Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Ezt a jegyzetet Villőnek és Bendének ajánlom.

Bevezetés

Hálásan köszönöm Glavositsné Holló Anikó segítségét.
Hallhatóimnak sikeres felkészülést kívánok.

Miskolc, 2023. szeptember 01. Glavosits Tamás

Tartalomjegyzék

1. Halmazok, kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező **1**
1.1. Matematikai alapok . . . 1
1.1.1. Számhalmazok . . . 1
1.1.2. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek . . . 1
1.2. Kombinatorika . . . 3
1.2.1. Matematikai eszközök . . . 3
1.2.2. A Kombinatorika hat alapfeladata . . . 4
1.2.3. Permutációk . . . 4
1.2.4. Kiválasztásos feladatok . . . 5
1.3. A klasszikus valószínűségi mező . . . 9
1.4. Kérdések és feladatok . . . 11

2. Golyóhúzás urnából, a valószínűség geometriai kiszámítási módja, a Kolmogorov féle valószínűségi mező **13**
2.1. Golyóhúzás urnából . . . 13
2.1.1. Visszatevés nélküli golyóhúzás . . . 14
2.1.2. Visszatevéses golyóhúzás . . . 15
2.2. A valószínűség geometriai kiszámítási módja . . . 15
2.3. Kolmogorov-féle valószínűségi mező . . . 16
2.3.1. A σ-algebra fogalma és tulajdonságai . . . 16
2.3.2. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező . . . 18
2.3.3. A valószínűség tulajdonságai . . . 19
2.3.4. A valószínűség folytonossága . . . 21
2.3.5. A valószínűség néhány további egyszerű tulajdonsága . . . 22
2.4. Kérdések és feladatok . . . 22

3. Feltételes valószínűség, Bayes tétel, Események függetlensége **24**
3.1. A feltételes valószínűség fogalma és tulajdonságai . . . 24
3.2. Bayes tétel . . . 25

3.2.1. Bayes-formula . . . 25
3.2.2. A teljes valószínűség tétele . . . 26
3.2.3. A Bayes tétel . . . 26
3.2.4. A láncszabály . . . 27
3.3. Események függetlensége . . . 28
3.3.1. Két esemény függetlensége . . . 28
3.3.2. Véges sok esemény páronkénti és teljes függetlensége . . . 29
3.3.3. Eseménysorozat páronkénti és teljes függetlensége . . . 30
3.3.4. Események függetlenségének a tulajdonságai . . . 30
3.4. Kérdések és feladatok . . . 31

4. Valószínűségi változók **33**
4.1. Matematikai módszerek . . . 33
4.1.1. Parciális integrálás és lineáris helyettesítés . . . 33
4.2. Valószínűségi változók . . . 34
4.2.1. A valószínűségi változók . . . 34
4.3. Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye és tulajdonágaik . . . 34
4.3.1. Monoton növekvő függvények bal és jobb oldali határértéke . . . 34
4.3.2. Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye . . . 35
4.3.3. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai . . . 36
4.4. Diszkrét valószínűségi változók . . . 36
4.4.1. Diszkrét valószínűségi változók eloszlása és tulajdonságai . . . 37
4.4.2. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke . . . 37
4.5. Folytonos és abszolút folytonos valószínűségi változók . . . 38
4.5.1. Sűrűségfüggvény és tulajdonságai . . . 39
4.5.2. Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke . . . 39
4.6. Intervallumba esés valószínűsége . . . 40
4.6.1. A várható érték tulajdonságai . . . 41
4.7. Momentumok és centrált momentumok . . . 43
4.7.1. A szórásnégyzet és szórás . . . 43
4.8. Nemnegatív, abszolút folytonos eloszlások momentumai . . . 45
4.9. Példák . . . 46
4.10. Ellenőrző kérdések és feladatok . . . 51

5. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók **53**
5.1. Matematikai eszközök . . . 53
5.1.1. Valószínűségi változó generátorfüggvénye . . . 53
5.1.2. Független összeg meghatározása konvolúcióval és generátorfüggvény segítségével . . . 54

5.1.3. A geometriai sor összegképlete . . . 56
5.2. Nevezetes diszkrét eloszlások . . . 56
5.2.1. A diszkrét egyenletes eloszlás . . . 57
5.2.2. A Bernoulli eloszlás . . . 57
5.2.3. A geometriai eloszlás . . . 58
5.2.4. Negatív binomiális . . . 59
5.2.5. A binomiális eloszlás . . . 61
5.2.6. A hipergeometrikus eloszlás . . . 62
5.2.7. A Poisson eloszlás . . . 63
5.2.8. Nevezetes diszkrét eloszlások generátorfüggvényei . . . 64
5.2.9. Határérték tételek . . . 65

6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók 67
6.1. Matematikai eszközök . . . 67
6.1.1. Valószínűségi változó karakterisztikus függvénye . . . 67
6.1.2. Független abszolút folytonos eloszlások összegének meghatározása . . . 68
6.1.3. A változók cseréjének (transzformációjának) a szabálya . . . 70
6.2. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók . . . 71
6.2.1. Az egyenletes eloszlás . . . 71
6.2.2. Az exponenciális eloszlás . . . 73
6.2.3. A normális eloszlás . . . 74
6.2.4. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások karakterisztikus függvényei . . . 78
6.2.5. Független normális eloszlások összege . . . 79
6.3. Standard normális eloszlásból származó további eloszlások . . . 81
6.3.1. Az n szabadságfokú χ^2 eloszlás . . . 81
6.3.2. Az n szabadságfokú t eloszlás . . . 82
6.3.3. Az F eloszlás . . . 82
6.3.4. A lognormális eloszlás . . . 83
6.4. Kiegészítés . . . 85
6.4.1. A Γ és a B függvények . . . 85
6.4.2. A Γ függvény tulajdonságai . . . 86
6.4.3. A Γ eloszlás . . . 88
6.4.4. A B eloszlás . . . 89
6.4.5. Cauchy eloszlás . . . 89
6.5. Ellenőrző kérdések és feladatok . . . 91

7. Valószínűségi vektorváltozók (kétdimenziós eset) 93
7.1. Valószínűségi vektorváltozók . . . 93
7.1.1. Valószínűségi vektorváltozók kétféle értelmezése . . . 93

