéke:

$$200 = \mathbb{E}(\xi) = x \cdot \frac{4}{7} + (x - 2000) \cdot \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{7400}{7} = 1057.1 \quad (\text{Ft})$$

Tehát a játékosnak a 2000 Ft nyereség reményében minden pörgetés előtt 1057.1 Ft-ot kell befizetnie a banknak ahhoz, hogy a banknak átlagosan 200 forint nyeresége legyen pörgetésenként.

6. Feladat. Két szabályos pörgettyűvel pörgetünk: egy pirossal és egy kékkel. Mindkét pörgettyűn az 1, 2, 3 számokat lehet kipörgetni. A kipörgetett számokat jelölje ξ_1 és ξ_2 . Határozza meg a $\xi := \min(\xi_1, \xi_2)$ és az $\eta := \max(\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi változók

- eloszlását,
- várható értékét,
- szórásnégyzetét.

4.2. Abszolút folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

7. Megoldás. •

- Az integráló tényező értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = C \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{x=-1}^{x=1} = \\ &= C \left(\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{4}{3} C \implies C = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- A várható érték és a medián meghatározása:

Mivel az f sűrűségfüggvény az $y = 0$ tengelyre nézve szimmetrikus, továbbá létezik a várható érték, ezért a várható érték és a medián egyaránt 0. ($\mathbb{E}(\xi) = 0$, $\nu = 0$.)

- *A szórásnégyzet meghatározása:*

Először meghatározzuk a második momentumot, ami a $(\xi) = 0$ miatt egyúttal a szórásnégyzet is lesz.

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x^2(-x^2 + 1)dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (-x^4 + x^2)dx \\ &= \frac{3}{4} \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{3}{4} \left(\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{5} = 0.2. \end{aligned}$$

8. Megoldás. •

- *A C konstans értékének a meghatározása:*

Kihasználjuk, hogy abszolút folytonos függvény eloszlásfüggvénye abszolút folytonos (így folytonos), így a C konstans meghatározásához elegendő elérni, hogy az eloszlásfüggvény a töréspontjaiban folytonosan csatlakozzon, így

$$1 = \mathbb{F}(2) = C(x^2 + 2x)|_{x=2} = 8C \quad \implies \quad C = \frac{1}{8}.$$

- *A sűrűségfüggvény meghatározása:*

Az f sűrűségfüggvény az \mathbb{F} eloszlásfüggvényből $f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{F}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$ módon határozható meg, így

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2x + 2) = \frac{1}{4}(x + 1), & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

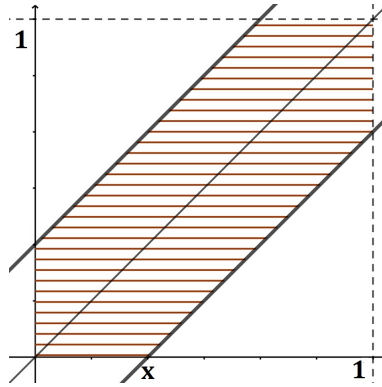
- *A várható érték meghatározása:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x(x + 1)dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (x^2 + x)dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} \right) = \frac{7}{6} = 1.6667. \end{aligned}$$

- *Az $\mathbb{E}(29\xi - 680)$ értékének a meghatározására felhasználjuk a várható érték linearitását, így kapjuk, hogy*

$$\mathbb{E}(29\xi - 680) = 29\mathbb{E}(\xi) - 680 = 29 \cdot \frac{7}{6} - 680 = -\frac{3877}{6} = -646.1667.$$

9. Megoldás. Egy korábbi feladat gondolatmenetét követjük, amelyben "két ember bemegy a kávéházba...". Tekintsük az alábbi ábrát:



- Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény meghatározása

Legyen $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \frac{1 - 2\frac{(1-x)^2}{2}}{1} = 1 - (1-x)^2 = (1 - (x^2 - 2x + 1)) = -x^2 + 2x.$$

Tehát

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Így

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

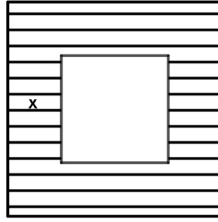
- A várható érték és a szórásnégyzet meghatározása:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2) dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- A szórásnégyzet meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

10. Megoldás. • Jelölje ξ a ledobott pontnak az egységnyezet határától vett távolságát.



1. Eloszlásfüggvény meghatározása.

A ξ valószínűségi változó értékészlete a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallum. Ebből máris adódik, hogy

Ha $x > \frac{1}{2}$, akkor $\mathbb{F}(x) = 1$.

Ha $x \in [\frac{1}{2}, 0]$, akkor

$$\mathbb{F} = \mathbb{P}(\xi < x) = 1 - (1 - 2x)^2 = 4(-x^2 + x) = -4x^2 + 4x$$

Ha $x < 0$, akkor nyilván $\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = 0$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ -4x^2 + 4x, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. A sűrűségfüggvény meghatározása:

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvényből deriválással határozható meg. Így kapjuk, hogy

$$f(x) = \begin{cases} -8x + 4, & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

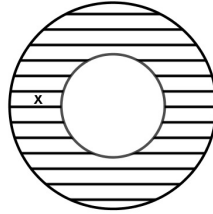
3. A várható érték és a második momentum meghatározása.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x(-8x + 4) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-8x^2 + 4x) dx = \\ &= \left[-\frac{8x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(-8x + 4) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-8x^3 + 4x^2) dx = \\ &= \left[-\frac{8x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

4. A szórásnégyzet meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{72} = 0.0139.$$

11. Megoldás.



Az \mathbb{F} , f függvények, $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}(\xi^2)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ azonos a 10. feladatban látottakban.

12. Megoldás. A 10. feladat megoldásában látottakhoz hasonlóan kapjuk.

- Az eloszlás és sűrűségfüggvény meghatározása:

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - (1 - 2x)^3, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(3(1 - 2x)^2 \cdot (-2)) = 6(2x - 1)^2, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- *A várható érték és a második momentum meghatározása*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} x(2x-1)^2 dx = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 4x^2 + x) dx = \\ &= 6 \cdot \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = 6 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \\ &= 6 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(2x-1)^2 dx = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} (4x^4 - 4x^3 + x^2) dx = \\ &= 6 \cdot \left[\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = 6 \left(\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \\ &= 6 \left(\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right) = 6 \left(\frac{1}{40} \right) = \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

- *A szórásnégyzet meghatározása:*

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{3}{20} - \left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{43}{320} = 0.1344.$$

13. Megoldás. *A 10. feladatban látottak alapján kapjuk.*

- *Az eloszlás és sűrűségfüggvény meghatározása:*

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2\pi}{1^2\pi} = x^2, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- *A várható érték és a második momentum meghatározása*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(2x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(2x) dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- *A szórásnégyzet meghatározása:*

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} = 0.0556.$$

14. Megoldás. *A 12. feladatban látottakkal analóg módon kapjuk, hogy*

- *Az eloszlás és sűrűségfüggvény meghatározása:*

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x^3, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- *A várható érték és a második momentum meghatározása*

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(3x^2) dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(3x^2) dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = 3 \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{5}.$$

- *A szórásnégyzet meghatározása:*

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} = 0.0375.$$

5. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

5.1. Hipergeometrikus és binomiális eloszlások

1. Megoldás. • Egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Jelölje ξ az A esemény bekövetkezéseinek a számát.

a. Legfeljebb 2-szer következik be, ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2)) = p_0 + p_1 + p_2 = \\ &= \binom{8}{0} 0.31^0 0.69^8 + \binom{8}{1} 0.31^1 0.69^7 + \binom{8}{2} 0.31^2 0.69^6 = 0.5264,\end{aligned}$$

b. Legfeljebb 6-szor következik be, ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 6) &= 1 - \mathbb{P}(\xi > 6) = 1 - \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8)) = 1 - (p_7 + p_8) = \\ &= 1 - \left(\binom{8}{7} 0.31^7 0.69^1 + \binom{8}{8} 0.31^8 0.69^0 \right) = 0.9984\end{aligned}$$

c. Legalább 6-szor következik be, ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 6) &= \mathbb{P}((\xi = 6) \cup (\xi = 7) \cup (\xi = 8)) = p_6 + p_7 + p_8 = \\ &= \binom{8}{6} 0.31^6 0.69^2 + \binom{8}{7} 0.31^7 0.69^1 + \binom{8}{8} 0.31^8 0.69^0 = 0.0134.\end{aligned}$$

A továbbiakban az olyan részeket, mint például, $\mathbb{P}((\xi = 6) \cup (\xi = 7) \cup (\xi = 8))$ nem kell kiírni.

2. Megoldás. • (külföldi ösztöndíj) Jelölje ξ a kiválasztott lányok számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 8$, $s = 3$, $N - s = 5$, $n = 4$ paraméterekkel

$$\mathbb{P}(\text{lesz lány}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nem lesz lány}) = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{13}{14} = 0.9286.$$

3. Megoldás. • (rejtvénypályázat) Jelölje ξ a kisorsolt miskolci megfejtők számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 50$, $s = 20$, $N - s = 30$, $n = 4$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(\text{lesz miskolci nyertes}) = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{20}{0} \binom{30}{4}}{\binom{50}{4}} = 0.8810.$$

5.2. Geometriai és negatív binomiális eloszlások

4. Megoldás. a. geometriai eloszlás, (A változat) Független kísérletek végtelen sorozatát végezzük. Jelölje ξ azt a számot, ahányadik kísérlet során egy p valószínűségű A esemény először bekövetkezik. Ekkor ξ -t p paraméterű geometriai eloszlásnak nevezzük.

- eloszlása

$$p_k = (1-p)^{k-1}p \quad (k = 1, 2, \dots)$$

- generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p z^k = p z \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)z)^{k-1} = p z \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)z]^k = \\ &= \frac{pz}{1-(1-p)z} \end{aligned}$$

- $G'(1)$ és $G''(1)$ értékének a meghatározása

$$\begin{aligned} G'(z) &= \frac{(pz)'(1-(1-p)z) - pz(1-(1-p)z)'}{(1-(1-p)z)^2} = \frac{p(1-(1-p)z) + pz(1-p)}{(1-(1-p)z)^2} = \\ &= \frac{p - p(1-p)z + p(1-p)z}{(1-(1-p)z)^2} = \frac{p}{(1-(1-p)z)^2} \quad \implies \quad G'(1) = \frac{1}{p}, \\ G''(z) &= \left(\frac{p}{(1-(1-p)z)^2} \right)' = p(-z) \frac{1}{(1-(1-p)z)^3} (-1-p) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)z)^3} \\ &\implies \quad G''(1) = \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

- várható érték és szórásnégyzet

$$\mathbb{E}(\xi) = G'(1) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'(1) + G''(1) - [G'(1)]^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

b. r -ed rendű p paraméterű negatív binomiális eloszlás, Jele: $\xi \sim \text{NB}(r, p)$

Kísérletek végtelen sorozatát vizsgáljuk. ξ jelöli azt a számot, ahányadik kísérlet során egy p valószínűségű A esemény r -edszer bekövetkezik.

- eloszlása

$$p_{r+k} = \mathbb{P}(\xi = r+k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

- generátorfüggvénye, A ξ r db független p paraméterű geometriai valószínűségi változó összege. Mivel a független valószínűségi változók összegének generátorfüggvénye egyenlő a megfelelő generátorfüggvények szorzatával, így kapjuk, hogy

$$G(z) = \left(\frac{p(z)}{1 - (1-p)z} \right)^r.$$

- várható érték és szórásnégyzet könnyen kijön a független valószínűségi változók összegének várható értékére, illetve szórásnégyzetére vonatkozó összefüggésből.

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r) = r\mathbb{E}(\xi_1) = \frac{r}{p},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r) = r\mathbb{D}^2(\xi_1) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

5. Megoldás. •

- $\xi \sim \text{Geom}(p = \frac{1}{2})$, így $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;
- $\xi \sim \mathcal{NB}(r = 3, p = \frac{1}{2})$, így $\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p} = 6$.

6. Megoldás. Jelölje ξ a szükséges dobások számát.

- $\Omega := \{ \text{az } s \text{ és } N - s \text{ fehér golyóóból megalkotható összes sorozatok száma} \}.$

$$|\Omega| = P_N^{s, N-s(i)} = \binom{N}{s}$$

$A_k := \{ \text{a } k\text{-dik húzás alkalmával húzunk először piros golyót.} \} \quad (k = 1, 2, \dots, N - s)$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$	$\underbrace{\hspace{2cm}}$
$k \text{ db}$	$N - k \text{ db}$
$1 \dots k$	$k + 1 \dots N$
*	$s - 1 \text{ db piros}$

$$|A_k| = P_{N-k}^{(s-1), (N-k \cdot s+1)(i)} = \binom{N-k}{s-1} \quad (1 \leq k \leq N - s + 1)$$

Így kapjuk, hogy

$$p_k \frac{\binom{N-k}{s-1}}{\binom{N}{s}} \quad (k = 1, 2, \dots, N - s + 1).$$

b. Határozzuk meg a ξ várható értékét $N = 7$, $s = 3$ speciális esetben.

k	1	2	3	4	5
p_k	$p_1 = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{7}$	$p_2 = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}$	$p_3 = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35}$	$p_4 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35}$	$p_5 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{6}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{1}{35} = 2,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{7} + 2^2 \cdot \frac{2}{7} + 3^2 \cdot \frac{6}{35} + 4^2 \cdot \frac{3}{35} + 5^2 \cdot \frac{1}{35} = 5.2,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 5.2 - 2^2 = 1.2.$$

Az általános megoldás generátorfüggvény segítségével oldható meg:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{N+1}{s+1}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{s(N-s)(N+1)}{(s+1)^2(s+2)}$$

ami $N = 7$ és $s = 3$ speciális esetben visszaadja a numerikus eredményeket.

7. Megoldás. Jelölje ξ a szükséges húzások számát.

a. A ξ eloszlása:

$\Omega := \{a \text{ golyókból alkotott sorozatok száma}\}$ (az azonos színű golyók között nem teszünk különbséget). Így

$$|\Omega| = P_s^{s, N-s(i)} = \binom{N}{s},$$

$A_k := \{a \text{ } k\text{-adik húzás során húzzuk ki az utolsó piros golyót}\}.$

1 ... k - 1	k ... N
s - 1 db piros	*

$$|A_k| = P_{k-1}^{s-1, k-s(i)} = \binom{k-1}{s-1} \quad (s-1 \leq k < N).$$

Így kapjuk, hogy

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\binom{k-1}{s-1}}{\binom{N}{s}} \quad (s \leq k \leq N).$$

b. $N = 7$ és $s = 3$ eset.

k	3	4	5	6	7
p_k	$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35}$	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35}$	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{10}{35}$	$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35}$

$$\mathbb{E}(\xi) = 3 \cdot \frac{1}{35} + 4 \cdot \frac{3}{35} + 5 \cdot \frac{6}{35} + 6 \cdot \frac{10}{35} + 7 \cdot \frac{15}{35} = 6,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 3^2 \cdot \frac{1}{35} + 4^2 \cdot \frac{3}{35} + 5^2 \cdot \frac{6}{35} + 6^2 \cdot \frac{10}{35} + 7^2 \cdot \frac{15}{35} = \frac{186}{5} = 37.2,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{186}{5} - 6^2 = \frac{6}{5} = 1.2.$$

5.3. Poisson eloszlás

8. Megoldás. • Jelölje ξ a szervizbe naponta érkező gépkocsik számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 5)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(4 \leq \xi \leq 7) &= \mathbb{P}((\xi = 4) \cup (\xi = 5) \cup (\xi = 6) \cup (\xi = 7)) = \\ &= p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \left(\frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} \right) e^{-5} = 0.6016. \end{aligned}$$

9. Megoldás. • Jelölje ξ az egy szelet kalácsban lévő mazsolák számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 9)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(7 \leq \xi \leq 10) &= \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8) \cup (\xi = 9) \cup (\xi = 10)) = \\ &= p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = \left(\frac{9^7}{7!} + \frac{9^8}{8!} + \frac{9^9}{9!} + \frac{9^{10}}{10!} \right) e^{-9} = 0.4992. \end{aligned}$$

10. Megoldás. • Jelölje ξ az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát. Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban $\frac{50 \cdot 52}{1000} = 2.6$ szem mazsola van. Így $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 2.6)$.