7.1.2. Az együttes eloszlásfüggvény és tulajdonságai . . . 94
7.1.3. Diszkrét és abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók . . . 95
7.1.4. Valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásai . . . 97
7.2. A kovariancia fogalma és tulajdonságai . . . 99
7.2.1. A kovariancia fogalma . . . 99
7.2.2. A kovariancia tulajdonságai . . . 99
7.3. A korrelálatlanság és a függetlenség kapcsolata . . . 102
7.3.1. Valószínűségi változók függetlensége . . . 102
7.3.2. Valószínűségi változók függetlenségének ekvivalens megfogalmazásai, illetve egy következménye . . . 103
7.3.3. A függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata . . . 105
7.4. A korrelációs együttható . . . 106
7.5. Ellenőrző kérdések és feladatok . . . 107

8. Valószínűségi vektorváltozók II., nevezetes valószínűségi vektorváltozók 109
8.1. Matematikai alapok . . . 109
8.1.1. Vektorok és mátrixok transzponáltjai . . . 109
8.1.2. Mátrixok szorzata . . . 110
8.1.3. Mátrix determinánsa . . . 111
8.1.4. Mátrix inverze . . . 114
8.2. Valószínűségi vektorváltozók és együttes eloszlásfüggvényük . . . 115
8.2.1. A valószínűségi vektorváltozók (n-dimenziós eset) . . . 115
8.2.2. Valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlásfüggvénye . . . 116
8.2.3. Valószínűségi vektorváltozó téglába esésének valószínűsége . . . 116
8.2.4. Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai . . . 118
8.3. Valószínűségi vektorváltozók fajtái . . . 119
8.3.1. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók . . . 119
8.3.2. Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók . . . 120
8.4. Valószínűségi vektorváltozó várható érték vektora és variancia mátrixa . . . 121
8.4.1. A várható érték vektor . . . 121
8.4.2. A variancia mátrix . . . 122
8.4.3. Minimum és maximum eloszlása . . . 124
8.5. Nevezetes diszkrét valószínűségi vektorváltozók . . . 125
8.5.1. A polinomiális eloszlás . . . 125
8.5.2. Polihipergeometrikus eloszlás . . . 127
8.6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók . . . 129
8.6.1. Többdimenziós egyenletes eloszlás . . . 129
8.6.2. Többdimenziós normális eloszlás . . . 131
8.6.3. 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók . . . 132

9. Egyenlőtlenségek, nagy számok törvényei, Központi határeloszlás tétel, további mérőszámok **134**
9.1. Konvergencia fajták . . . 134
9.2. Egyenlőtlenségek . . . 135
9.2.1. Markov egyenlőtlenség . . . 135
9.2.2. Csebisev egyenlőtlenség . . . 135
9.3. A nagy számok törvényei . . . 136
9.3.1. A nagy számok gyenge törvényei . . . 136
9.3.2. A nagy számok erős törvényei . . . 138
9.4. A centrális határeloszlás tétel . . . 138
9.4.1. A központi határeloszlás tétel illusztrációja . . . 138
9.5. Moivre-Laplace tétel . . . 142

10. Statisztika I. Pontbecslések **144**
10.1. Szükséges matematikai előismeretek . . . 144
10.2. A statisztika részterületei . . . 145
10.2.1. Minta és mintarealizáció . . . 146
10.2.2. A statisztika, torzítatlan és konzisztens becslések . . . 146
10.3. Alapstatisztikák . . . 147
10.3.1. Átlag . . . 147
10.3.2. Empirikus és korrigált empirikus szórásnégyzet . . . 148
10.3.3. Empirikus medián és medián abszolút eltérés . . . 151
10.3.4. Tapasztalati eloszlásfüggvény . . . 152
10.4. Becslési módszerek . . . 153
10.4.1. Maximum likelihood módszer . . . 153
10.4.2. Momentumok módszere . . . 154

11. Statisztika II., Intervallumbecslések **155**
11.1. Szükséges matematikai előismeretek . . . 155
11.1.1. A Γ függvény . . . 155
11.1.2. A $\mathcal{B}$ függvény . . . 155
11.2. A normális eloszlásból származtatott eloszlások . . . 156
11.2.1. Khi-négyzet eloszlás . . . 156
11.2.2. Student eloszlás . . . 156
11.2.3. Fisher-Snedecor eloszlás . . . 157
11.2.4. Érdekesség: $\Gamma_{n,\lambda}$ eloszlás . . . 157
11.3. $1-\alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum . . . 157
11.4. Fontosabb intervallumbecslések . . . 158

11.4.1. μ-t becsüljük, σ^2 ismert . . . 158
11.5. μ-t becsüljük, σ^2 ismeretlen . . . 159
11.5.1. Az ismeretlen σ^2 paraméterre vonatkozó konficencia intervallum szerkesztése. . . . 160

12.Statisztika III., Hipotézisvizsgálat **162**
12.1. Hipotézisvizsgálat . . . 162
12.1.1. Alap és ellenhipotézis . . . 162
12.1.2. A döntés, szignifikancia szint, első és másodfajú hiba . . . 162
12.2. Nevezetes várható értékre vonatkozó próbák . . . 164
12.2.1. Egymintás u-próba . . . 164
12.2.2. Egymintás t-próba . . . 165
12.2.3. Kétmintás u-próba . . . 165
12.2.4. Kétmintás t-próba . . . 166
12.2.5. F-próba (a két minta szórásnégyzeteinek egyenlősége) . . . 167
12.3. Szórásnégyzetre vonatkozó próba . . . 167
12.3.1. χ^2 próba . . . 167
12.4. Illeszkedésvizsgálat . . . 168

13.Függelék **169**
13.1. Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező . . . 169
13.1.1. A kombinatorika 6 alapfeladatának faktorizáció-mentes tárgyalása . . . 169
13.1.2. A Poincare formula . . . 172
13.2. Golyóhúzás urnából,
Kolmogorov féle valószínűségi mező . . . 172
13.2.1. Motiváció a Kolmogorov féle valószínűségi mező fogalmához . . . 172
13.2.2. A valószínűség folytonossága, és a tétel következményei . . . 173
13.2.3. A valószínűség σ-szubadditivitása . . . 175
13.3. Feltételes valószínűség, Bayes tétel,Események függetlensége . . . 175
13.3.1. A feltételes valószínűség tulajdonságai . . . 175
13.3.2. Valószínűségi változók függetlensége . . . 177
13.4. Valószínűségi változók . . . 178
13.4.1. Motiváció a valószínűségi változó és a várható érték fogalmához . . . 178
13.4.2. Intervallumba esés valószínűsége . . . 179
13.4.3. Folytonos függvények fajtái . . . 179
13.4.4. A valószínűségi változók fajtái . . . 180
13.4.5. Diszkrét valószínűségi változók . . . 184
13.4.6. Valószínűségi mezők szorzata . . . 184
13.4.7. A hipergeometrikus eloszlás . . . 186

13.4.8. A negatív binomiális eloszlás 188
13.4.9. Nevezetes diszkrét eloszlás-sorozatok határeloszlásai 190
13.4.10. Egy abszolút folytonos valószínűségi változónak sok sűrűségfüggvénye van 191
13.4.11. A standard normális eloszlásról 192
13.5. A várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságai 193

1. fejezet

Halmazok, kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

1.1. Matematikai alapok

1.1.1. Számhalmazok

Az alábbi jelöléseket használjuk:

- **Pozitív egész számok halmaza:** $\mathbb{Z}_+ := \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Egész számok halmaza:** $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **Racionális számok halmaza:** $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_+ \right\}$.
- **Valós számok halmaza:** $\mathbb{R}$ (Gondoljunk arra, hogy a számegyenes pontjai.)
- **Komplex számok halmaza:** $\mathbb{C} := \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol i egy olyan szám, amelyre $i^2 = -1$.

1.1.2. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek

1. Definíció. *Ha a egy elem, A egy halmaz, akkor $a \in A$ jelöli azt a tényt, hogy az a elem hozzátartozik a A halmazhoz, illetve $a \notin A$ azt, hogy nem tartozik hozzá.*

- ***Tartalmazás:*** *Azt mondjuk, hogy* ***az A halmaz részhalmaza a B halmaznak****, ha az A minden eleme egyúttal a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subseteq B$.*
- ***Alaphalmaz:*** *Általában rögzítünk egy X alaphalmazt és az általunk vizsgált halmazok ennek az alaphalmaznak a részhalmazai.*

- ***Hatványhalmaz:*** *Az X halmaz összes részhalmazának a halmazát $\mathcal{P}(X)$ módon jelöljük.*

Példa *Legyen például $X := \{1, 2, 3\}$. Ekkor*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

A fenti példa sugallja az alábbi tételt:

2. Tétel. *n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.*

Ismételjük át a halmazműveleteket.

3. Definíció. *A legfontosabb halmazműveletek a metszet, az unió, a különbség és a komplementer. Legyenek A, B halmazok, az X az alaphalmaz.*

- ***Az A és B halmazok metszete:*** $A \cap B := \{x \in X | x \in A \text{ és } x \in B\}$.
- ***Az A és B halmazok uniója:*** $A \cup B := \{x \in X | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.
- ***Az A és B halmazok különbsége:*** $A \setminus B := \{x \in X | x \in A \text{ és } x \notin B\}$.
- ***Az A halmaz komplementere:*** $\overline{A} := X \setminus A$.
- ***Az A és B halmazok Descartes-szorzata:*** $A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$.

4. Definíció. *Egy X halmazt **véges**nek nevezünk, ha*

- *0 eleme van, azaz ($X = \emptyset$);*
- *1 eleme van, azaz (X egy szingleton);*
- *2 eleme van;* ...

*Egy X halmazt **végtelennek** nevezünk, ha X nem véges.*

5. Definíció. *Egy X véges halmaz elemeinek a számát az X halmaz **számosság**ának nevezzük. Jele: $|X|$.*

6. Definíció. *Egy X végtelen halmazt **megszámlálhatóan végtelen**nek nevezünk, ha az elemei injektív sorozatba rendezhetőek.*

7. Tétel. *Ha A és B véges halmazok, akkor*

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;

- *továbbá, ha A, és B diszjunkt halmazok, (azaz $A \cap B = \emptyset$), akkor*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

8. Definíció. ***Halmazcsalád:*** *Ha egy $\mathcal{A}$ halmaz elemei maguk is halmazok, akkor halmazcsaládról beszélünk. Ha I egy tetszőleges halmaz, akkor az*

$$\mathcal{A} := \{A_i | i \in I\}$$

halmazt I-vel indexelt halmazcsaládnak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$ esetén az $A_i \subseteq X$ egy halmaz.

9. Definíció. *Megszámlálhatóan vételen halmazcsalád metszete és uniója: Legyen A_1, $A_2 \ldots$ halmazok egy sorozata (X az alaphalmaz).*

Megszámlálhatóan végtelen metszet: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \in X | \forall i \in \mathbb{Z}_+ : x \in A_i\}$.

Megszámlálhatóan végtelen unió: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \in X | \exists i \in \mathbb{Z}_+ : x \in A_i\}$.

10. Tétel. *De Morgan azonosságok két halmazra: Legyenek A, B halmazok az X univerzális halmaz részhalmazai. Ekkor*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

11. Tétel. *De Morgan azonosságok: Legyenek A_1, $A_2, \ldots$ halmazok egy sorozata. Ekkor*

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

1.2. Kombinatorika

1.2.1. Matematikai eszközök

Faktoriális függvény:

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdots n & , \text{ ha } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Binomiális együttható:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \dfrac{(n)_k}{k!} & , \text{ ha } 0 \leqslant k \leqslant n; \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Polinomiális együttható:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}, & \text{ha } 0 \leqslant k_i \leqslant n \text{ és } k_1 + \cdots + k_r = n; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

1.2.2. A Kombinatorika hat alapfeladata

A kombinatorika feladata véges halmazok számosságainak a meghatározása. Véges halmazokból adott módon újabb véges halmazokat konstruálunk és az így kapott halmazok számosságait keressük.

A kombinatorika hat alapfeladata:

1. **Permutációk** (ismétlés nélküli és ismétléses),
2. **Variációk** (ismétlés nélküli és ismétléses),
3. **Kombinációk** (ismétlés nélküli és ismétléses).

1.2.3. Permutációk

Amikor permutációkról beszélünk, mindig n elem összes lehetséges sorrendjére gondolunk.

12. Definíció. ***Permutációk:***

1. ***Ismétlés nélküli permutáció*** *n különböző elem összes lehetséges sorrendjét keressük. Ezek számát P_n módon jelöljük.*
2. ***Ismétléses permutáció*** *esetén az n elem közül k_1, k_2, …, k_r azonos tulajdonságú szerepel, amelyek egymás közötti sorrendje nem számít $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Ezek számát $P_n^{k_1,\dots,k_r(i)}$ módon jelöljük.*

13. Példa. *Az $\{A, B, C\}$ elemek összes permutációi*

$$(A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B), (C,B,A).$$

Az A, B, B, C elemek összes ismétléses permutációi

$$(A,B,B,C), (A,B,C,B), (A,C,B,B)$$
$$(B,A,B,C), (B,A,C,B), (B,B,A,C), (B,B,C,A)\,(B,C,B,A), (B,C,A,B),$$
$$(C,B,B,A), (C,B,A,B), (C,A,B,B)$$

halmaz.