Jelölje A_n azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve van közöttük mazsola nélküli szelet. Keressük azt az n -et amelyre $\mathbb{P}(A_n) \geq 0.92$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \leq 1 - 0.92 = 0.08,$$

Az $\overline{A_n}$ jelenti azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve nincs közöttük mazsola nélküli szelet, azaz mindegyikben van mazsola. Ezeknek az eseményeknek a függetlenségét felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = (1 - p_0)^n = \left(1 - \frac{2.6^0}{0!} e^{-2.6} \right)^n = (1 - e^{-2.6})^n \leq 0.08.$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség logaritmus-vonás segítségével megoldható.

$$n \geq \frac{\ln(0.08)}{\ln(1 - e^{-2.6})} = 32.7266,$$

tehát legalább 33 db süteményt kell kivenni.

6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

6.1. Egyenletes eloszlás

1. Megoldás. Jelölje ξ a kör sugarát, η a kör területét. Ekkor $\eta = \xi^2\pi$, továbbá tudjuk, hogy $\xi \sim U(0, 1.4)$, így $\mathbb{F}_\xi(x) = \frac{x}{1.4}$, ha $x \in (0, 1.4)$.

Az η mediánját keressük, amihez szükségünk van az η eloszlásfüggvényére. Az η eloszlásfüggvényének a meghatározásakor egyrészt felhasználjuk, hogy $\eta = \xi^2\pi \geq 0$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Másrészt, $\xi \geq 0$, így $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$.

Azt is felhasználjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\xi^2\pi < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{F}_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{1.4\sqrt{\pi}}, & \text{ha } 0 \leq \sqrt{\frac{x}{\pi}} < 1.4, \\ 1 & \text{azaz } 0 \leq x < 1.96\pi, \\ & \text{ha } 1.96\pi \leq x. \end{cases}$$

A μ medián értékének a meghatározásához az $\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Így kapjuk, hogy $\mathbb{F}_\eta(\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{1.4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\mu} = 0.7\sqrt{\pi}$, $\mu = 0.49\pi$.

2. Megoldás. Tudjuk, hogy $\xi \sim U(-2.4, 2.4)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2\xi + 1 < 1.6) &= \mathbb{P}(2\xi < 0.6) = \mathbb{P}(\xi < 0.3) = \mathbb{F}_\xi(0.3) = \\ &= \frac{x + 2.4}{4.8} \Big|_{x=0.3} = \frac{2.7}{4.8} = \frac{9}{16} = 0.5625. \end{aligned}$$

3. Megoldás. • $\eta = \xi^2$

a. $\xi \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Legyen $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(\xi < \sqrt{x}) = \mathbb{F}_\xi(\sqrt{x})$$

• Az eloszlás és sűrűségfüggvény

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{\sqrt{x} - 0}{1 - 0} = \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Így

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A várható érték

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} = 0.3333, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5} = 0.2. \end{aligned}$$

- A szórásnégyzet meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45} = 0.0889.$$

b. $\xi \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

Legyen $x \in]-\infty, 0[$. Ekkor

$$\mathbb{F}_{\eta}(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = 0.$$

Legyen $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\eta}(x) &= \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(|\xi| < \sqrt{x}) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \\ &= \mathbb{F}_{\xi}(\sqrt{x}) - \mathbb{F}_{\xi}(-\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2} - \frac{-\sqrt{x} + 1}{2} = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

- Az eloszlás és sűrűségfüggvény

$$\mathbb{F}_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Így

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A várható érték és a szórásnégyzet meghatározása az előző feladat alapján kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(\eta) = \frac{1}{5}$.

4. Megoldás. • $\eta := \alpha\xi + \beta$, ahol $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$; $\alpha > 0$; $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Az η valószínűségi változó eloszlása:

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\alpha\xi + \beta < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \frac{x - \beta}{\alpha}\right) = \mathbb{F}_\xi\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \alpha a + \beta, \\ \frac{\frac{x - \beta}{\alpha} - a}{b - a} = \frac{x - (\alpha a + \beta)}{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}, & \text{ha } x \in [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta], \\ 1 & \text{ha } x > \alpha b + \beta. \end{cases}$$

Így kapjuk, hogy $\eta \sim \mathcal{U}(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$.

b. A megoldáshoz

$$\left. \begin{aligned} \alpha a + \beta &= 0 \\ \alpha b + \beta &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani.

A második egyenletből kivonva az első kapjuk, hogy $\alpha(b - a) = 1$, azaz $\alpha = \frac{1}{b - a}$.

Az α -ra kapott értéket visszahelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$$\frac{1}{b - a}a + \beta = 0 \quad \implies \quad \beta = \frac{-a}{b - a}.$$

6.2. Exponenciális eloszlás

5. Megoldás. • Jelölje η a várakozási időt percben mérve. Mivel $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x > 0$).

A λ paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy $-5\lambda = \ln(0.22)$, azaz $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

6. Megoldás. Jelölje ξ a gép élettartamát évben mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 9 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{9}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{9})$.

A K értékét keressük úgy, hogy a $\mathbb{P}(\xi > K) \geq 0.85$ feltétel teljesüljön.

$$\begin{aligned} 0.85 \leq \mathbb{P}(\xi > K) &= 1 - \mathbb{P}(\xi \leq K) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K) = 1 - \mathbb{F}_\xi(K) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{K}{9}}) = e^{-\frac{K}{9}}. \end{aligned}$$

A kapott exponenciális egyenlőtlenség már könnyen megoldható.

$$e^{-\frac{K}{9}} \geq 0.85, \quad -\frac{K}{9} \geq \ln(0.85), \quad K \leq -9 \ln(0.85) = 1.4627.$$

7. Megoldás. • Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók. $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényekkel. Ha $\xi := \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, akkor a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < x) &= \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x) = 1 - \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \dots, \xi_n > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 > x)\mathbb{P}(\xi_2 > x) \dots \mathbb{P}(\xi_n > x) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(\xi_1 < x))(1 - \mathbb{P}(\xi_2 < x)) \dots (1 - \mathbb{P}(\xi_n < x)). \end{aligned}$$

Ekvivalens módon kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x) = 1 - (1 - \mathbb{F}_1(x))(1 - \mathbb{F}_2(x)) \dots (1 - \mathbb{F}_n(x)).$$

Az általunk vizsgált konkrét esetben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x) &= 1 - (1 - \mathbb{F}_1(x))(1 - \mathbb{F}_2(x)) \dots (1 - \mathbb{F}_n(x)) = 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \dots e^{-\lambda_n x} = \\ &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \end{aligned}$$

Tehát független exponenciális eloszlású valószínűségi változók minimuma szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ paraméterrel. Így a gép élettartamának a várható értéke

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

8. Megoldás. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 1.8 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{1.8}$ és $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.8})$. Legyen $\eta \doteq \xi^2$. Érdekes észrevenni, hogy az η valószínűségi változó mediánját keressük, amit most m -mel jelölünk. Az m értékének a meghatározásához az $\mathbb{F}_\eta(m) = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Ehhez először meg kell határozni az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mivel $\eta = \xi^2 \geq 0$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Másrészt, $\xi \geq 0$, így $\sqrt{\xi^2} = |\xi|$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(\xi < \sqrt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}}{1.8}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Tehát az $1 - e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = \frac{1}{2}$ exponenciális egyenletet kell megoldani. A megoldás: $e^{-\frac{\sqrt{m}}{1.8}} = 0.5$, $-\frac{\sqrt{m}}{1.8} = \ln(0.5)$, $m = [1.8 \ln(0.5)]^2 = 1.5567$.

9. Megoldás. • $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}(\xi) = 0.3 = \frac{1}{\lambda}$. Így

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \frac{1}{\lambda^2},$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. A várható érték linearitása alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7) &= 8\mathbb{E}(\xi^2) - 19\mathbb{E}(\xi) + 7 = \\ &= 8 \frac{2}{\lambda^2} - 19 \frac{1}{\lambda} + 7 = 16 \cdot 0.3^2 - 19 \cdot 0.3 + 7 = 2,74. \end{aligned}$$

10. Megoldás. • Jelölje ξ a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 0.02)$. A számolás során felhasználjuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \quad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > 6 + 13 | \xi > 13) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6 + 13 | \xi > 13) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 6) = \\ &= 1 - \mathbb{F}_\xi(6) = 1 - (1 - e^{-0.02 \cdot 6}) = e^{-0.02 \cdot 6} = 0.8869. \end{aligned}$$

11. Megoldás. • Az időegység 1 óra. Jelölje ξ az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$, így $\xi \sim \text{Pois}(\lambda = 29)$.

Jelölje η a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor a Poisson folyamat alapján kapjuk, hogy $\eta \sim \text{Exp}(\lambda = 29)$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\eta > \frac{4.5}{60}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\eta < \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{F}_\eta\left(\frac{4.5}{60}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}}\right) = e^{-\frac{4.5 \cdot 29}{60}} = 0.1136. \end{aligned}$$

6.3. Normális eloszlás

12. Megoldás. • Jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 50, \sigma^2)$. A feladat az ismeretlen szórás meghatározása. Ekkor

$$0.85 = \mathbb{P}(\xi < 50.05) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{50.05 - 50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right),$$

amiből az ismeretlen σ paramétert már könnyű kifejezni. $1.04 = \frac{0.05}{\sigma}$, $\sigma = \frac{0.05}{1.04} = 0.0481$.

13. Megoldás. • Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 0, \sigma^2)$, ahol a σ^2 paraméter ismeretlen; továbbá $\mathbb{P}(-5.8 \leq \xi \leq 5.8) = 0.42$. Először a σ értékét határozzuk meg. Standardizálással kapjuk, hogy $\eta \doteq \frac{\xi - 0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-5.8 \leq \xi \leq 5.8) &= \mathbb{P}\left(\frac{-5.8}{\sigma} \leq \eta \leq \frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - 1 = 0.42, \end{aligned}$$

azaz

$$\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) = \frac{0.42 + 1}{2} = 0.71$$

A kapott egyenlőségből az ismeretlen szórás már visszakereséssel meghatározható: $\frac{5.8}{\sigma} = 0.55$, $\sigma = \frac{5.8}{0.55} = 10.5455$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0.5 \leq 1.7\xi + 1 < 1.7) &= \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7} \leq \xi < \frac{1.7 - 1}{1.7}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{0.5 - 1}{1.7 \cdot 10.5455} \leq \eta < \frac{1.7 - 1}{1.7 \cdot 10.5455}\right) = \\ &= \Phi(0.04) - \Phi(-0.03) = \\ &= \Phi(0.04) + \Phi(0.03) - 1 = \\ &= 0.5160 + 0.5160 - 1 = 0.028. \end{aligned}$$

14. Megoldás. Jelölje ξ_1 a henger átmérőjét, ξ_2 a hosszát. Ekkor $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ és ξ_1, ξ_2 függetlenek.

a. Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy alkatrész jó. Ekkor

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(m_1 - 3\sigma_1 < \xi_1 < m_1 + 3\sigma_1, m_2 - 2\sigma_2 < \xi_2 < m_2 + 2\sigma_2) = \\ &= \mathbb{P}(m_1 - 3\sigma_1 < \xi_1 < m_1 + 3\sigma_1) \mathbb{P}(m_2 - 2\sigma_2 < \xi_2 < m_2 + 2\sigma_2) = \\ &= \mathbb{P}\left(-3 < \frac{\xi_1 - m_1}{\sigma_1} < 3\right) \mathbb{P}\left(-2 < \frac{\xi_2 - m_2}{\sigma_2} < 2\right) = \\ &= (\Phi(3) - \Phi(-3)) (\Phi(2) - \Phi(-2)) = \\ &= (2\Phi(3) - 1) (2\Phi(2) - 1). \end{aligned}$$

Táblázat alapján kapjuk, hogy

$$\Phi(3) = 0.9987, \quad \Phi(2) = 0.9772,$$

így a keresett valószínűség:

$$(2 \cdot 0.9987 - 1)(2 \cdot 0.9772 - 1) = 0.9519.$$

b. Jelölje p az előbb kapott valószínűséget és legyenek

$A :=$ az első alkatrész jó,

$B :=$ a második alkatrész jó.

Ekkor az A és B események függetlenségének feltételezése mellett)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{legalább az egyik alkatrész jó}) &= \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 2p - p^2 = \\ &= 2 \cdot 0.919 - 0.9519^2 = 0.9977. \end{aligned}$$

15. Megoldás. •

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > K_\alpha) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < K_\alpha) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) = \alpha \quad \implies \quad -\frac{K_\alpha - m}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \\ &\implies \quad K_\alpha = -\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + m. \end{aligned}$$

Az alábbi táblázat az α , $\Phi^{-1}(\alpha)$ értékpárokat tartalmazza:

α	0.90	0.95	0.99
$\Phi^{-1}(\alpha)$	1.282	0.645	2.326

Tudjuk, hogy $m = 20$, $\sigma = 2$.

- Ha $\alpha = 0.90$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 1.282 + 20 = 17.436$,
- Ha $\alpha = 0.95$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 1.645 + 20 = 16.71$,
- Ha $\alpha = 0.99$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 2.326 + 20 = 8.37$.