14. Tétel. ***Ismétlés nélküli és ismétléses permutációk száma***

$$P_n = n! \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \qquad P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r(i)} = \binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_r} := \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

Bizonyítás.

Az ismétlés nélküli permutációk számának meghatározásához elegendő felismerni, hogy az első helyre n elem kerülhet, ha egyet leírtunk, akkor a második helyre már csak $n-1$ elem kerülhet, és így tovább.

Az ismétléses permutációk számára vonatkozó összefüggést egy konkrét példával illusztráljuk. Keressük az

$$A,\ A,\ B,\ B,\ B,\ C,\ C$$

betűk összes sorrendjét. Az azonos betűket indexeljük, így azok megkülönböztethetőkké válnak.

$$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ C_1,\ C_2.$$

Tekintsünk a kapott elemek két különböző sorrendjét:

$$(A_1, B_2, A_2, C_1, B_3, B_1, C_2) \qquad (A_2, B_1, A_1, C_2, B_2, B_3, C_1)$$

Ezek a sorrendek az ismétléses permutáció szempontjából nem számítanak különbözőnek, mert ugyanazokon a helyeken ugyanazok a betűk állnak, legfeljebb más indexeléssel. Így a keresett sorrendek száma

$$P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

⊠

1.2.4. Kiválasztásos feladatok

A kiválasztásos feladatok esetén az alapszituáció az, hogy n elem közül kiválasztunk k darabot és arra a kérdésre keressük a választ, hogy ez hányféleképpen lehetséges. A kiválasztásos feladatoknak két fajtája van: a variációk és a kombinációk.

15. Definíció. ***Variációk*** *Az n elem k tagú variációi azt jelentik, hogy az n elemből kiválasztunk k darabot úgy hogy számít a kiválasztott elemek sorrendje.*

1. ***Ismétlés nélküli variációk*** *Egy elem legfeljebb egyszer választható. Az n elem k-tagú ismétlés nélküli variációinak számát V_n^k módon jelöljük.*

2. ***Ismétléses variációk*** *Egy elem többször is választható. n elem k-tagú ismétléses variációinak számát $V_n^{k(i)}$ módon jelöljük.*

16. Példa. *Az* $\{1,2,3\}$ *halmaz 2 tagú ismétlés nélküli variációi*

$$(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),$$

a 2 tagú ismétléses variációi

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3).$$

17. Tétel. ***Az*** n ***elem*** k ***tagú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak a száma***

$$V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) := (n)_k, \qquad V_n^{k(i)} = n^k.$$

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete analóg az ismétlés nélküli permutáció esetén megismerttel. Az ismétléses esetben, mivel egy elem többször is választható, ezért az egyes lépésekben nem csökken a lehetőségek száma. ⊠

18. Definíció. ***Kombinációk:*** *Az* n *elem közül úgy választunk ki* k *darabot, hogy nem számít a kiválasztott elemek sorrendje.*

1. ***Ismétlés nélküli kombinációk*** *Egy elem legfeljebb egyszer választható. Az* n *elem* k*-tagú ismétlés nélküli kombinációinak számát* C_n^k *módon jelöljük.*

2. ***Ismétléses kombinációk*** *Egy elem többször is választható. Az* n *elem* k*-tagú ismétléses kombinációinak számát* $C_n^{k(i)}$ *módon jelöljük.*

Érdemes megjegyezni, hogy a permutációk és a variációk mindig sorozatok, az ismétlés nélküli kombinációk részhalmazok, az ismétléses kombinációk pedig ismét sorozatok.

19. Példa. *Az* $\{1,2,3\}$ *halmaz 2 tagú ismétlés nélküli kombinációi*

$$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},$$

a 2 tagú ismétléses kombinációk halmaza a

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3).$$

20. Tétel. ***Az*** n ***elem*** k ***tagú ismétlés nélküli és ismétléses kombinációinak a száma***

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{(n)_k}{k!}, \qquad C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)_k}{k!}.$$

Bizonyítás.

Ismétlés nélküli eset: Két bizonyítást is adunk.

1. Nyilvánvaló, hogy

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

2. A C_n^k visszavezethető ismétléses permutációk számára is. Ehhez indikátorfüggvényeket használunk. Tekintsük például az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazt és a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

indikátorfüggvényt. Ez a függvény az alaphalmaz $\{2,3,5\}$ részhalmazát határozza meg. Az is látszik, hogy két darab nullánk és három darab egyesünk van, melyeknek keressük az összes lehetséges sorrendjét. Így

$$C_5^3 = P_5^{3,2,(i)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3}.$$

Az ismétléses kombinációk számának a meghatározásához két út is vezet.

1. Az első a feladat alábbi átfogalmazása: Hányféleképpen lehet k egyforma levelet betenni n (beszámozott rekeszbe), úgy, hogy egy rekeszbe több (akárhány) levél is kerülhet. Ekkor az ismétléses kombinációkat ismétléses permutációkra vezetjük vissza. Az n rekesz meghatározható $n-1$ (egyforma) válaszfallal, a k levelet k egyforma golyó szimbolizálja. Valahányszor egy golyót berakunk egy rekeszbe, akkor az a rekesz kiválasztásra kerül. Így

$$C_n^{k(i)} = P_{n+k-1}^{n-1,k(i)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

2. A másik út az, hogy n elem k tagú ismétléses kombinációinak számát visszavezetjük $n+k-1$ elem k tagú ismétlés nélküli kombinációinak számára. Ezt az utat is egy konkrét példával illusztráljuk. Tegyük fel, hogy az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz 3 elemű ismétléses kombinációit keressük. Tekintsük például a $(2,3,3)$ sorozatot, tehát a 2 egyszer a 3 kétszer került kiválasztásra. Mivel nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, ezért a kiválasztott elemeket nagyság szerint rendezett sorrendben is leírhatjuk. Az első elemhez adjunk hozzá nullát, a másodikhoz egyet és így tovább:

$$(2,3,3) \qquad \longleftrightarrow \qquad \{2+0, 3+1, 3+2\} = \{2,4,5\} \subseteq \{1,2,\ldots,7\},$$

így bijektív kapcsolat létesíthető az 5 elemű halmaz 3 elemű ismétléses kombinációi és a 7 elemű halmaz 3 elemű ismétlés nélküli kombinációi között. A bemutatott módszerek általános esetben is alkalmazhatók. ⊠

21. Megjegyzés. *Fontos megjegyezni, hogy n elem k tagú ismétlés nélküli kombinációinak a száma egyenlő egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számával.*

Végezetül átismételjük a binomiális és a polinomiális együtthatók néhány tulajdonságát.