6.4. Csonkolt normális eloszlás

16. Megoldás. Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ és jelentse ζ a ξ nemnegatív értékekre csonkított eloszlását.

a. Eloszlás és sűrűségfüggvény:

$$\bullet \mathbb{F}_\zeta(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x | x \geq 0) = \frac{\mathbb{P}(0 \leq \xi \leq x)}{\mathbb{P}(\xi \geq 0)} = \frac{\mathbb{F}_\xi(x) - \mathbb{F}_\xi(0)}{\mathbb{F}_\xi(0)} = 2\mathbb{F}_\xi(x) - 1.$$

•

$$f_{\zeta}(x) = \begin{cases} 2f_{\xi}(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b. A kárösszeg várható értéke és szórásnégyzete:

$$\bullet \mathbb{E}(\eta^2) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

A $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ második momentuma $= \sigma^2$.

$$\bullet \mathbb{D}^2(\zeta) = \mathbb{E}(\zeta^2) - [\mathbb{E}(\zeta)]^2 = \sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

$$c. \mathbb{P}(\zeta > a) = 1 - \mathbb{P}(\zeta < a) = 1 - (2\mathbb{F}_{\xi}(a) - 1) = 2(1 - \mathbb{F}_{\xi}(a)) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\right).$$

17. Megoldás. Jelölje ζ a kárösszeg nagyságát.

$$a. \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 500000 \implies \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 500000 = 626657 \text{ Ft.}$$

b.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta > a) &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{300000}{626675}\right)\right) = 2(1 - \Phi(0.48)) = \\ &= 2(1 - 0.6844) = 0.6312. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta > a) &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{700000}{626675}\right)\right) = 2(1 - \Phi(2.12)) = \\ &= 2(1 - 0.8636) = 0.2728. \end{aligned}$$

• A $\zeta = e^{\xi}$ várható értéke

$$\mathbb{E}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx.$$

$$\text{Mivel } \left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)' = -2\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = -\frac{x}{\sigma^2}, \text{ így}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\zeta) &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-\sigma^2) \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\sigma^2}x\right) e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-\sigma^2) \left[e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \end{aligned}$$

6.5. Lognormális eloszlás

18. Megoldás (Függvénytranszformáció hatása az eloszlás és sűrűségfüggvényre). *Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$ ($\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$) egy olyan folytonosan differenciálható függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmazza a ξ értékkészletét, legyen továbbá $\zeta = g(\xi)$.*

- A ζ eloszlásfüggvénye: $\mathbb{F}_\zeta(x) = \mathbb{P}(g(\xi) < x) = \mathbb{P}(\xi < g^{-1}(x))$, így

$$\mathbb{F}_\zeta(x) = \begin{cases} \mathbb{F}_\xi(g^{-1}(x)), & \text{ha } x \in E, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A ζ sűrűségfüggvénye: Mivel $f_\zeta(x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{F}_\zeta(x)$, így

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} f_\xi(g^{-1}(x)), & \text{ha } x \in E, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

19. Megoldás. *Legyen $\zeta = e^\xi$, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*

- A ζ eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta < x) &= \mathbb{P}(e^\xi < x) = \mathbb{P}(\xi < \log(x)) = \mathbb{P}(\sigma\zeta + m < \log(x)) = \\ &= \mathbb{P}\left(\zeta < \frac{\log(x) - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\log(x) - m}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\zeta(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\log(x) - m}{\sigma}\right), & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A ζ sűrűségfüggvénye

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)^2}, & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A ζ várható értéke:

$$\mathbb{E}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\zeta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

függvénytranszformációt alkalmazunk.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x) - m}{\sigma} = u &\implies x = e^{\sigma u + m} \implies \frac{dx}{du} = \sigma e^{\sigma u + m} \\ &\implies dx = \sigma e^{\sigma u + m} du. \end{aligned}$$

Új határok: $u : -\infty \rightarrow +\infty$. Így

$$\mathbb{E}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma e^m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2\sigma u)} du$$

teljes négyzet alakra hozunk a nevezőben

$$-\frac{1}{2}(u^2 - 2\sigma u) = -\frac{1}{2}((u - \sigma)^2 - \sigma^2) = -\frac{1}{2}(u - \sigma)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\zeta) = e^{m + \frac{1}{2}\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - \sigma)^2} du = e^{m + \frac{1}{2}\sigma^2}.$$

A ζ második momentuma:

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\zeta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right)^2} dx$$

ugyanazt a függvénytranszformációt alkalmazzuk, mint amit a várható érték kiszámítása esetén:

$$\frac{\ln(x) - m}{\sigma} = u \implies x = e^{\sigma u + m}$$

$dx = \sigma e^{\sigma u + m}$, $u : -\infty \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma u + m} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sigma e^{\sigma u + m} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 4\sigma u)} du.$$

Alakítsuk teljes négyzetté a kitevőben lévő kifejezést

$$-\frac{1}{2}(u^2 - 4\sigma u) = -\frac{1}{2}((u - 2\sigma)^2 - 4\sigma^2) = -\frac{1}{2}(u - 2\sigma)^2 + 2\sigma^2.$$

- A ζ szórásnégyzete

$$\mathbb{D}^2(\zeta) = \mathbb{E}(\zeta^2) - [\mathbb{E}(\zeta)]^2 = e^{2m + 2\sigma^2} - \left(e^{m + \frac{1}{2}\sigma^2}\right)^2 = e^{2m + 2\sigma^2} e^{2m + \sigma^2} = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

20. Megoldás. $\xi \sim e^{\sigma\zeta+m}$

$$\zeta = a\xi^n = e^{\ln(a)}e^{n\sigma\zeta+nm} = e^{n\sigma\zeta+nm+\ln(a)}$$

azaz ζ lognormális eloszlású $nm + \ln(a)$ és $(n\sigma)^2$ paraméterekkel.

21. Megoldás. Idézzük fel, hogy az m, σ^2 paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\log(x) - m}{\sigma}\right), & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így

$$\mathbb{P}(a < \xi < b) = \Phi\left(\frac{\log(b) - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log(a) - m}{\sigma}\right).$$

7. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

1. Megoldás. • (Két dobókockával dobunk)

a. $A \min(\xi_1, \xi_2)$ eloszlása:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2) = 1) &= \mathbb{P}((1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (3, 1), \dots, (6, 1)) = \frac{2 \cdot 6 - 1}{36} = \frac{11}{36}, \\ \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2) = 2) &= \mathbb{P}((2, 2), (2, 3), \dots, (2, 6), (3, 2), (4, 2), \dots, (6, 2)) = \frac{2 \cdot 5 - 1}{36} = \frac{9}{36}, \\ &(\dots)\end{aligned}$$

ugyanígy kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2) = k) = \frac{2(6 - k + 1) - 1}{36} \quad (k = 1, 2, \dots, 6).$$

$A \min(\xi_1, \xi_2)$ várható értéke és szórásnégyzete:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \sum_i x_i p_i = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36} = 2.5278, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{11}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} + 3^2 \cdot \frac{7}{36} + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{301}{36} = 8.3611, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = 1.9715.\end{aligned}$$

b. $A \max(\xi_1, \xi_2)$ eloszlása:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2) = 1) &= \mathbb{P}((6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6), (1, 6), (2, 6), \dots, (5, 6)) = \frac{2 \cdot 6 - 1}{36} = \frac{11}{36}, \\ \mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2) = 2) &= \mathbb{P}((5, 1), (5, 2), \dots, (5, 5), (1, 5), (2, 5), \dots, (4, 5)) = \frac{2 \cdot 5 - 1}{36} = \frac{9}{36}, \\ &(\dots)\end{aligned}$$

ugyanígy kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2) = k) = \frac{2k - 1}{36} \quad (k = 1, 2, \dots, 6).$$

A $\min(\xi_1, \xi_2)$ várható értéke és szórásnégyzete:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.4722,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36} = 21.9722,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1.9715.$$

c. **A** (ξ, η) **együttes eloszlása, ahol** $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. *Érdeemes észrevenni, hogy*

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = \frac{2}{36}$,
- ha $i = j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{36}$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = 0$.

Így könnyű kitölteni az együttes eloszlás táblázatot.

(ξ, η)	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^6 i^2 \frac{1}{36} + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \frac{2}{36} i j = \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^6 i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 6} i j \right) = \\ &= \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^6 i \right)^2 = \frac{21^2}{36} = 12.25, \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{49}{4} - \frac{91}{36} \cdot \frac{161}{36} = 0.9452.$$

2. Megoldás. • Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék pörgettyűvel kipörgetett számot.

a. • $\xi := \xi_1, \eta := \min(\xi_1, \xi_2)$;

Mivel $\xi := \xi_1, \eta := \min(\xi_1, \xi_2)$, így

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = 0$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{9}$.

Így már csak az $i = j$ eseteket kell kiszámolni.

$$(\xi_1 = 1, \min(\xi_1, \xi_2) = 1) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \text{ így } p_{11} = \frac{3}{9},$$

$$(\xi_1 = 2, \min(\xi_1, \xi_2) = 2) = \{(2, 2), (2, 3)\}, \text{ így } p_{22} = \frac{2}{9},$$

$$(\xi_1 = 3, \min(\xi_1, \xi_2) = 3) = \{(3, 3)\}, \text{ így } p_{33} = \frac{1}{9}.$$

Ezek alapján könnyen fel tudjuk írni a (ξ, η) együttes eloszlását, illetve a marginális eloszlásokat.

(ξ, η)	1	2	3	
1	$\frac{3}{9}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

• A ξ eloszlása

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}.$$

• A η eloszlása

y_j	1	2	3
p_j	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_j x_j p_{.j} = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5 + 6 + 3) = \frac{14}{9} = 1.5556,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \sum_j y_j^2 p_{.j} = 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5 + 12 + 9) = \frac{26}{9} = 2.8889,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = 0.4691.$$

• **Az $\text{cov}(\xi, \eta)$ meghatározása**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{9} = \\ &= \frac{1}{9}(3 + 2 + 8 + 3 + 6 + 27) = \frac{49}{9} = 5.4444. \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{49}{9} - 2 \cdot \frac{14}{9} = \frac{7}{3} = 2.3333.$$

• **Az $r(\xi, \eta)$ meghatározása**

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{21\sqrt{57}}{38} = 4.1722.$$

b. • $\xi := \xi_1, \eta := \max(\xi_1, \xi_2)$;

Mivel $\xi_1 \leq \max(\xi_1, \xi_2)$, így

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{9}$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = 0$.

Így már csak az $i = j$ eseteket kell kiszámolni.

$$(\xi_1 = 1, \max(\xi_1, \xi_2) = 1) = \{(1, 1)\}, \text{ így } p_{11} = \frac{1}{9},$$

$$(\xi_1 = 2, \max(\xi_1, \xi_2) = 2) = \{(2, 1), (2, 2)\}, \text{ így } p_{22} = \frac{2}{9},$$

$$(\xi_1 = 3, \max(\xi_1, \xi_2) = 3) = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}, \text{ így } p_{33} = \frac{3}{9}.$$

Ezek alapján könnyen fel tudjuk írni a (ξ, η) együttes eloszlását, illetve a marginális el-

oszlásokat.

(ξ, η)	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

- $\xi = \xi_1$ eloszlását a feladat a. részében már kiszámoltuk. Így $\mathbb{E}(\xi) = 2$ és $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{2}{3}$.
- Az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ eloszlása

x_i	1	2	3
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_j y_j p_{\cdot j} = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}(1 + 6 + 15) = \frac{22}{9} = 2.444,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + 3^2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}(1 + 12 + 45) = \frac{58}{9} = 6.4444,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \frac{58}{9} - \left(\frac{22}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = 0.4691.$$

- Az $\text{cov}(\xi, \eta)$ meghatározása

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{9} = \\ &= \frac{1}{9}(1 + 2 + 3 + 8 + 6 + 27) = \frac{47}{9} = 5.2222. \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{47}{9} - 2 \cdot \frac{22}{9} = \frac{1}{3} = 0.3333.$$

- Az $r(\xi, \eta)$ meghatározása

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{57}}{38} = 0.5960.$$

c. $\xi := \min(\xi_1, \xi_2)$, $\eta := \max(\xi_1, \xi_2)$. Könnyű látni, hogy $\xi \leq \eta$ így

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = \frac{2}{9}$,

- ha $i = j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{9}$,
- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = 0$.

így az együttes eloszlás:

(ξ, η)	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

- **A** $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$ és $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ **marginálisok** megállapíthatóak az együttes eloszlásból, de mivel ezeket az eloszlásokat már az a. és b. pontokban vizsgáltuk, így most nem részletezzük.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \frac{14}{9}, & \mathbb{D}^2(\xi) &= \frac{38}{81}, \\ \mathbb{E}(\eta) &= \frac{22}{9}, & \mathbb{D}^2(\eta) &= \frac{38}{81}. \end{aligned}$$

- **Az** $\text{cov}(\xi, \eta)$ **meghatározása**

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = (1 + 2 + 3)^2 \cdot \frac{1}{9} = 4,$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 4 - \frac{14}{9} \cdot \frac{22}{9} = \frac{16}{81} = 0.1975.$$

- **Az** $r(\xi, \eta)$ **meghatározása**

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\frac{16}{81}}{\sqrt{\frac{38}{81}} \cdot \sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{8}{19} = 0.4211.$$

3. Megoldás. • Először meghatározzuk a marginális eloszlásokat.

$\xi \setminus \eta$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$	
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.1	0.4
$x_2 = 3$	0.1	0.4	0.1	0.6
	0.2	0.6	0.2	1

A ξ **eloszlása:**

x_i	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
p_i	0.4	0.6

η eloszlása:

y_i	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
$p_{\cdot j}$	0.2	0.6	0.2

a. • $A \xi$ és η nem függetlenek, hiszen a marginális eloszlások szorzata nem egyenlő az együttes eloszlással. Ez könnyen ellenőrizhető, ha például az első sort és az első oszlopot nézzük: $0.2 \cdot 0.4 \neq 0.1$.

b. • A marginális eloszlások táblázatai könnyen megkaphatók az együttes eloszlás táblázatából. Így kapjuk, hogy

$A \xi$ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(\xi) = 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.6 = 2.6,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.6 = 7,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 7 - 2.6^2 = 0.24.$$

$Az \eta$ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(\eta) = 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.2 = 3,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = 1^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.6 + 5^2 \cdot 0.2 = 10.6,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 10.6 - 3^2 = 1.6.$$

$\text{cov}(\xi, \eta)$ meghatározásához szükségünk van az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értékére, ami az együttes eloszlástáblázatból számolható az a transzformációs formula felhasználásával.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 3 \cdot 0.2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.1 + 3 \cdot 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 3 \cdot 0.4 + 3 \cdot 5 \cdot 0.1 = \\ &= 7.8. \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 7.8 - 2.6 \cdot 3 = 0.$$

Mivel $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, így ξ és η korrelálatlanok, azonban - mint ahogyan azt láttuk - nem függetlenek.

$A \mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ értékét a kapott értékekből a legkönnyebb meghatározni, így nincs szükség a $\xi + \eta$ eloszlásának a meghatározására.

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 0.24 + 2 \cdot 0 + 1.6 = 1.84.$$

c. • $A \mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ ($A \xi$ és η abszolút átlagos eltérésének) a meghatározása könnyű a együttes eloszlástáblázat a transzformációs formula alapján:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\xi - \eta|) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_i - y_j| p_{ij} = \\ &= |1 - 2| \cdot 0.4 + |3 - 2| \cdot 0.2 + |5 - 2| \cdot 0.1 + |1 - 3| \cdot 0.1 + |3 - 3| \cdot 0.4 + |5 - 3| \cdot 0.1 = \\ &= 1.3 \end{aligned}$$

d. A ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbéje egy függvény, ami az η értékkészletén van értelmezve és egy y_j értékhez az $\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j) \in \mathbb{R}$ számot rendel.

Az $\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j)$ feltételes várható érték az alábbi módon számolható:

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y_j) = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i|\eta = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_i x_i p_{ij}.$$

Így kapjuk, hogy a ξ -nek az η -ra vonatkozó regressziós görbéje:

$$1 \mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 1) = \frac{1}{0.2}(2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1) = 2.5,$$

$$3 \mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 3) = \frac{1}{0.6}(2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4) = 2.67,$$

$$5 \mapsto \mathbb{E}(\xi|\eta = 5) = \frac{1}{0.2}(2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1) = 2.5.$$

módon definiált függvény.

e. A η -nak az ξ -re vonatkozó regressziós görbéje egy függvény, ami az ξ értékkészletén van értelmezve és egy x_i értékhez az $\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i) \in \mathbb{R}$ számot rendel.