22. Tétel. ***A binomiális együtthatók tulajdonságai***

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Bizonyítás. A bizonyítás egyaránt elvégezhető közvetlen számolással, illetve kombinatorikus meggondolások alapján is. ⊠

A fenti három tulajdonság segítségével létrehozható az úgynevezett Pascal háromszög. A Pascal háromszög képzési szabálya:

1. Minden sor egyessel kezdődik és egyesre végződik.
2. Minden olyan elem, amely nem a sor elején, vagy a végén van, a két felette álló összege.

A Pascal háromszög első pár sora az alábbi ábrán látható:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 &
\end{array}$$

A következő, úgynevezett Binomiális tétel megmutatja a kapcsolatot a kéttagú összegben n-edik hatványában fellépő együtthatók és a Pascal $\triangle$ között. Például:

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

és a Pascal $\triangle$ negyedik sorában éppen az 1, 4, 6, 4, 1 számok állnak. (A sorok számozását 0-val kezdjük.)

23. Tétel. ***A binomiális és a polinomiális tétel***

1. ***A binomiális tétel:***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$*;* $a\ b \in \mathbb{R}$ *esetén;*

2. ***A polinomiális tétel:***

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_r=n \\ k_i \geqslant 0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$$

minden $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$*;* $r \in \mathbb{Z}_+$*;* $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_r \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Bizonyítás. Mindkét állítás közvetlenül látható kombinatorikus megfontolások alapján. A binomiális tétel n szerinti teljes indukcióval is bizonyítható, ekkor fel kell használni a binomiális együtthatók fenti három tulajdonságát.

A polinomiális tételt r szerinti teljes indukcióval is lehet igazolni, ebben az esetben az $r = 2$ eset éppen a binomiális tétel. ☒

A valószínűségelméletben a binomiális tétel a binomiális eloszlással, a polinomiális tétel a polinomiális eloszlással van kapcsolatban.

Az ismétlés nélküli permutációk, a variációk, és a kombinációk értelmezhetők bizonyos - függvényeket tartalmazó - halmazok számosságaiként:

$$\begin{aligned}
P_n &= |\{\varphi : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\} \quad (\varphi \text{ bijektív függvény})\}|\,, \\
V_n^k &= |\{\varphi : \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\} \quad (\varphi \text{ injektív függvény})\}|\,, \\
V_n^{k(i)} &= |\{\varphi : \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\} \quad (\varphi \text{ függvény})\}|\,, \\
C_n^k &= |\{\varphi : \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\} \quad (\varphi \text{ szigorúan növekvő függvény})\}|\,, \\
C_n^{k(i)} &= |\{\varphi : \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\} \quad (\varphi \text{ növekvő függvény})\}|\,,
\end{aligned}$$

ahol $|A|$ az A halmaz számosságát jelöli tetszőleges A véges halmaz esetén.

1.3. A klasszikus valószínűségi mező

24. Definíció. *Egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *hármast* ***klasszikus valószínűségi mező****nek nevezzük, ha*

- Ω *egy nemüres véges halmaz. Neve* ***eseménytér****, elemei az* ***elemi események****. (Az elemi események nem események.)*

- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *az* ***események halmaza****, azaz a klasszikus valószínűségi mezőben az eseménytér minden részhalmaza esemény.*

- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *a* ***valószínűség függvény****, amely*

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

módon van definiálva, ahol $|A|$, illetve $|\Omega|$ jelöli az A, illetve az Ω halmazok elemeinek a számát.

Példa *Szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy páratlan számot dobunk?*
Mo.: *Ezt a kísérletet egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ekkor $A = \{1, 3, 5\}$ az az esemény, amelynek a valószínűségét keressük. A keresett valószínűség*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Példa *Szabályos dobókockával 3-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok között legalább 2 hatos szerepel?*
Mo.: *Ezt a kísérletet egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

így az összes esetek száma 6^3.

Ezek közül a kedvező esetek a

$$\mathbb{P}(A) := \{(6, 6, 1), \ldots, (6, 6, 5), (6, 1, 6), \ldots, (6, 1, 5), (1, 6, 6), \ldots, (5, 6, 6), (6, 6, 6)\}$$

halmaz elemei. Így a kedvező esetek száma: $|\mathbb{P}(A)| := 3 \cdot 5 + 1 = 16$, amiből kapjuk, hogy a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{16}{6^3} = \frac{2}{27} = 0.0740.$$

25. Tétel. *Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy klasszikus valószínűségi mező, akkor a $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$*

- ***Nemnegatív****, azaz $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ minden $A \subseteq \Omega$ esetén;*

- ***1-re normált****, azaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;*

- ***Végesen additív**, azaz ha $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunkt események, akkor $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_k))$.*

Bizonyítás.

- A nemnegativitás és az 1-re normáltság nyilvánvaló.
- A véges additivitáshoz tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunkt események. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \frac{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|}{|\Omega|} = \\ = \frac{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_k))$$

⊠

1.4. Kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Definiálja az n elem k-tagú ismétlés nélküli és az ismétléses permutációinak fogalmát és ismertesse a megfelelő képleteket.*
2. *Definiálja az n elem k tagú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak fogalmát és ismertesse a megfelelő képleteket.*
3. *Definiálja az n elem k tagú ismétlés nélküli és ismétléses kombinációinak fogalmát és ismertesse a megfelelő képleteket.*
4. *Definiálja a klasszikus valószínűségi változó fogalmát.*
5. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros, $N-s$ fehér. Visszatevés nélkül kihúzunk n golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül k piros.*
6. *Egy urnában van N golyó, amelyek közül s piros, $N-s$ fehér. Visszatevéssel kihúzunk n golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül k piros.*

Feladatok

1. *Határozza meg az alábbi szummák értékét:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_r=n \\ k_i \geqslant 0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r}.$$

   A második szummában az n és az r rögzített pozitív egészek.

2. *Határozza meg az alábbi szumma értékét:*

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_r=n \\ k_i > 0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r},$$

   ahol az n és az r rögzített pozitív egészek.

3. *Hány megoldása van az*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

   egyenletnek, ha az alaphalmaz $\mathbb{Z}_+$ és k, n rögzített pozitív egészek.

4. *Hány megoldása van az*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

   egyenletnek, ha az alaphalmaz $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ és k, n rögzített pozitív egészek.

5. *Bizonyítsa be az úgynevezett Zhu-Vandermonde azonosságot, mely szerint*

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=m} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_r}{k_r} = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_r}{m},$$

   ahol n_1, n_2, …, n_r rögzített pozitív egészek úgy, hogy $n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leqslant m$.