Az $\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i)$ feltételes várható érték az alábbi módon számolható:

$$\mathbb{E}(\eta|\xi = x_i) = \sum_j y_j \mathbb{P}(\eta = y_j|\xi = x_i) = \sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \frac{1}{p_{i\cdot}} \sum_j y_j p_{ij}.$$

Így kapjuk, hogy az η -nak a ξ -re vonatkozó regressziós görbéje:

$$2 \mapsto \mathbb{E}(\eta|\xi = x_1) = \frac{1}{0.4}(1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.1) = 3,$$

$$3 \mapsto \mathbb{E}(\eta|\xi = x_2) = \frac{1}{0.6}(1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.1) = 3.$$

4. Megoldás. • ($\xi \in \{1, B\}$, $B \neq 1$, $\eta \in \{1, A\}$, $A \neq 1 \dots$) A (ξ, η) együttes eloszlása, és a marginálisok az alábbi táblázatban láthatók.

(ξ, η)	1	A	
1	α	β	$\alpha + \beta$
B	γ	δ	$\gamma + \delta$
	$\alpha + \gamma$	$\beta + \delta$	1

A korrelálatlanságban az $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$ egyenletnek kell teljesülni. Mivel

$$\mathbb{E}(\xi) = \alpha + \beta + B(\gamma + \delta);$$

$$\mathbb{E}(\eta) = \alpha + \beta + A(\beta + \delta);$$

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \alpha + A\beta + B\gamma + AB\delta.$$

Így kapjuk, hogy

$$(\alpha + \beta + B(\gamma + \delta))(\alpha + \gamma + A(\beta + \delta)) = \alpha + A\beta + B\gamma + AB\delta$$

- Mivel $\alpha + \beta = 1 - (\gamma + \delta)$ és $\alpha + \gamma = 1 - (\beta + \delta)$, így az egyenlet bal oldala

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + B(\gamma + \delta))(\alpha + \gamma + A(\beta + \delta)) = \\ & = ((1 - (\gamma + \delta)) + B(\gamma + \delta))((1 - (\beta + \delta)) + A(\beta + \delta)) = \\ & = (1 + (B - 1)(\gamma + \delta))(1 + (A - 1)(\beta + \delta)) = \\ & = 1 + (A - 1)(\beta + \delta) + (B - 1)(\gamma + \delta) + (A - 1)(B - 1)(\gamma + \delta)(\beta + \delta). \end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldala:

$$\begin{aligned} & \alpha + A\beta + B\gamma + AB\delta = \\ & = \alpha + ((A - 1) + 1)\beta + ((B - 1) + 1)\gamma + ((A - 1) + 1)((B - 1) + 1)\delta = \\ & \alpha + \beta\gamma\delta + (A - 1)\beta + (B - 1)\gamma + (A - 1)\delta + (B - 1)\delta + (A - 1)(B - 1)\delta = \\ & = 1 + (A - 1)(\beta + \delta) + (B - 1)(\gamma + \delta) + (A - 1)(B - 1)\delta, \end{aligned}$$

azaz $(\gamma + \delta)(\beta + \delta) = \delta$.

- Mivel $\gamma + \delta = 1 - (\alpha + \beta)$ és $\beta + \delta = 1 - (\alpha + \gamma)$, így a $(\gamma + \delta)(\beta + \delta) = \delta$ azonosság alapján könnyen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \delta & = (\gamma + \delta)(\beta + \delta) = (1 - (\alpha + \beta))(1 - (\alpha + \gamma)) = \\ & = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - (\alpha + \gamma + \alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) = \\ & = \delta - \alpha + (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma), \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$.

- A kapott $\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$ összefüggésből az $\alpha + \beta = 1 - (\gamma + \delta)$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) = (1 - (\gamma + \delta)(\alpha + \gamma)) = (\alpha + \gamma) - (\gamma + \delta)(\alpha + \gamma),$$

amiből kapjuk, hogy $(\alpha + \beta)(\beta + \delta) = \beta$.

- Az $\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$ összefüggésből az $\alpha + \gamma = 1 - (\beta + \delta)$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta)(1 - (\beta + \delta)) = \alpha + \beta - (\alpha + \beta)(\beta + \delta),$$

amiből kapjuk, hogy $(\alpha + \beta)(\beta + \delta) = \beta$, azaz a ξ és az η valószínűségi változók függetlenek.

5. Megoldás. • A (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	2	
0	0.08	0.12	0.2	0.4
1	12	0.18	3	0.6
	0.2	0.3	0.5	1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.6 = 0.6, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 0.6 - 0.6^2 = 0.24, \\ \mathbb{E}(\eta) &= 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 = 1.3, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 = 2.3, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 2.3 - 1.3^2 = 0.61, \\ \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= 1 \cdot 1 \cdot 0.18 + 1 \cdot 2 \cdot 0.3 = 0.78, \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0.78 - 0.6 \cdot 1.3 = 0\end{aligned}$$

Így korrelálatlanok, de nem függetlenek.

6. Megoldás. • Legyen a (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	
0	α	0	α
1	0	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$
	α	$1 - \alpha$	1

Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\eta) = 1 - \alpha, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= \mathbb{E}(\eta^2) = 1 - \alpha, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\eta) = (1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 = \alpha(1 - \alpha), \\ \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= 1 - \alpha, \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = (1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 = \alpha(1 - \alpha), \\ r(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} = 1.\end{aligned}$$

Ez a példa azért tanulságos, mert $-1 \leq r(\xi, \eta) \leq 1$, így láttunk példát arra az esetre, amikor $r(\xi, \eta) = 1$.

7. Megoldás. • Legyen a (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	
0	0	α	α
1	$1 - \alpha$	0	$1 - \alpha$
	$1 - \alpha$	α	1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 1 - \alpha, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 1 - \alpha, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = (1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 = \alpha(1 - \alpha), \\ \mathbb{E}(\eta) &= \alpha, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= \alpha, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha), \\ \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= 0, \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = -\alpha(1 - \alpha), \\ r(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-\alpha(1 - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} = -1. \end{aligned}$$

Ez a példa azért tanulságos, mert $-1 \leq r(\xi, \eta) \leq 1$, így konkrét példát látunk arra, amikor $r(\xi, \eta) = -1$.

8. Megoldás. $\xi \in \{0, 1\}$, $\eta \in \{0, 1, 2\}$. Az egyszerűség kedvéért használjuk a $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi = i, \eta = j)$ jelölést. Így $p_{ij} = 0$, ha $i + j \neq 2$, és

$$p_{i(2-i)} = \frac{\binom{1}{i} \binom{2}{2-i}}{\binom{3}{2}} \quad (i = 0, 1).$$

$$p_{02} = \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}, \quad p_{11} = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Az együttes és a marginális eloszlások:

(ξ, η)	0	1	2	
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{E}(\eta) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \frac{2}{3},$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{9},$$

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{2}{9}}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}} = -\frac{2}{2} = -1.$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}([\xi, \eta]^T) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(\xi) & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & \mathbb{D}^2(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

9. Megoldás. $\xi \in \{0, 1, 2\}$, $\eta \in \{0, 1, 2\}$. Az egyszerűség kedvéért használjuk a $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi = i, \eta = j)$ jelölést. Így $p_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, és

$$p_{i(2-i)} = \binom{2}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{2-i} \quad (i = 0, 1, 2).$$

$$p_{02} = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad p_{11} = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}, \quad p_{20} = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{9}.$$

Az együttes és a marginális eloszlások:

(ξ, η)	0	1	2	
0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \\ \mathbb{E}(\eta) &= 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \\ \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}, \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}, \\ r(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = -1, \\ \mathbb{E} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ \text{var}([\xi, \eta]^T) &= \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(\xi) & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & \mathbb{D}^2(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

10. Megoldás. *a. Az (X, Y, Z) valószínűségi vektorváltozó a $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ értékeket tudja felvenni az alábbi valószínűségekkel:*

$$\begin{aligned}p_{011} &= \frac{\binom{2}{0} \binom{1}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} & p_{110} &= \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6} \\ p_{101} &= \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{0} \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6} & p_{200} &= \frac{\binom{2}{2} \binom{1}{0} \binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Az (X, Y) vektorváltozó együttes eloszlása:

(X, Y)	0	1	2	
0	0	$p_{011} = \frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$p_{101} = \frac{2}{6}$	$p_{110} = \frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
2	$p_{200} = \frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	1

b.

- X hipergeometrikus eloszlású $N = 4$, $s = 2$, $N - s = 2$, $n = 2$ paraméterekkel, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{s}{N} = 2 \cdot \frac{2}{4} = 1,$$

$$\mathbb{D}^2(X) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right) = 2 \frac{4-2}{4-1} \frac{2}{4} \left(1 - \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

- Az Y és Z hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változók $N = 4$, $s = 1$, $N - s = 3$, $n = 2$ paraméterekkel, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = n \frac{s}{N} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(Z) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right) = 2 \frac{4-2}{4-1} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

- Az (X, Y) és (X, Z) azonos eloszlású valószínűségi változók ($K_1 = 2$, $K_1 = 1$), így kapjuk hogy

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, Z) = -n \frac{N-n}{N-1} \frac{K_1}{N} \frac{K_2}{N} = -2 \frac{4-2}{4-1} \frac{2}{4} \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}.$$

- Mivel $K_2 = K_3 = 1$, így kapjuk, hogy

$$\text{cov}(Y, Z) = -n \frac{N-n}{N-1} \frac{K_2}{N} \frac{K_3}{N} = -2 \frac{4-2}{4-1} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

A kapott eredményeket összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X, Y, Z)^T = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(X) & \text{cov}(X, Y) & \text{cov}(X, Z) \\ \text{cov}(X, Y) & \mathbb{D}^2(Y) & \text{cov}(Y, Z) \\ \text{cov}(Z, X) & \text{cov}(Z, Y) & \mathbb{D}^2(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

11. Megoldás. .

a. Az (X, Y, Z) valószínűségi vektorváltozó a $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ értékeket tudja felvenni, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, így az alábbi valószínűségeket kapjuk:

$$p_{002} = \frac{2!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}; \quad p_{011} = \frac{2!}{1!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{8}; \quad p_{020} = p_{002} = \frac{1}{16};$$

$$p_{101} = \frac{2!}{1!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}; \quad p_{110} = p_{101} = \frac{1}{4}; \quad p_{200} = \frac{2!}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Az (X, Y) vektorváltozó együttes eloszlása:

(X, Y)	0	1	2	
0	$p_{002} = \frac{1}{16}$	$p_{011} = \frac{1}{8}$	$p_{020} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$p_{101} = \frac{1}{4}$	$p_{110} = \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$p_{200} = \frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

b.

- X binomiális eloszlású $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X) = np = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$\mathbb{D}^2(X) = np(1-p) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Az Y és Z binomiális eloszlású valószínűségi változók $n = 2$, $p = \frac{1}{4}$ paraméterekkel, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = np = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(Z) = np(1-p) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

- Az (X, Y) és (X, Z) azonos eloszlású valószínűségi változók polinomiális eloszlásúak $n = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, így kapjuk hogy

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, Z) = -np_1p_2 = -2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

- Az (Y, Z) valószínűségi változó polinomiális eloszlású $n = 2$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, így kapjuk, hogy

$$\text{cov}(Y, Z) = -np_2p_3 = -2\frac{1}{4}\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

A kapott eredményeket összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X, Y, Z)^T = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(X) & \text{cov}(X, Y) & \text{cov}(X, Z) \\ \text{cov}(X, Y) & \mathbb{D}^2(Y) & \text{cov}(Y, Z) \\ \text{cov}(Z, X) & \text{cov}(Z, Y) & \mathbb{D}^2(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

12. Megoldás.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\min}(x) &= \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < x) = 1 - \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \geq x) = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \xi_3 \geq x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \geq x)\mathbb{P}(\xi_2 \geq x)\mathbb{P}(\xi_3 \geq x) = 1 - (1 - \mathbb{F}_1(x))(1 - \mathbb{F}_2(x))(1 - \mathbb{F}_3(x)) \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \mathbb{F}_{\max}(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < x, \xi_3 < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < x)\mathbb{P}(\xi_3 < x) = \\ &= \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(x)\mathbb{F}_3(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

13. Megoldás. Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amely az x_1, x_2, \dots, x_n értékeket veszi fel $p_i = \mathbb{P}(\xi = x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségekkel. Ekkor az eloszlás és eloszlásfüggvény között az alábbi kapcsolat áll fenn.

$$\mathbb{F}(x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\mathbb{F}(x) = 1, \text{ ha } x > x_n.$$

Másrészt

$$p_k = \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=1}^{k-1} p_i = \mathbb{F}(x_{k+1}) - \mathbb{F}(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$p_n = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = 1 - \mathbb{F}(x_n).$$

a. $A \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

- $\xi =$ kockával dobott szám eloszlása és eloszlásfüggvénye:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{F}(x_i)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$

- $A \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ eloszlása és várható értéke: Először meghatározzuk az \mathbb{F}_{\min} eloszlásfüggvényt

$$\mathbb{F}_{\min}(x) = 1 - (1 - \mathbb{F}(x))^3 \quad (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

összefüggés felhasználásával és abból számoljuk vissza a $\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ eloszlást.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{F}_{\min}(x_i)$	0	$\frac{91}{216}$	$\frac{152}{216}$	$\frac{189}{216}$	$\frac{208}{216}$	$\frac{215}{216}$
p_i	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$\mathbb{F}_{\min}(1) = 1 - (1 - \mathbb{F}(1))^3 = 1 - (1 - 0)^3 = 0;$$

$$\mathbb{F}_{\min}(2) = 1 - (1 - \mathbb{F}(2))^3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{91}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\min}(3) = 1 - (1 - \mathbb{F}(3))^3 = 1 - \left(1 - \frac{2}{6}\right)^3 = \frac{152}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\min}(4) = 1 - (1 - \mathbb{F}(4))^3 = 1 - \left(1 - \frac{3}{6}\right)^3 = \frac{189}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\min}(5) = 1 - (1 - \mathbb{F}(5))^3 = 1 - \left(1 - \frac{4}{6}\right)^3 = \frac{208}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\min}(6) = 1 - (1 - \mathbb{F}(6))^3 = 1 - \left(1 - \frac{5}{6}\right)^3 = \frac{215}{216}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \frac{1}{216}(1 \cdot 91 + 2 \cdot 61 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1) = \frac{441}{216} = \frac{49}{24} = 2.017.$$

b. $\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

- **A $\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ eloszlása és várható értéke:** Először meghatározzuk az \mathbb{F}_{\max} eloszlásfüggvényt

$$\mathbb{F}_{\max}(x) = (\mathbb{F}(x))^3 \quad (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

összefüggés felhasználásával és abból számoljuk vissza a $\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ eloszlást.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{F}_{\max}(x_i)$	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{64}{216}$	$\frac{125}{216}$
p_i	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$

$$\mathbb{F}_{\max}(1) = (\mathbb{F}(1))^3 = (0)^3 = 0;$$

$$\mathbb{F}_{\max}(2) = (\mathbb{F}(2))^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\max}(3) = (\mathbb{F}(3))^3 = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{8}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\max}(4) = (\mathbb{F}(4))^3 = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{27}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\max}(5) = (\mathbb{F}(5))^3 = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{64}{216};$$

$$\mathbb{F}_{\max}(6) = (\mathbb{F}(6))^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \frac{1}{216}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 19 + 4 \cdot 37 + 5 \cdot 61 + 6 \cdot 91) = \frac{1071}{216} = \frac{119}{24} = 4.9583.$$

Érdemes észrevenni, hogy

$$\frac{1}{2}(\mathbb{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) + \mathbb{E}(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3))) = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{24} + \frac{119}{24}\right) = \frac{7}{2} = \mathbb{E}(\xi).$$

Elképzelhető, hogy ez az összefüggés általános érvényű.