2. fejezet

Golyóhúzás urnából, a valószínűség geometriai kiszámítási módja, a Kolmogorov féle valószínűségi mező

2.1. Golyóhúzás urnából

Ebben a fejezetben a golyóhúzásnak csak azt a fajtáját tárgyaljuk, amikor kétféle színű golyó van az urnában. Mi a piros és a fehér színeket fogjuk használni.

A golyókat egyesével húzzuk ki az urnából, de a **visszatevés nélküli eset**ben a a kihúzott golyót a húzást követően nem rakjuk vissza az urnába, a **visszatevéses eset**ben visszarakjuk.

Mindkét esetben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

- N számú golyó van az urnában;
- s a piros golyók száma;
- $N - s$ a fehér golyók száma;
- n golyót húzunk ki;
- k jelöli a kihúzott piros golyók számát;
- p_k jelöli azt a valószínűséget, hogy a kihúzott piros golyók száma k.

Az urnában lévő golyók halmazát mindkét esetben jelölje

$$G := \{P_1, P_2, \ldots, P_s, F_1, F_2, \ldots, F_{N-s}\}.$$

Mindkét esetben a p_k valószínűség meghatározása úgy történik, hogy alkalmas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt konstruálunk, amelyben egy A_k esemény bekövetkezése jelenti, hogy a kihúzott golyók közül k piros.

2.1.1. Visszatevés nélküli golyóhúzás

Először konstruáljuk meg az Ω halmazt. Mivel ebben az esetben a kihúzott golyók nem kerülnek vissza az urnába, ezért

$$\Omega := \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n |\ g_j \neq g_k, \text{ ha } j \neq k\}.$$

A keresett valószínűség kiszámítása előtt érdemes észrevenni, hogy a k nem lehet akármekkora, teljesülnie kell az

$$\max(0, n-(N-s)) \leqslant k \leqslant \min(s, n)$$

egyenlőtlenségnek. A $k \leqslant s$ és $k \leqslant n$ feltételek világosak, a $0 \leqslant k$ feltétel is világos. Az $k \leqslant n-(N-s)$ feltétel abból következik, hogyha $N-s$ fehér golyót már kihúztunk, de még nem húztunk ki n db golyót, akkor muszáj még $n-(N-s)$ piros golyót hozzáhúznunk (feltéve, hogy van ennyi).

Kedvező esetek száma: Képzeljük el, hogy kihúztuk az n db golyót és az $1, 2, \ldots, n$ pozíció közül k helyen van piros golyó. Az n hely közül a piros helyeket

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

féleképpen lehet kiválasztani. Ha már a piros és a fehér helyek rögzítve vannak, akkor ezeket a helyeket a megfelelő színű golyókkal

$$V_s^k \cdot V_{N-s}^{n-k} = (s)_k (N-s)_{n-k}$$

féleképpen lehet feltölteni megfelelő színű golyókkal. Így **a kedvező esetek száma:**

$$\binom{n}{k} (s)_k (N-s)_{n-k}.$$

Az összes esetek száma:

$$V_N^n = (N)_n.$$

A keresett valószínűség: könnyen megkapható a kedvező/összes képletet alkalmazásával.

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{k}(s)_k (N-s)_{n-k}}{(N)_n} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}(s)_k (N-s)_{n-k}}{(N)_n} = \frac{\frac{(s)_k}{k!}\frac{(N-s)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N)_n}{n!}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Később látni fogjuk, hogyha ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor ebben az esetben a ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású.

2.1.2. Visszatevéses golyóhúzás

Először konstruáljuk meg az Ω halmazt. Mivel a golyókat a kihúzást követően visszarakjuk az urnába, így

$$\Omega := G \times G \times \cdots \times G = G^n := \{(g_1, \ldots, g_n) |\ g_i \in G \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

A visszatevés nélküli esettel analóg módon kapjuk, hogy

A kedvező esetek száma:

$$C_n^k \cdot V_s^{k(i)} \cdot V_{N-s}^{n-k(i)} = \binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}.$$

Az összes esetek száma:

$$V_N^{n(i)} = N^n.$$

A keresett valószínűség: A kedvező/összes képlet alapján kapjuk, hogy

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{k} s^k (N-s)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \frac{s^k}{N^k} \cdot \frac{(N-s)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{N}\right)^k \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{n-k},$$

ahol $\frac{s}{N}$ annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva az urnából piros golyót húzunk.

Később látni fogjuk, hogy a golyóhúzás urnából visszatevéssel a binomiális eloszlás speciális esete, azaz ha ξ véletlen szám (valószínűségi változó) jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor $\xi \sim B(n, p = \frac{s}{N})$.

2.2. A valószínűség geometriai kiszámítási módja

Legyen $\mathcal{K}$ egy kísérlet. A kísérlet minden lehetséges kimeneteléhez rendeljük hozzá az $\mathbb{R}^n$ egy pontját. A kapott ponthalmazt jelöljük Ω-val. A valószínűség geometriai kiszámítása egy $A \subseteq \Omega$ esemény kiszámítására akkor alkalmazható, ha létezik olyan m mérték (általában ívhossz, felszín, vagy térfogat), amelyre $0 < m(\Omega) < +\infty$ és az $A \in \mathbb{R}^n$ ponthalmaz szintén az m mérték szerint mérhető. Ekkor az A esemény valószínűségét

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

módon számoljuk.

Egy adott esemény kiszámítása geometriai módszerrel modellfüggő, azaz különböző modelleket használva különböző eredményeket kapunk (lásd Bertrand-féle paradoxon).

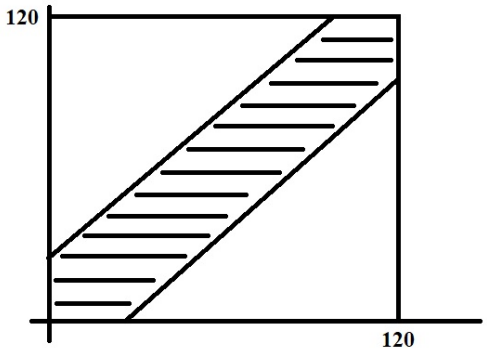
1. Példa. *Két ember déli 12 és délután 2 óra között véletlenszerűen megjelennek egy adott helyen, ahol 20 percet tartózkodnak. mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?*
Mo.:

$$\Omega := [1, 120] \times [0, 120], \qquad A := \{(x, y) \in \Omega \mid \ |x - y| < 20\}.$$

Könnyű látni, hogy

$$|x - y| < 20 \quad \Longleftrightarrow \quad y > x - 20 \text{ és } y < x + 20.$$

A kapott egyenlőtlenségek egy-egy félsíkot határoznak meg, amelyet egymással, illetve az Ω pontjaival összemetszve kapjuk a következő ábrán látható bevonalkázott sávot.