7.1. Feltételes várható érték

14. Megoldás.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{E}(\xi | A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_k | A_n) x_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_k \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_k | A_n) \mathbb{P}(A_n)}_{\mathbb{P}(\xi = x_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(\xi = x_k) = \mathbb{E}(\xi). \end{aligned}$$

15. Megoldás. A megoldást általános feltételek mellett adjuk meg. Legyen ξ_1, ξ_2, \dots azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók olyan sorozata, melyeknek létezik $\mathbb{E}(\xi_1)$ közös várható értéke. Legyen továbbá ν egy olyan diszkrét valószínűségi változó, amely nemnegatív egész értékeket vehet fel és létezik várható értéke. (Most az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ν csak pozitív egész értékeket vesz fel.) Legyenek

$$A_i = (\nu = i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Legyen továbbá

$$\xi := \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu.$$

Ekkor az előző tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi | A_n) \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu | \xi = n) \mathbb{P}(\nu = n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{P}(\nu = n) = \mathbb{E}(\xi_1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\nu = n) \cdot n = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\nu). \end{aligned}$$

Innen a feladat már könnyedén megoldható, hiszen ξ_1 egy Bernoulli eloszlású valószínűségi változó $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, ν diszkrét egyenletes eloszlású

$$\mathbb{E}(\nu) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2,$$

így kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu) = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\nu) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

16. Megoldás. Ennek a feladatnak most nem írjuk le a megoldását.

8. Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

8.1. Függetlenség és korrelálatlanság

1. Megoldás. •

- *Marginális eloszlások:*

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 + x^3 y - xy^3) dy = \frac{1}{4} \left[y + x^3 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

ha $x \in [-1, 1]$, így kapjuk, hogy

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in]-1, 1[; \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így kapjuk, hogy $\xi \sim U[-1, 1]$, $\eta \sim U[-1, 1]$

- *A kovariancia meghatározása*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dy dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} xy(1 + x^3 y - xy^3) dy dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (xy + x^4 y^2 - x^2 y^4) dy dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left[x \frac{y^2}{2} + x^4 \frac{y^3}{3} - x^2 \frac{y^5}{5} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{2}{3} x^4 - \frac{2}{5} x^2 \right) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$

Így

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

- *Korrelálatlanság és függetlenség* Látható, hogy ξ és η korrelálatlanok, de nem függetlenek.

2. Megoldás. • Legyen $T = [0, 1] \times [0, 2]$.

a. $(f(x, y) = Cxy, (x, y) \in T)$.

Mivel az együttes eloszlásfüggvény szorzat alakú, és a tartója egy tégl, így a ξ és η függetlenek.

- *A marginálisok eloszlásfüggvényei:*

$$f_1(x) = \begin{cases} C_1 x, & \text{ha } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} C_2 y, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = C_1 \int_0^1 x dx = C_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} C_1,$$

Így $C_1 = 2$.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) dy = C_2 \int_0^2 y dy = C_2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = 2C_2,$$

így $C_2 = \frac{1}{2}$ és $C = C_1 C_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

- *A marginálisok várható értékei:*

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = 2 \int_0^1 x \cdot x dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3};$$

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \cdot y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{4}{3}.$$

- *A kovariancia:* $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, mivel ξ és η függetlenek, tehát korrelálatlanok.

b. • $(f(x, y) = C(xy + 1), (x, y \in T))$.

- *A C konstans értéke:*

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + 1) dy \right) dx = C \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= C \int_0^1 (2x + 2) dx = C [x^2 + 2x]_{x=0}^{x=1} = 3C \quad \implies \quad C = \frac{1}{3}.$$

- *A marginálisok eloszlásfüggvényei:*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 (xy + 1) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3}(x + 1) \quad (x \in [0, 1]),$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (xy + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2 y}{2} + x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} y + 1 \right) = \frac{1}{6}(y + 2)$$

$(y \in [0, 2]).$

- **A marginálisok várható értékei:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(x+1) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{9}; \\ \mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 y(y+2) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy = \frac{1}{6} \left[\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{11}{9}.\end{aligned}$$

- **A kovariancia értéke:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 xy(xy+1) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 y^2 + xy) dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^3}{3} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{8}{3} x^2 + 2x \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{8}{3} \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{9} + 1 \right) = \frac{17}{27}; \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{17}{27} - \frac{5}{9} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{81} = 0.0123.\end{aligned}$$

- c. • $(f(x, y) = xy + x, (x, y) \in T)$.

Mivel az $f(x, y) = (C_1 x)(C_2(y+1))$ és az együttes eloszlásfüggvény tartója (halmaz, ahol nem tűnnek el) egy téglá, így a ξ és η függetlenek.

- **A marginálisok eloszlásfüggvényei:**

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \begin{cases} C_1 x, & \text{ha } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \\ f_2(y) &= \begin{cases} C_2(y+1), & \text{ha } y \in [0, 2]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}\end{aligned}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = C_1 \int_0^1 x dx = C_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} C_1,$$

Így $C_1 = 2$.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) dy = C_2 \int_0^2 (y+2) dy = C_2 \left[\frac{y^2}{2} + 2y \right]_{y=0}^{y=2} = 6C_2,$$

így $C_2 = \frac{1}{6}$.

- **A marginálisok várható értékei:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = 2 \int_0^1 x \cdot x dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 y(y+1) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + y) dy = \frac{1}{6} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

- **A kovariancia:** $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, mivel ξ és η függetlenek, tehát korrelálatlanok.

d. $(f(x, y) = C(x + y), (x, y) \in T)$

- **A C konstans értéke:**

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C \int_0^1 \left(\int_0^2 (x + y) dy \right) dx = C \int_0^1 \left[\frac{xy + y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= C \int_0^1 (2x + 2) dx = C \left[\frac{2x^2}{2} + 2x \right]_{x=0}^{x=1} = 3C \quad \implies \quad C = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- **A marginálisok eloszlásfüggvényei:**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 (x + y) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{xy + y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3}(x + 1) \quad (x \in [0, 1]), \\ f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x + y) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \left(y + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}(2y + 1) \\ &\quad (y \in [0, 2]). \end{aligned}$$

- **A marginálisok várható értékei:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(x+1) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 y(y+2) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (2y^2 + y) dy = \frac{1}{6} \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

- *A kovariancia értéke:*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dydx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 xy(x+y)dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2y + xy^2)dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(2x^2 \frac{8}{3} x \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3}; \\
 \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{2}{3} - \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{36} = \frac{181}{324} = 0.5586.
 \end{aligned}$$

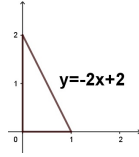
3. Megoldás. A ξ és η eloszlások nem függetlenek, mivel az együttes eloszlásfüggvény tartója nem téglá.

a. $(f(x, y) = xy, (x, y) \in D)$

- *A C konstans értéke:*

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dydx = C \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (xy)dy \right) dx = C \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-2x+2} dx = \\
 &= C \int_0^1 \frac{1}{2} x(-2x+2)dx = C \int_0^1 x(x-1)dx = C \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \\
 &= C \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = C \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \quad \implies \quad C = 12.
 \end{aligned}$$

- *A marginálisok eloszlásfüggvényei:*



$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 12 \int_0^{-2x+2} (xy) dy = 12 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-2x+2} =$$

Mivel $\frac{1}{2}x(-2x+2)^2 = 2x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, így kapjuk, hogy

$$f_1(x) = 24(x^2 - 2x + 1) \text{ ha } x \in [0, 1].$$

Mivel $y = -2x + 2 \iff x = -\frac{1}{2}(y-2) = -\frac{1}{2}y + 1$, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 12 \int_0^{-\frac{1}{2}y+1} xy dx = 12 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}y+1} = 12 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y + 1 \right)^2 y = \\ &= 6 \left(\frac{1}{4}y^3 - y^2 + y \right) = \frac{2}{3} (y^3 - 4y^2 + 4y) \quad (y \in [0, 2]). \end{aligned}$$

- *Az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értéke:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = 12 \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (xy \cdot xy) dy \right) dx = \\ &= 12 \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=-2x+2} dx = \end{aligned}$$

$$\text{Mivel } \frac{1}{3}x^2 \cdot 8(-x+1)^3 = \frac{8}{3}(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1) = \frac{8}{3}(-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2)$$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= 12 \cdot \frac{8}{3} \int_0^1 (-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2) dx = 32 \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= 32 \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15} = 0.5333; \end{aligned}$$

- b. $(f(x, y) = x + y, (x, y) \in D)$

- *A C konstans értéke:*

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (x+y) dy \right) dx =$$

$$= C \int_0^1 \left[\frac{xy + y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-2x+2} dx =$$

$$\text{Mivel } x(-2x+2) + \frac{(-2x+2)^2}{2} = -2x^2 + 2x + 2x^2 - 4x + 2 = -2x + 2,$$

így kapjuk, hogy

$$1 = C \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = C \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= C \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \quad \implies \quad C = 12.$$

- 4. Megoldás.** • *A ξ és η marginális eloszlások azonos eloszlásúak és függetlenek, mivel*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \left(xe^{-kx^2} \right) \left(ye^{-ky^2} \right) \quad (x > 0, y > 0),$$

és az együttes eloszlásfüggvény tartója téglá.

- *a k konstans meghatározása:*

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2k} \int_0^{+\infty} (-2kx)e^{-kx^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2k} \left[e^{-kx^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{2k} \cdot (-1) = \frac{1}{2k} \quad \iff \quad k = \frac{1}{2}.$$

- *a marginális eloszlások:*

$$f_1(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{ha } y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- 5. Megoldás.** • *Az a. és b. feladat közös együttes sűrűségfüggvénye:*

$$f_B(x, y) = \begin{cases} C_B \left(x + \frac{y}{B} \right), & \text{ha } x \in [0, 1], y \in [0, B]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- **A C_B konstans értékének a meghatározása**

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C_B \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\
 &= C_B \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = C_B \int_0^1 \left(Bx + \frac{B}{2} \right) dx = \\
 &= C_B \left[\frac{Bx^2}{2} + \frac{Bx}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = BC_B \quad \implies \quad C_B = \frac{1}{B}.
 \end{aligned}$$

- **A marginálisok várható értékeinek meghatározása:**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\xi_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_B(x, y) dy dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B x \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x^2 + \frac{xy}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(Bx^2 + \frac{B}{2} x \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}; \\
 \mathbb{E}(\eta_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_B(x, y) dy dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B y \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(xy + \frac{y^2}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\frac{B^2 x}{2} + \frac{B^2}{3} x \right) dx = B \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = B \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{12} B.
 \end{aligned}$$

- **A kovariancia értéke:**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\xi_B \cdot \eta_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B xy \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x^2 y + \frac{xy^2}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = \\
 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\frac{B^2 x^2}{2} + \frac{B^2}{3} x \right) dx = B \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} x \right) dx = B \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \\
 &= B \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} B;
 \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi_B, \eta_B) = \mathbb{E}(\xi_B \cdot \eta_B) - \mathbb{E}(\xi_B) \mathbb{E}(\eta_B) = \frac{1}{2} B - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{12} B = -\frac{5}{18} B.$$

6. Megoldás. A marginális sűrűségfüggvények integrálással meghatározhatók az együttes sűrűségfüggvényből

- A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y(x+1)} dy = \frac{1}{x+1} \int_0^{+\infty} y(x+1)e^{-y(x+1)} dy = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (x > 0),$$

ugyanis az integrál egy $\lambda = x+1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke.

$$f_2(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y(x+1)} dx = e^{-y} \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx = e^{-y} \quad (y > 0).$$

8.2. Többdimenziós egyenletes eloszlás

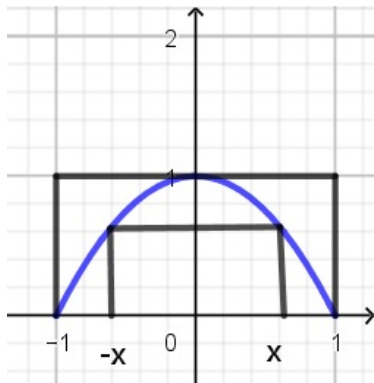
7. Megoldás.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & \text{ha } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A T konstans értéke:

$$T = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{x=-1}^{x=1} = \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}.$$

- A marginálisok sűrűségfüggvényei:

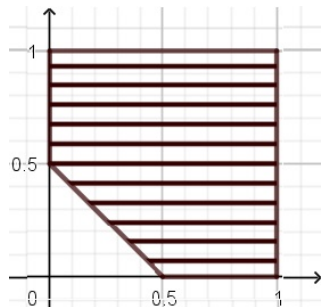


$$f_1(x) = \frac{3}{4} \int_0^{-x^2+1} 1 dy = \frac{3}{4}(-x^2 + 1) \quad (x \in [-1, 1])$$

$$y = -x^2 + 1 \iff x = \pm\sqrt{1-y}$$

$$f_2(x) = \frac{3}{4} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} 1 dx = \frac{3}{4}\sqrt{1-y} \quad (y \in [0, 1]).$$

8. Megoldás. a. $\mathbb{P}(x + y > 0.5)$



$$\mathbb{P}(x + y > 0.5)$$

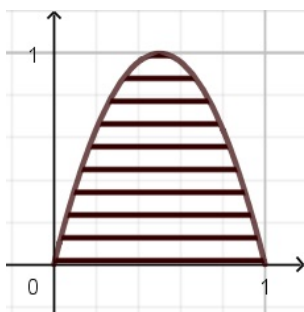
Az $y = -x + 0.5$ egyenest kell ábrázolni.

$$\mathbb{P}(x + y > 0.5) = \frac{1 - \frac{0.5^2}{2}}{1} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

b. $\mathbb{P}(y < 4(-x^2 + x))$

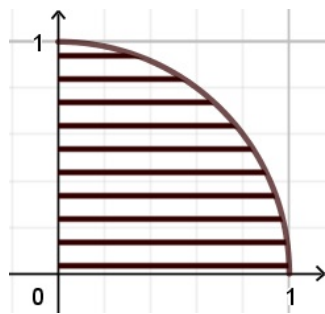
Először ábrázoljuk az $y = 4(-x^2 + x)$ ($x \in [0, 1]$) függvényt. Az ábrázolásnak két módja van

- Teljes négyzet alakra hozunk, $4(-x^2 + x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$, majd függvénytranszformációval ábrázoljuk a függvényt.
- Az ábrázolás másik módja, hogy $4(-x^2 + x)|_{x=0} = 4(-x_2 + x)|_{x=1} = 0$ és $4(-x_2 + x)|_{x=\frac{1}{2}} = 1$.



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(y < 4(-x^2 + x)) &= \frac{4 \int_0^1 (-x^2 + x) dx}{1} = 4 \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= 4 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} = 0.6667. \end{aligned}$$

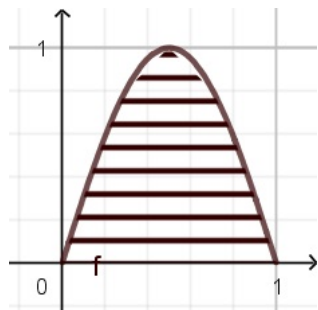
c. $\mathbb{P}(x^2 + y^2 < 1)$



$$\mathbb{P}(x^2 + y^2 < 1) = \frac{\frac{1^2\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} = 0.785.$$

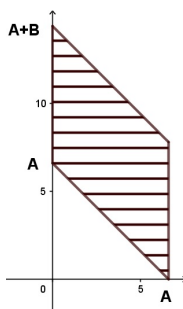
(alkalmas a π értékének a közelítéséhez)

- d. $\mathbb{P}(y < \sin(\pi x))$ Az $y = \sin(\pi x)$ függvény könnyen ábrázolható függvénytranszformációval. A keresett valószínűség integrálással határozható meg (lineáris helyettesítés).



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(y < \sin(\pi x)) &= \frac{\int_0^1 \sin(\pi x) dx}{1} = -\frac{1}{\pi} [\cos(\pi x)]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{2}{\pi} = 0.6366.\end{aligned}$$

- 9. Megoldás.** Oldjuk meg a feladatot paraméteresen. Az A és B paraméterek értékei: $A = 6.6$, $B = 7.8$.



A feladatra két megoldást is adunk.

1. megoldás

- **A C konstans értéke:** $C = \frac{1}{T}$, ahol T a paralelogramma területe. Így kapjuk, hogy

$$C = \frac{1}{AB} = \frac{1}{6.6 \cdot 7.8} = \frac{1}{51.48} = 0.0194.$$

- **A marginálisok várható értékei:** az $(\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\eta))$ koordinátájú pont a paralelogramma súlypontja, így kapjuk, hogy a $(0, A+B)$ és $(A, 0)$ végpontú szakasz felezőpontjának első koordinátája $\frac{A}{2}$, a második koordinátája $\frac{A+B}{2}$, így

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{0 + A}{2} = \frac{A}{2} = 3.3, \quad \mathbb{E}(\eta) = \frac{A + B + 0}{2} = \frac{A + B}{2} = 7.2.$$

- **A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értéke:**

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \frac{1}{AB} \int_0^A \left(\int_{-x+A}^{-x+A+B} xy dy \right) dx = \frac{1}{2AB} \int_0^A [xy^2]_{y=-x+A}^{y=-x+A+B} dx.$$

$$\begin{aligned}
[xy^2]_{y=-x+A}^{y=-x+A+B} &= x(-x+A+B)^2 - (-x+A)^2 = \\
&= x(-x+A+B-x+A)(-x+A+B+x-A) = \\
&= x(-2x+2A+B)B.
\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{1}{2AB} \cdot B \int_0^A (-2x^2 + (2A+B)x)dx = \frac{1}{2A} \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{(2A+B)x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=A} = \\
&= \frac{-A^2}{3} + \frac{(2A+B)A}{4} = \frac{1}{12}(-4A^2 + 6A^2 + 3AB) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) = \\
&= 20.13,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) - \frac{1}{4}(A^2 + AB) = \\
&= \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB - 3A^2 - 3AB) = -\frac{1}{12}A^2 = -3.63.
\end{aligned}$$

2. megoldás Könnyen el tudjuk érni a célunkat integrálás nélkül is. Ehhez először elevevítsük fel egy $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ valószínűségi változóra vonatkozó ismereteinket.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 \quad \text{ha } x \in [0, 1]; \\
\mathbb{E}(\zeta) &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}; \\
\mathbb{E}(\zeta^2) &= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}; \\
\mathbb{D}^2(\zeta) &= \mathbb{E}(\zeta^2) - (\mathbb{E}(\zeta))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

- Keresünk olyan $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affin transzformációt, amely a $]0, 1[\times]0, 1[$ halmazt a $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < A, -x + A < y < -x + A + B\}$ tartományba viszi. Könnyű látni, hogy ez a transzformáció az

$$\mathbb{A}([x, y]^T) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \quad ([x, y]^T \in \mathbb{R}^2).$$

- Könnyű látni, hogy ekkor léteznek olyan $\varphi, \psi \in \mathcal{N}(0, 1)$ független valószínűségi változók, amelyekkel

$$(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\varphi \\ -A\varphi + B\psi + A \end{bmatrix}.$$

- **A marginálisok várható értékeinek és szórásnégyzetének a meghatározása:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(A\varphi) = \frac{A}{2};$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(A\varphi) = A^2\mathbb{D}^2(\varphi) = \frac{A^2}{12};$$

$$\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(-A\varphi + B\psi + A) = -A\mathbb{E}(\varphi) + B\mathbb{E}(\psi) + A = -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + A = \frac{A+B}{2};$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{D}^2(-A\varphi + B\psi + A) = A^2\mathbb{D}^2(\varphi) + B^2\mathbb{D}^2(\psi) = \frac{A^2 + B^2}{12}.$$

- **A cov(ξ, η) meghatározása**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \mathbb{E}(A\varphi(-A\varphi + B\psi + A)) = -A^2\mathbb{E}(\varphi^2) + AB\mathbb{E}(\varphi)\mathbb{E}(\psi) + A^2\mathbb{E}(\varphi) = \\ &= -\frac{A^2}{3} + \frac{AB}{4} + \frac{A^2}{2} = \frac{1}{12}(-4A^2 + 3AB + 6A^2) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) - \frac{1}{4}(A^2 + AB) = -\frac{1}{12}A^2.$$

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-\frac{1}{12}A^2}{\frac{A}{\sqrt{12}} \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{12}} = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

10. Megoldás. Elevenítsük fel a szükséges fogalmakat.

- **Feltételes sűrűségfüggvények:**

$$f(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad f(y|x) := \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

- **Feltételes várható értékek:** Az $\mathbb{E}(\xi|\eta = y_0) \in D_\eta$ és az $\mathbb{E}(\eta|\xi = x_0) \in D_\xi$ feltételes várható értékek. Az $y_0 \in \mathbb{R}$ és az $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$y_0 \rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta = y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y_0) dx = \frac{1}{f_2(y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y_0) dx,$$

$$x_0 \rightarrow \mathbb{E}(\eta|\xi = x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x_0) dy = \frac{1}{f_1(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x_0, y) dy.$$

A feladat megoldásához az alábbi függvényeket kell ismernünk.

- **Az együttes eloszlásfüggvény:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < -3x + 3; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- *A marginális eloszlásfüggvények:*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{-3x+3} 1 dy = -3x + 3, \text{ ha } x \in [0, 1]$$

$$y = -3x + 3 \iff x = \frac{y-3}{-3} = \frac{1}{3}(-y+3)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{3}(-y+3)} 1 dx = \frac{1}{3}(-y+3), \text{ ha } y \in [0, 3].$$

- *A keresett feltételes várható értékek:*

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = 1) = \frac{1}{\frac{1}{3}(-1+3)} \int_0^{\frac{2}{3}} x dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\frac{2}{3})^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$

Érdemes észrevenni, hogy az $y = 1$ egyenletű egyenes a D tartományt az $A(0, 1)$ és $B(\frac{2}{3}, 1)$ végpontú szakaszban metszi, és a végpontok első koordinátáinak a számtani közepe

$$\frac{0 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} = \mathbb{E}(\xi|\eta = 1).$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = 2) = \frac{1}{\frac{1}{3}(-2+3)} \int_0^{\frac{1}{3}} x dx = 3 \cdot \frac{(\frac{1}{3})^2}{2} = \frac{1}{6}.$$

Érdemes észrevenni, hogy az $y = 2$ egyenletű egyenes a D tartományt az $A(0, 2)$ és $B(\frac{1}{3}, 2)$ végpontú szakaszban metszi, és a végpontok első koordinátáinak a számtani közepe

$$\frac{0 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6} = \mathbb{E}(\xi|\eta = 2).$$

$$\mathbb{E}\left(\xi|\eta = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-3 \cdot \frac{1}{2} + 3} \int_0^{\frac{2}{3}} y dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Érdemes észrevenni, hogy az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű egyenes a D tartományt az $A(\frac{1}{2}, 0)$ és $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ végpontú szakaszban metszi, és a végpontok első koordinátáinak a számtani közepe

$$\frac{0 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} = \mathbb{E}\left(\xi|\eta = \frac{1}{2}\right).$$

8.3. Többdimenziós normális eloszlás

11. Megoldás.

Ha $\xi\eta$) egy kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó, akkor az együttes eloszlásfüggvény:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2r \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

ahol $m_1 = \mathbb{E}(\xi)$, $\sigma_1^2 = \mathbb{D}^2(\xi)$, $m_2 = \mathbb{E}(\eta)$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}^2(\eta)$, $r = r(\xi, \eta)$.

12. Megoldás. *Ebben a feladatban kihasználjuk, hogy a ξ és η valószínűségi változók függetlenek. ($m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r$).*

a. $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}};$

A ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, így $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, $r = 0$.

b. $f(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2+2y^2}{8}};$

Könnyű látni, hogy

$$f(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2+2y^2}{8}} = \left(C_1 e^{-\frac{x^2}{8}} \right) \left(C_2 e^{-\frac{y^2}{4}} \right),$$

azaz $\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = 2^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2 = (\sqrt{2})^2)$ független valószínűségi változók, továbbá

$$C_1 C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi},$$

és $r = 0$.

c. $f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}};$

Mivel

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} = \left(C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \left(C_2 e^{-\frac{(y-1)^2}{8}} \right),$$

így $\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = 1)$, $\eta \sim \mathcal{N}(m_2 = 1, \sigma_2^2 = 4)$ független valószínűségi változók.

A konstans ellenőrzése

$$C_1 C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} = \frac{1}{4\pi},$$

és $r = 0$.

13. Megoldás. Ebben a feladatban olyan (ξ, η) kétdimenziós, normális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek, amelyeknek 0 a várható értékük. A marginális eloszlások meghatározásához az együttes eloszlásban szereplő kitevőt teljes négyzet alakra kell hozni.

$$a. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)};$$

- A ξ és az η eloszlása: a kitevő y szerinti teljes négyzetté alakítása:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2) &= -\frac{2}{3} \left(\left(y - \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{x^2}{4} + x^2 \right) = -\frac{2}{3} \left(y - \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}x^2 = \\ &= -\frac{\left(y - \frac{x}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} \quad \frac{4}{3} = \frac{1}{u^2} \quad u = \frac{\sqrt{3}}{u^2} \quad u = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(y - \frac{x}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot I.$$

Az integrandus egy $\mathcal{N} \left(m = \frac{x}{2}, \sigma^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)$ normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a konstansszorosa. Tehát

$$I = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \implies f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tehát $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ és szimmetriai okokból $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ebből kapjuk, hogy $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

- A $\text{cov}(\xi, \eta)$ kiszámítása: Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$, így $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta)$.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)} dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{\left(y - \frac{x}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} - \frac{1}{2}x^2} dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{\left(y - \frac{x}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} dy \right) dx. \end{aligned}$$

A belső integrál egy $\mathcal{N}\left(m = \frac{x}{2}, \sigma^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$ normális eloszlású valószínűségi változó várható értékének a konstansszorosa, tehát

$$I = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \\ r = r(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- A konstans ellenőrzése:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\pi}.$$

- A kitevő ellenőrzése:

$$-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2r \frac{(x - m_1)(x - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = -\frac{2}{3} (x^2 - xy + y^2).$$

b. $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}};$

- A ξ eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az y változó szerint.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2) &= -\left(\frac{1}{2}x^2 - xy + y^2\right) = -\left(\left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) = \\ &= -\left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{1}{2}x)^2} e^{-\frac{1}{4}x^2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}x)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} dx}_{I_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}} \end{aligned}$$

Ugyanis I_1 integrandusának konstansszorosa egy $\mathcal{N}\left(m = \frac{1}{2}x, \sigma^2 = (\sqrt{2})^2\right)$ eloszlású valószínűségi változó, amiből kapjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = (\sqrt{2})^2)$ eloszlású valószínűségi változó.

- *A η eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az x változó szerint.*

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2) &= -\frac{1}{2}((x - y)^2 - y^2 + 2y^2) = -\frac{1}{2}(x - y)^2 - \frac{1}{2}y^2 = \\
 f_\eta(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2} dx}_{I_2 = \sqrt{2\pi}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ugyanis I_2 integrandusa egy $\mathcal{N}(m = x, \sigma^2 = 1)$ eloszlású valószínűségi változó konstansszorososa. Így $\eta \sim \mathcal{N}(m_2 = 0, \sigma_2^2 = 1)$, azaz standard normális eloszlású valószínűségi változó.

- *A $\text{cov}(\xi, \eta)$ kiszámítása: Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$, így $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta)$.*

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}} dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-(y-\frac{1}{2}x)^2 - \frac{1}{4}x^2} dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{4}x^2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-(y-\frac{1}{2}x)^2} dy \right)}_{I_3 = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x} dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dx}}_{I_2 = \sqrt{2\pi}\sqrt{22}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi} \sqrt{22} = 1.
 \end{aligned}$$

Mivel I_3 konstansszorososa egy $\mathcal{N}\left(m = \frac{1}{2}x, \sigma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét kifejező képletnek, illetve I_2 konstansszorososa egy $\mathcal{N}(m = 0, \sigma^2 = \sqrt{2})$ eloszlású valószínűségi változó második momentumának. Így kapjuk, hogy

$$r = r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- *A konstans ellenőrzése:*

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi}.$$

- *A kitevő ellenőrzése:*

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2r \frac{(x - m_1)(x - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \\ & = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{xy}{\sqrt{2} \cdot 1} + \frac{y^2}{1} \right] = -\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}. \end{aligned}$$

c. $f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}};$

- *A ξ eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az y változó szerint.*

$$\begin{aligned} -\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4} &= -\frac{3}{4} \left(y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{3}x^2 \right) = -\frac{3}{4} \left(\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x^2 \right) = \\ &= -\frac{3}{4} \left(y - \frac{1}{3}x \right)^2 - \frac{1}{6}x^2 = -\frac{\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2}{2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2} - \frac{1}{6}x^2, \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2}{2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2}} e^{-\frac{1}{6}x^2} dy = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{1}{6}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2}{2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2}} dx}_{I_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{6}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}x^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ugyanis $I_1 = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}}$, mivel az integrandus konstansszorosra egy $\mathcal{N} \left(m = \frac{1}{3}x, \sigma^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \right)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének, amiből kapjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = (\sqrt{3})^2)$.