Alkalmazva a valószínűség geometriai kiszámítási módját kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{120^2 - 2 \cdot \frac{100^2}{2}}{120^2} = 1 - \left(\frac{100}{120}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0.3056.$$

2.3. Kolmogorov-féle valószínűségi mező

2.3.1. A σ-algebra fogalma és tulajdonságai

A σ-algebra fogalmához szükségünk van egy halmaz megszámlálhatóan végtelenségének a fogalmára.

2. Definíció. *Egy A halmazt*

- ***véges**nek nevezünk, ha üres, vagy egy eleme van, vagy két eleme van, és így tovább;*
- ***végtelen**nek nevezünk, ha nem véges;*
- ***megszámlálhatóan végtelen**nek nevezünk, ha létezik $\varphi : A \to \mathbb{Z}_+$ bijektív leképezés, illetve röviden elemei sorozatba rendezhetőek;*

- *Egy halmazt **megszámlálható**nak nevezünk, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.*

3. Definíció. *Legyen X egy nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazcsalád. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ **egy σ-algebra X-en**, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *$X \in \mathcal{A}$, azaz az $\mathcal{A}$ halmazcsalád tartalmazza az X alaphalmazt;*
2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} := X \setminus A \in \mathcal{A}$, azaz a $\mathcal{A}$ halmazcsalád minden elemével együtt annak az komplementerét is tartalmazza;*
3. *Ha $A_1, A_2, \dots$ egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, akkor*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

azaz zárt a megszámlálhatóan végtelen unióra nézve.

4. Tétel. *(**A σ-algebra tulajdonságai**) Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra az X halmazon, akkor*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$;*
2. *Ha (A_n) egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, akkor akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$;*
3. *Ha A, $B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$;*
4. *Ha A_1, A_2, …, A_n halmazok egy $\mathcal{A}$-beli véges sorozata, akkor $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$, és $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$;*

(Tehát egy σ-algebra tartalmazza az $\emptyset$ halmazt és zárt a megszámlálható halmazműveletekre nézve.)

Bizonyítás.

1. $\emptyset = \overline{X} \in \mathcal{A}$,
2. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{A}$,
3. $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{A}$,
   $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$,
   $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
4. $A_1 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{A}$,
   $A_1 \cap \dots \cap A_n = \overline{\overline{A_1 \cap \dots \cap A_n}} = \overline{\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$.

⊠

2.3.2. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

5. Definíció. *Az* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *hármast* ***Kolmogorov-féle valószínűségi mező****nek nevezzük, ha*

1. Ω *egy nemüres halmaz, neve* ***eseménytér****, elemei az* ***elemi esemény****ek. Az elemi események nem események.*

2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *egy* σ*-algebra* Ω*-n. Az* $\mathcal{F}$ *az* ***események halmaza****. Tehát az események az* Ω *halmaz bizonyos részhalmazai, amelyek* σ*-algebrát alkotnak* Ω*-n.*

3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *egy függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:*

   I. ***Nemnegatív****, azaz* $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ *minden* $A \in \mathcal{F}$ *esetén;*

   II. ***1-re normált****, azaz* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*;*

   III. σ***-additív****, azaz ha* A_1*,* A_2*, . . . események páronként diszjunkt sorozata, azaz (*$A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, \ldots$ *és* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *ha* $j \neq k$*), akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

   Az I., II., III. axiómákat ***Kolmogorov féle axiómák****nak nevezzük.*

- A Kolmogorov-féle axiómákat úgy kapjuk, hogy a klasszikus valószínűségi mező néhány jó tulajdonságát: a nemnegativitást és az 1-re normáltságot megőrizzük, a véges additivitást pedig σ-additivitásra cseréljük.

- Az axiomatikus tárgyalás nem jelent többet annál, hogy rögzítjük a Kolmogorov féle valószínűségi mező néhány lényeges tulajdonságát, és minden további tulajdonságot ezekből vezetjük le.

- Könnyű látni, hogy a klasszikus valószínűségi mező speciális esete a Kolmogorov félének.

- A valószínűségszámítás egy fejezete egy nagyobb diszciplínának, a mértékelméletnek, mértékelméleti fogalmakat használva az $(\Omega, \mathcal{F})$ egy mérhető tér, amin $\mathbb{P}$ egy véges (egyre normált) mérték.

- Vannak lényeges különbségek a klasszikus valószínűségi mező és általában a Kolmogorov-féle valószínűségi mező között. Klasszikus valószínűségi mezőben egy A esemény valószínűsége pontosan akkor 0, ha az A halmaz üreshalmaz. Kolmogorov féle valószínűségi mezőben előfordulhat, hogy ez nincs így, létezhet olyan A esemény, amelyre $\mathbb{P}(A) = 0$, de $A \neq \emptyset$.

- Hasonló módon, egy Kolmogorov féle valószínűségi létezhet olyan B esemény, amelyre $\mathbb{P}(B) = 1$, de $B \neq \Omega$, azaz $\Omega \setminus B \neq \emptyset$.
- Ha T egy olyan tulajdonság, amelyre $\{\omega \in \Omega |\ T(\omega)\}$ esemény, és ennek az eseménynek 1 a valószínűsége, akkor a T tulajdonságot majdnem biztosan teljesülő tulajdonságnak nevezzük.

2.3.3. A valószínűség tulajdonságai

6. Tétel. *Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, akkor*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. ***A valószínűség véges additivitása**, azaz $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$ minden A_1, A_2, ..., A_n páronként diszjunkt esemény esetén.*
3. ***A komplementer esemény valószínűsége** $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén.*
4. *Ha $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.*
5. ***A valószínűség monotonitása** Ha $A, B \in \mathcal{F}$ olyanok, hogy $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*
6. *Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ eseményre $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$, azaz minden esemény valószínűsége egy $[0, 1]$ intervallumba eső szám.*
7. ***Szita-formula két eseményre** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén.*
8. ***Szita-formula három eseményre** $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ tetszőleges A, B, $C \in \mathcal{F}$ esetén.*
9. ***Poincare formula:** Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok, akkor*

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

Bizonyítás.

1. A valószínűség σ-additivitása alapján kapjuk, hogy $0 \leqslant \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) < +\infty$, ami csak úgy lehet, ha $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. Legyen $A_k := \emptyset$, ha $k > n$. Ekkor a valószínűség σ-additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \mathbb{P}\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) + 0 + 0 + \ldots \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

3. A valószínűség 1-re normáltsága és véges additivitása felhasználásával az $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$, amiből kapjuk az állítást.