- A η eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az x változó szerint.

$$\begin{aligned} -\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4} &= -\frac{1}{4}((x-y)^2 - y^2 + 3y^2) = -\frac{1}{4}(x-y)^2 - \frac{1}{2}y^2 = \\ &= -\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} dx}_{I_2 = \sqrt{2\pi}\sqrt{2} = 2\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ugyanis $I_2 = 2\sqrt{\pi}$ azért teljesül, mert az integrandus konstansszorosa egy $\mathcal{N}(m = y, \sigma^2 = (\sqrt{2})^2)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Így kapjuk, hogy $\eta \sim \mathcal{N}(m_2 = 0, \sigma_2^2 = 1)$, (azaz standard normális) eloszlású valószínűségi változó.

- A $\text{cov}(\xi, \eta)$ kiszámítása: Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$, így $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta)$.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} dx}_{I_3 = \sqrt{2\pi}\sqrt{2}y = 2\sqrt{\pi}y} \right) dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} 2\sqrt{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{I_4 = \sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} 2\sqrt{\pi}\sqrt{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Az $I_3 = 2\sqrt{\pi}y$ értéket onnan kapjuk, hogy az integrandus (megfelelő konstansszorosa) egy $\mathcal{N}(m = 0, \sigma^2 = (\sqrt{2})^2)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét adja, míg az $I_4 = \sqrt{2\pi}$ onnan adódik, hogy az integrandus (megfelelő konstansszorosa) egy standard normális eloszlású valószínűségi változó második momentuma.

- Az $r(\xi, \eta)$ értéke:

$$r = r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- A konstans ellenőrzése:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}.$$

- *A kitevő ellenőrzése:*

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2r \frac{(x - m_1)(x - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \\ & = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{xy}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{1} \right] = -\frac{1}{4} (x^2 - 2xy + 3y^2). \end{aligned}$$

14. Megoldás. *Ebben a feladatban olyan (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek, amelyek marginális eloszlásaiban a várható értékek nem nullák.*

- *Először meg kell határozni a marginálisok várható értékeit. Ez nem nehéz, ugyanis az (m_1, m_2) koordinátájú pontban az együttes sűrűségfüggvénynek lokális (és egyúttal globális) maximuma van, így az m_1 és m_2 értéke parciális deriválással meghatározható.*
- *Eltoljuk az együttes sűrűségfüggvényt úgy, hogy a $(0, 0)$ pont legyen a lokális maximumhelye. Ez az eltolás a szórásnégyzetet, a korrelációs együttható értékét fixen hagyja, ezek az értékek az előző feladatban látottak alapján számolhatók ki.*

a. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}(x^2 + y^2 - xy - 4x - y + 7)}$;

- **A marginális eloszlások várható értékeinek a meghatározása:** *A parciális deriváltat egyenlővé tesszük 0-val, majd az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f(x, y)(2x - y - 4) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f(x, y)(2y - x - 1) = 0 \end{aligned} \right\},$$

így kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned} \right\} \implies m_1 = 3, m_2 = 2.$$

- **Visszahúzás az origóba:** *Az együttes sűrűségfüggvényben a kitevő az alábbi módon változik:*

$$-\frac{2}{3} \left((x+3)^2 + (y+2)^2 - (x+3)(y+2) - 4(x+3) - (y+2) + 7 \right) = -\frac{2}{3} (x^2 - xy + y^2).$$

Azaz a kapott sűrűségfüggvény:

$$f(x+3, y+2) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)} \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}),$$

így a 13. feladat a. pontja alapján kapjuk, hogy

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad r = \frac{1}{2}.$$

b. $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2y^2-2xy-6x+8y+10)};$

- **A marginális eloszlások várható értékeinek a meghatározása:** A parciális deriváltakat egyenlővé tesszük 0-val, majd az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f(x, y)(2x - 2y - 6) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f(x, y)(4y - 2x + 8) = 0 \end{aligned} \right\},$$

így kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 3 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \end{aligned} \right\} \implies m_1 = 2, m_2 = -1.$$

- **Visszahúzás az origóba:** Mivel az eltolás a szórásnégyzetet és a korrelációs együtthatót fixen hagyja, ezért alkalmazhatunk olyan eltolást, amelynek hatására a marginálisok 0 várható értékűvé válnak.

Az együttes sűrűségfüggvényben a kitevő az alábbi módon változik:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left((x+2)^2 + 2(y-1)^2 - 2(x+2)(y-1) - 6(x+2) + 8(y-1) + 10 \right) = \\ = -\frac{1}{2}(x^2 - xy + 2y^2). \end{aligned}$$

Azaz a kapott együttes sűrűségfüggvény

$$f(x+2, y-1) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

így a 13. feladat b. pontja alapján kapjuk, hogy

$$\sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = 1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c. $f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{1}{4}(x^2+3y^2-2xy+8x-16y+24)}.$

- **A marginális eloszlások várható értékeinek a meghatározása:** A parciális deriváltak egyenlővé tesszük 0-val, majd az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f(x, y) \left(-\frac{1}{4} \right) (2x + 2y + 8) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f(x, y) \left(-\frac{1}{4} \right) (6y - 2x - 16) = 0 \end{aligned} \right\},$$

így kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -4 \\ x - 3y &= -8 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 2 \end{aligned} \right\} \implies m_1 = -2, m_2 = 2.$$

- **Visszahúzás az origóba:** Mivel az eltolás a szórásnégyzetet és a korrelációs együtt-hatót fixen hagyja, ezért alkalmazhatunk olyan eltolást, amelynek hatására a marginálisok 0 várható értékűekké válnak.

Az együttes sűrűségfüggvényben a kitevő az alábbi módon változik:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} (x - 2)^2 + 3(y + 2)^2 - 2(x - 2)(y + 2) + 8(x - 2) - 16(y + 2) + 24 &= \\ = -\frac{1}{4} (x^2 - 2xy + 3y^2). \end{aligned}$$

Azaz a kapott együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x - 2, y + 2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}},$$

így a 13. feladat c. pontja alapján kapjuk, hogy

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = 1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

15. Megoldás. Jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a ledobott pontokat. Egy korábbi feladat alapján kapjuk, hogy

- **A minimum várható értéke:**

$$\mathbb{F}_{\min}(x) = 1 - (1 - \mathbb{F}(x))^n = 1 - (1 - x)^n \quad (x \in [0, 1]),$$

$$f_{\min}(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{F}_{\min}(x) = n(1 - x)^{n-1} \quad (x \in [0, 1]),$$

$$\mathbb{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) = n \int_0^1 x(1 - x)^{n-1} dx.$$

Parciális integrálással tudunk tovább haladni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x & g'(x) &= (1-x)^{n-1} \\
 f'(x) &= 1 & g(x) &= -\frac{1}{n}(1-x)^n
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) = \int_0^1 (1-x)^n dx = \underbrace{\left[\frac{x}{n}(1-x) \right]_{x=0}^{x=1}}_{=0} - \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

• **A maximum várható értéke:**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{\max}(x) &= (\mathbb{F}(x))^n = x^n & (x \in [0, 1]), \\
 f_{\max}(x) &= \frac{d}{dx} \mathbb{F}_{\max}(x) = nx^{n-1} & (x \in [0, 1]), \\
 \mathbb{E}(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) &= n \int_0^1 x \cdot x^{n-1} dx = n \int_0^1 x^n dx = n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

Érdemes észrevenni, hogy

$$\frac{1}{2} (\mathbb{E}(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) + \mathbb{E}(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(\xi).$$

ahol $\xi \sim U(0, 1)$.

9. Egyenlőtlenségek, a nagy számok törvényei, központi határeloszlás tétel

9.1. Csebisev egyenlőtlenség

1. Megoldás. • A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(\xi) - \varepsilon < \xi < \mathbb{E}(\xi) + \varepsilon) > 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Először meghatározzuk a pontosságot.

$$\begin{aligned} 1.6 - \varepsilon_1 = 1.220 & \implies \varepsilon_1 = 0.38, \\ 1.6 + \varepsilon_2 = 1.980 & \implies \varepsilon_2 = 0.38, \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.38$. A keresett alsó becslés:

$$1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0.1^2}{0.38^2} = 0.9370.$$

9.2. Bernoulli-féle nagy számok törvénye

2. Megoldás. • A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. Mivel az érme szabályos, $p = \frac{1}{2}$.

$$\left| \frac{k_n}{n} - p \right| < \varepsilon \iff p - \varepsilon \leq \frac{k_n}{n} \leq p + \varepsilon,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \varepsilon_1 = 0.37 & \implies \varepsilon_1 = 0.13, \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_2 = 0.63 & \implies \varepsilon_2 = 0.13, \end{aligned}$$

így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.13$. Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.13^2} \geq 0.77$$

$$n \geq \frac{1}{(1 - 0.77) \cdot 4 \cdot 0.13^2} = 64.3, \text{ azaz } n \geq 64.$$

3. Megoldás. • A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. $\varepsilon = 0.11$. A megbízhatóság:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0.83 \implies n \geq \frac{1}{(1 - 0.83) \cdot 4 \cdot 0.11^2} = 121.5.$$

Így kapjuk, hogy $n \geq 122$.

4. Megoldás. A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. A pontosság: $\varepsilon = 0.04$. A megbízhatóság:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0.8 \quad \implies \quad n \geq \frac{1}{(1 - 0.8) \cdot 4 \cdot 0.04^2} = 781.25.$$

Így kapjuk, hogy $n \geq 782$.

9.3. Moivre-Laplace tétel

5. Megoldás. • Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim B(n = 600, p = \frac{103}{123})$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\xi \in [478, 526]) = \sum_{k=478}^{526} \binom{600}{k} \left(\frac{103}{123}\right)^k \left(\frac{20}{123}\right)^{600-k}$$

módon számolható. Ez a szumma azonban nem számolható könnyen, mivel túl sok tagból áll és a tagokban nagyon nagy számokat kell nagyon kicsi számokkal szorozni. Helyette a Moivre-Laplace tételt alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(478 \leq \xi \leq 526) &\approx \Phi\left(\frac{526 - 600 \cdot \frac{103}{123} + \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) - \Phi\left(\frac{478 - 600 \cdot \frac{103}{123} - \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) = \\ &= \Phi(2.6620) + \Phi(2.7592) - 1 = 0.996 + 0.9971 - 1 = 0.9932. \end{aligned}$$

6. Megoldás. • A feladatot kétféle módon oldjuk meg.

• A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}.$$

Mivel $p = 0.4$, $n = 200$, így az

$$1 - \frac{0.4 \cdot 0.6}{\varepsilon^2 200} = 0.09$$

egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{(1 - 0.9) \cdot 200}} = 0.0363.$$

Így k_n a találatok száma $-\varepsilon \leq \frac{k_n}{n} - p \leq \varepsilon$, amiből kapjuk hogy a találatok száma

$$\underbrace{(-\varepsilon + p) \cdot n}_{72} \leq k_n \leq \underbrace{(\varepsilon + p) \cdot n}_{88}$$

intervallumba fog esni.

- A feladat a **A Moivre-Laplace tétel** segítségével is megoldható.

Tudjuk, hogy a $k_{200} \sim \mathcal{B}(n = 200, p = 0.4)$ eloszlású valószínűségi változó, így $\mathbb{E}(k_{200}) = np = 200 \cdot 0.4 = 80$, $\mathbb{D}(k_n) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{48}$. Szimmetrikus intervallumot nézünk. Legyen $a = 80 - r$, $b = 80 + r$.

Ekkor a Moivre-Laplace tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq k_{200} \leq b) &\sim \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-r}{\sqrt{48}}\right) = 2\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{48}}\right) - 1 > 0.9. \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{48}}\right) \geq 0.9$, visszakeresve $\frac{r}{\sqrt{48}} \geq 1.28$, így $r \geq 12$. Tehát $a = 80 - r = 71$, $b = 80 + r = 89$, azaz

$$71 < k_n < 89.$$

7. Megoldás. Jelölje ξ a fejdobások számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású $\xi \sim \mathcal{B}(n = 200, p = \frac{1}{2})$.

A Moivre-Laplace tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(95 < \xi < 105) &\sim \Phi\left(\frac{105 - 200 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{95 - 200 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \\ &= \Phi(0.71) - \Phi(-0.71) = 2\Phi(0.71) - 1 = 2 \cdot 0.7611 - 1 = 0.5222. \end{aligned}$$

8. Megoldás. Legyen $\xi \sim \mathcal{B}(n = 500, p = \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó. Legyen $a = 220$, $b = 260$. Ekkor egyrészt

$$\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) = \sum_{k=220}^{260} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{500-k} \binom{500}{k} = \frac{1}{2^{500}} \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$$

Másrészt a Moivre-Laplace tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) &= \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{260 - 500 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{220 - 500 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \Phi(0.8944) - \Phi(-2.6833) = \\ &= \Phi(0.89) + \Phi(2.68) - 1 = 0.8133 + 0.9963 - 1 = 0.8096.\end{aligned}$$

A feladat második részére a válasz:

$$\begin{aligned}\sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k} &= 2^{500} \left(\frac{1}{2^{500}} \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k} \right) = 2^{500} \cdot 0.8096 = 10^{\lg(2) \cdot 500 + \lg(0.8096)} = \\ &= 10^{150.4233} = 10^{0.4233} \cdot 10^{150} = 2.6503 \cdot 10^{150}.\end{aligned}$$

9.4. Központi határeloszlás tétel

9. Megoldás. • Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{100}$ független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\lambda = 30$ várható értékkel. Legyen $S_{100} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}$. Ekkor a közös várható érték $m = 30$, a közös szórásnégyzet $\sigma^2 = 30$.

A központi határeloszlás tétel alapján kapjuk, hogy $\eta := \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(3000 \leq \sum_{k=1}^{100} \xi_k \leq 3100\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{3000 - 100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{30}} \leq \eta \leq \frac{3100 - 100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{30}}\right) = \\ &= \Phi(1.83) - \Phi(0) = 0.964 - 0.5 = 0.464.\end{aligned}$$

10. Megoldás. Legyen $\xi \sim \text{Pois}(\lambda = n)$, így

$$\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \sum_{k=0}^n p_k = \mathbb{P}(\xi \leq n).$$

Mivel

$$\mathbb{P}(\xi \leq n) = \mathbb{P}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \xi_n \leq n),$$

ahol η_1, η_2, \dots független $\lambda = 1$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Legyen $S_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Így a Centrális határeloszlás tétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot 1}{n \cdot 1} < 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

11. Megoldás. *a. A függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy*

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\eta_n}(x) &= \mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} < x\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_1} \sqrt[n]{\xi_2} \dots \sqrt[n]{\xi_n} < x\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_1} < x\right) \mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_2} < x\right) \dots \mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_n} < x\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\xi_1 < x^n\right) \mathbb{P}\left(\xi_2 < x^n\right) \dots \mathbb{P}\left(\xi_n < x^n\right) = \mathbb{P}\left(\xi_1 < x^n\right)^n. \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbb{F}_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ x^{n^2}, & \text{ha } x \in [0, 1]; \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

b. Az a. pont eredménye alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{F}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F}_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$$

ami egy olyan diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amely az 1 értéket veszi fel 1 valószínűséggel.

12. Megoldás.

$$\mathbb{P}\left(\sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} < x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\log(\xi_1) + \log(\xi_2) + \dots + \log(\xi_n)}{n} < \log(x)\right).$$

Így az előző feladat alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_{\zeta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1; \\ [\log(x)]^{n^2}, & \text{ha } \log(x) \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [1, e]; \\ 1, & \text{ha } x > e. \end{cases}$$

10. Statisztika I., Pontbecslések

10.1. Alapstatisztikák

1. Megoldás. • 10 elemű minta:

3.6, 1.3, 0.5, 6.2, 1.0, 9.8, 3.0, 3.1, 6.5, 7.6.

a. átlag: $\bar{\xi} = 4.26$,

b. tapasztalati második momentum: $m_2 = 26.9$,

c. tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^2 = 8.7524$,

d. korrigált tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^{*2} = 9.7249$,

e. tapasztalati medián: $\text{med} = 3.35$,

f. medián abszolút eltérés: $\text{MAD} = 2.6$.

10.2. Maximum likelihood módszer

2. Megoldás. •

a. *Bernoulli eloszlás.*

A momentumok módszerével könnyű számolni, ugyanis ha ξ Bernoulli eloszlású p paraméterrel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = p$, azonban $\mathbb{E}(\xi) \sim \bar{\xi}$, így $\hat{p} = \bar{\xi}$.

A maximum likelihood módszer már több számolást igényel.

- **Eloszlás:** $\mathbb{P}(\xi = k) = p^k(1-p)^{1-k}$ ($k \in \{0, 1\}$);
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n p^{\xi_i}(1-p)^{1-\xi_i}$;
- $\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{p} - \frac{1-\xi_i}{1-p} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)\xi_i - p(1-\xi_i)}{p(1-p)} = 0 \quad / \cdot p(1-p)$
 $0 = \sum_{i=1}^n ((1-p)\xi_i - p(1-\xi_i)) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - p\xi_i - p + p\xi_i) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - p) = \sum_{i=1}^n \xi_i - np = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \bar{\xi},$$

tehát ugyanazt kaptuk, mint a momentumok módszerével.

b. **Poisson eloszlás.**

A momentumok módszerével könnyű számolni, ugyanis ha $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \lambda$, de $\mathbb{E}(\xi) \sim \bar{\xi}$, amiből kapjuk, hogy $\hat{\lambda} = \bar{\xi}$.

A likelihood módszer ugyanerre a megoldásra vezet.

- $p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k \in 0, 1, 2, \dots$);
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i!} e^{-\lambda}$;
- $l(\lambda) = \log(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^n (\xi_i \ln(\lambda) - \ln(\xi_i!) - \lambda)$;
- $0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{\lambda} - 1 \right) = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\lambda} - n = 0$;
amiből kapjuk, hogy

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \bar{\xi}.$$

c. **Exponenciális eloszlás.**

A momentumok módszerével könnyű számolni, mivel ha $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, azonban $\mathbb{E}(\xi) \sim \bar{\xi}$, amiből kapjuk, hogy

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{\xi}}.$$

A likelihood módszer ugyanehhez a megoldáshoz vezet.

- $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$);
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda \xi_i}$;
- $l(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^n (\ln(\lambda) - \lambda \xi_i)$;
- $0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} - \xi_i \right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \xi_i$, amiből kapjuk, hogy

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i} = \frac{1}{\bar{\xi}}.$$

d. **Normális eloszlás.**

A momentumok módszerével ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = m$, $\mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2$. Mivel $\mathbb{E}(\xi) \sim \bar{\xi}$, így $\hat{m} = \bar{\xi}$, mivel $\mathbb{D}^2 \sim s_n^2$, így $\sigma^2 \sim s_n^2 = m_2 - \bar{\xi}^2$.

A maximum likelihood módszer alkalmazása sem nehéz, ugyanis

- $f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$) itt most $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, a σ^2 -et tekintjük paraméternek.

- $L(m) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi_i - m)^2}{2\sigma^2}};$
- $l(m) = \ln(L(m)) = \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{(\xi_i - m)^2}{2\sigma^2} \right);$
- $\frac{\partial}{\partial m} l(m) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2(\xi_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} (\sum_{i=1}^n \xi_i - nm) = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \bar{\xi}.$$

A σ^2 ismeretlen paraméter becslése maximum likelihood módszerrel:

- $l(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}} e^{-\frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{2\sigma^2}}$
- $l(\sigma^2) = \ln(L(\sigma^2)) = \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{2\sigma^2} \right);$
- $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} l(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{2} \frac{1}{(\sigma^2)^2} \right) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2\sigma^2}$
így kapjuk, hogy $-\sum_{i=1}^n 1 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 = s_n^2.$$

3. Megoldás. • Legyen a független minta $U(0, \vartheta)$ eloszlásból $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

1. Becslés: $2\bar{\xi}$

ugyanis $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, akkor

$$\mathbb{E}(\bar{\xi}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n} n \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2},$$

így a $2\bar{\xi}$ valóban torzítatlan becslés.

$$\mathbb{D}^2(2\bar{\xi}) = 4 \frac{1}{n^2} \mathbb{D}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \frac{4}{n^2} n \frac{\vartheta^2}{12} = \frac{1}{3n} \vartheta^2$$

2. Becslés: $\frac{n+1}{n} \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

Az \mathbb{F}_{\max} és \mathbb{F}_{\min} -re vonatkozó egy tétel.

1. lépés: Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényekkel $\eta := \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, akkor az η eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{F}_1(x) \mathbb{F}_2(x) \dots \mathbb{F}_n(x).$$

ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x) = \mathbb{P}((\xi_1 < x) \cap (\xi_2 < x) \cap \dots \cap (\xi_n < x)) = \\ &= \mathbb{P}((\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < x) \dots \mathbb{P}(\xi_n < x)) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(x) \dots \mathbb{F}_n(x).\end{aligned}$$

2. lépés: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független minta $U(0, \vartheta)$ eloszlásból, ekkor az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ eloszlás és sűrűségfüggvénye:

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n, & \text{ha } 0 \leq x < \vartheta; \\ 1, & \text{ha } x \geq \vartheta. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\vartheta} \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1}, & \text{ha } x \in (0, \vartheta); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

várható értéke és szórásnégyzete

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= \int_0^\vartheta x \frac{x}{\vartheta} \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\vartheta^2} \int_0^\vartheta x^n dx = \frac{n}{\vartheta^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=\vartheta} = \frac{n}{\vartheta^n} \frac{\vartheta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \vartheta, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= \int_0^\vartheta x^2 \frac{n}{\vartheta} \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^\vartheta x^{n+1} dx = \frac{n}{\vartheta^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_{x=0}^{x=\vartheta} = \frac{n}{n+2} \frac{\vartheta^{n+2}}{\vartheta^n} = \frac{n}{n+2} \vartheta^2, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = \frac{n}{n+2} \vartheta^2 - \left(\frac{n}{n+1} \vartheta \right)^2 = \frac{2n^2 - n}{(n+2)(n+1)^2} \vartheta^2\end{aligned}$$

3. lépés: a ξ_n^* nem jó becslésnek, mivel nem torzítatlan. A torzítatlan becslés $\frac{n+1}{n} \xi_n^*$ ($\frac{n+1}{n} \eta$).

A becslés szórása

$$\mathbb{D}^2 \left(\frac{n+1}{n} \eta \right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n(2n-1)}{(n+2)(n+1)^2} \vartheta^2 = \frac{2n-1}{n(n+2)} \vartheta^2.$$

Tehát a $2\bar{\xi}$ a hatásosabb becslés.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3n} < \frac{2n-1}{n(n+2)} &\iff \frac{1}{3} < \frac{2n-1}{n+2} &\iff n+2 < 6n-3 \\ &\iff 5 < 6n &\iff \frac{5}{6} < n.\end{aligned}$$

11. Statisztika II., Intervallumbecslések

11.1. $1 - \alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum

1. Megoldás. •

$1 - \alpha = 0,95$, akkor $\alpha = 0,05$.

Tudjuk, hogy $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ekkor

$$\mathbb{P} \left(-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - (1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})) = 2\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975.$$

$u_{\frac{\alpha}{2}}$ visszakereshető a táblázatból: $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,960$.

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}$$

ekkor

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

így

$$\bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

azaz

$$1.12 - \frac{0.3162 \cdot 1.960}{\sqrt{10}} < \mu < 1.12 + \frac{0.3162 \cdot 1.960}{\sqrt{10}}$$

így

$$0,92 < \mu < 1.32.$$

2. Megoldás. $1 - \alpha = 0,99$, akkor $\alpha = 0,01$.

Tudjuk, hogy $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ekkor

$$\mathbb{P} \left(-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - (1 - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})) = 2\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995.$$

$u_{\frac{\alpha}{2}}$ visszakereshető a táblázatból: $u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$.

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}$$

ekkor

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

így

$$\bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

azaz

$$1.12 - \frac{0.3162 \cdot 2.576}{\sqrt{10}} < \mu < 1.12 + \frac{0.3162 \cdot 2.576}{\sqrt{10}}$$

így

$$0,8624 < \mu < 1.3776.$$

3. Megoldás. •

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$\mathbb{P} \left(-x \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \leq x \right) = \mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(-x) = 1 - \alpha$$

így

$$\mathbb{F}(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $\mathbb{F}(x) + G(x) = 1$, így $G(x) = 1 - \mathbb{F}(x) = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$, tehát azt az x helyet kell keresni, amelyre $G(x) = 0.25$.

$n = 10$, így $n - 1 = 9$, azaz a 9. sort és a 0.25. oszlopot kell nézni.

$x = 2.262$, így

$$-2.262 \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \leq 2.262$$

Tehát

$$|\bar{\xi} - \mu| \leq \frac{2.262 \cdot s_n^*}{\sqrt{n}}$$

így

$$1.12 - \frac{2.262 \cdot 0.3162}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 1.12 + \frac{2.262 \cdot 0.3162}{\sqrt{10}}$$

azaz

$$0.8938 \leq \mu \leq 1.3462$$

4. Megoldás. • Tudjuk, hogy

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}.$$

Keresünk olyan x_a és x_f számot amelyekre

$$\mathbb{P}\left(x_a \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq x_f\right) = 1 - \alpha,$$

azonban a χ_{n-1} eloszlás sűrűségfüggvénye (jelölje f) \mathbb{R}_+ -on van értelmezve és így nem szimmetrikus az y tengelyre, ezért az $f(-x) = f(x)$ összefüggést nem tudjuk alkalmazni.

Az eloszlásfüggvény legyen \mathbb{F} , és annak kell teljesülnie, hogy

$$\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

de elég ha teljesül az $\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}$. Azonban nem az eloszlásfüggvény van a táblázatban, hanem

$$G(x) + \mathbb{F}(x) = 1, \quad \text{akkor} \quad G(x) = 1 - \mathbb{F}(x)$$

azaz

$$G(x_f) = \frac{\alpha}{2}, \quad G(x_a) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

Mivel $n = 10$, így a táblázat 9. sorát és 0.25, illetve 0.75 oszlopát kell nézni.

$$G(x_f) = 0.025, \quad G(x_a) = 0.975,$$

azaz

$$x_f = 19.023, \quad x_a = 2.7004.$$

Így kapjuk, hogy

$$2.7004 \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq 19.023,$$

$$\frac{ns_n^2}{19.023} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns_n^2}{2.7004}.$$

azaz

$$0.228 \leq \sigma \leq 0.7023.$$

12. Statisztika III., Hipotézisvizsgálat

12.1. Egymintás u-próba

1. **Megoldás.** • *Ha* $\alpha = 0.05$. $n = 10$, $\mu_0 = 1$, $\sigma = 0.001$.

$\alpha = 0.05$, akkor $\Phi(u_t) = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$, így $u_t = 1,960$.

Döntés:

$|u_{sz}| < u_t$, akkor H_0 -t elfogadom (ellenkező esetben elutasítom).

Akkor jó, ha $0.9993 < \bar{\xi} < 1.0006$.

a. $\bar{\xi} = 0.9992$.

Ekkor $u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = -2.5298$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ nem teljesül, így elvetjük.

b. $\bar{\xi} = 0.9995$.

Ekkor $u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = -1.5811$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ teljesül, így elfogadjuk.

c. $\bar{\xi} = 1.0005$.

Ekkor $u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = 1.5811$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ teljesül, így elfogadjuk.

d. $\bar{\xi} = 1.0007$.

Ekkor $u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = 2.2136$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ nem teljesül, így elvetjük.

12.2. Egymintás t-próba

2. **Megoldás.** • $\alpha = 0.05$. $n = 10$, $s_n^* = \sqrt{0.0012}$, $\mu_0 = 1$. α tipikus értéke 0.05, így $t_{n-1}(t_t) = 0.025$, ebből kell visszakeresni α -t.

Döntés:

$|t_{sz}| < t_t$, akkor H_0 -t elfogadom (ellenkező esetben elvetem). $\alpha = 0.05$, így $t_{n-1}(t_t) = 0.025$, így $t_t = 2.262$, ami 9. sor, 0.025 oszlop.

Akkor jó, ha $0.9753 < \bar{\xi} < 1.0247$.

a. $\bar{\xi} = 0.9645$.

Ekkor $t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = -3.2445$.

Mivel $|t_{sz}| < t_t$ nem teljesül, így elvetjük.

b. $\bar{\xi} = 0.9995$.

Ekkor $t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = -1.636$.

Mivel $|t_{sz}| < t_t$ teljesül, így elfogadjuk.

c. $\bar{\xi} = 1.0005$.

Ekkor $t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = 1.9467$.

Mivel $|t_{sz}| < t_t$ teljesül, így elfogadjuk.

d. $\bar{\xi} = 1.0007$.

Ekkor $t_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} = 2.3032$.

Mivel $|t_{sz}| < t_t$ nem teljesül, így elvetjük.

12.3. Kétmintás u-próba

3. Megoldás. • $n = 5$, $m = 6$.

$$u_{sz} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \text{ feltéve, hogy } \mu_1 = \mu_2.$$

$$u_t : \Phi(u_t) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Döntés:

$|u_{sz}| < u_t$, akkor H_0 -t elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

a. $\bar{\xi} = 0.98$, $\bar{\eta} = 1.02$, $\sigma = 0.03$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ nem teljesül, így elvetjük.

b. $\bar{\xi} = 0.99$, $\bar{\eta} = 1.01$, $\sigma = 0.03$.

Mivel $|u_{sz}| < u_t$ teljesül, így elfogadjuk.

13. Illeszkedésvizsgálat

1. Megoldás. • $\alpha = 0.05$.

	1	2	3	4	5	6
η_i	18	26	21	18	15	23

Összesen $n = 60$.

	1	2	3	4	5	6
	16	30	23	16	7	28

$$p_i = \frac{1}{6}, \text{ akkor } np_i = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$$

$$\begin{aligned} \chi_{sz} &= \sum_{i=1}^6 \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i} = \\ &= \frac{1}{20} [(18 - 20)^2 + (26 - 20)^2 + (21 - 20)^2 + (17 - 20)^2 + (15 - 20)^2 + (23 - 20)^2] = \\ &= \frac{1}{20} (2^2 + 6^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 3^2) = \frac{1}{20} (4 + 36 + 1 + 9 + 25 + 9) = \\ &= \frac{84}{20} = 4.2 \end{aligned}$$

$\chi_t : \chi_{0.05;5}$

$$\chi_5 = 0.05, \chi_t = 16.750.$$

$\chi_{sz} < \chi_t$ teljesül, így elfogadjuk H_0 -t.