4. Legyenek A, B olyan események, hogy $A \subseteq B$. Ekkor a valószínűség véges additivitása miatt
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A),$$
amiből rendezéssel kapjuk az állítást.

5. Legyenek A, B olyan események, hogy $A \subseteq B$. Ekkor az előző pont és a valószínűség nemnegativitása alapján kapjuk, hogy
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A).$$

6. Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, amiből a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy
$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

7. **Szita-formula 2 halmazra** A valószínűség véges additivitása (és a "teve szabály") alapján kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \\ &= (\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)) + (\mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)) - \mathbb{P}(A \cap B) = \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

8. **Szita-formula 3 halmazra** A két halmazra vonatkozó szita-formula alkalmazásával bizonyítható.
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) = \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) = \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

9. A Poincare formula könnyen kijön a szita-formulából n szerinti teljes indukcióval.

$\boxtimes$

2.3.4. A valószínűség folytonossága

A következő tétel a valószínűség folytonossága. Ezt a tételt a későbbiekben a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének megfelelő tulajdonságainak bizonyítása során használjuk.

Kolmogorov eredeti axiómarendszerében nem szerepelt a valószínűség σ-additivitása, helyette azonban szerepelt a valószínűség véges additivitása és folytonossága. Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov eredeti axiómarendszere és az általunk használt ekvivalensek.

A következő tétel első pontja a valószínűség folytonossága, a további kettő az első egyszerű következménye

7. Tétel. ***A valószínűség folytonossága***

1. *Ha (B_n) események csökkenő sorozata, azaz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.*
2. *Ha (B_n) események csökkenő sorozata, azaz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.*
3. *Ha (B_n) események növekvő sorozata, azaz $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.*

Bizonyítás.
1. Diszjunktálni kell.

$$B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_3) \cup \dots \cup (B_n \setminus B_{n+1}) \cup \dots$$

Ez egy diszjunkt unió, így a valószínűség σ-additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus B_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i \setminus B_{i+1}).$$

Kihasználjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, ugyanis ellenkező esetben az unió nem adná ki B_1-et. Mivel az egyenlőség jobb oldalán egy konvergens sor áll, így a sor farka 0-hoz tart, amiből a teleszkopikus összegről tanultak alapján kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_i \setminus B_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} (\mathbb{P}(B_i) - \mathbb{P}(B_{i+1})) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n),$$

és ezt kellett bizonyítani.
A **2.** és **3.** állítások bizonyítása megtalálható a függelékben. $\boxtimes$

2.3.5. A valószínűség néhány további egyszerű tulajdonsága

8. Tétel. *Legyenek A és B események.*

1. *Ha $A \subseteq B$ és $\mathbb{P}(B) = 0$, akkor $\mathbb{P}(A) = 0$;*
2. *Ha $A \subseteq B$ és $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor $\mathbb{P}(B) = 1$;*
3. *Ha $\mathbb{P}(A) = 0$ és B tetszőleges, akkor $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ és $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$;*
4. *Ha $\mathbb{P}(A) = 1$ és B tetszőleges, akkor $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ és $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.*

Bizonyítás.
1. A valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) = 0$, amiből kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. A valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy $1 = \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant 1$, amiből kapjuk, hogy $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. A valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy $0 = \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$, így $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Ebből a szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0 + \mathbb{P}(B) - 0 = \mathbb{P}(B).$$

4. A valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy $1 = \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A \cup B) = 1$, így $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Ebből a szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 + \mathbb{P}(B) - 1 = \mathbb{P}(B).$$

⊠

2.4. Kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Mit értünk a valószínűség geometriai kiszámítási módján.*
2. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Mikor mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy σ-algebra X-en.*
3. *Sorolja fel a σ-algebra legfontosabb tulajdonságait.*
4. *Mit értünk azon, hogy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező.*
5. *Mondja ki és bizonyítsa a valószínűség monotonitását.*

6. *Mondja ki és igazolja a két halmazra vonatkozó szita-formulát.*

7. *Ismertesse a három halmazra vonatkozó szita-formulát.*

Feladatok

1. *Bizonyítsa be a* ***Poincare formulát****, mely szerint*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

2. ***Párosítási probléma:*** *Hófehérke levelet ír a hét törpének. A névre szóló leveleket névre szóló borítékokba helyezi el véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy van olyan törpe, amelyik a neki írt levelet kapja meg?*

3. *Megőrizve az előző feladat jelöléseit legyen a törpék száma n és jelölje p_n azt a valószínűséget, hogy van olyan törpe, amelyik a neki címzett levelet kapja meg. Határozza meg a $\lim_{n\to\infty} p_n$ valószínűséget.*

3. fejezet

Feltételes valószínűség, Bayes tétel, Események függetlensége

3.1. A feltételes valószínűség fogalma és tulajdonságai

1. Definíció. *Ha A, $B \in \mathcal{F}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

valószínűséget az A esemény B eseményre vonatkozó ***feltételes valószínűségének*** *nevezzük.*

2. Tétel. *Legyen $B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$, továbbá A_1, A_2 pozitív valószínűségű események. A feltételes valószínűség rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. ***1-re normáltság:****, azaz $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$, (illetve $\mathbb{P}(B|B) = 1$);*
2. ***Véges additivitás:*** *Ha $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$;*

   Két halmaz helyett véges sok páronként diszjunkt halmazra is kimondhatók: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunkt pozitív valószínűségű események szorzata, akkor

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) + \cdots + \mathbb{P}(A_k|B).$$

3. ***Komplementer esemény feltételes valószínűsége:*** *Tetszőleges A esemény esetén $\mathbb{P}\left(\overline{A}|B\right) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.*

Bizonyítás.

1. Egyszerű számolással könnyen megkapható, ugyanis

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

2. Csak $k = 2$ esetén végezzük el a bizonyítást. A valószínűség véges additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{\mathbb{P}\left((A_1 \cup A_2) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)\end{aligned}$$

3. A komplementer esemény feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{A}|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

   amiből rendezéssel kapjuk az állítást.

⊠

3.2. Bayes tétel

3.2.1. Bayes-formula

3. Tétel. ***A Bayes-formula*** *Ha A, B pozitív valószínűségű események, akkor*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Bizonyítás. A tétel közvetlen számolással egyszerűen kijön.

$$\frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B|A).$$

⊠

3.2.2. A teljes valószínűség tétele

4. Definíció. *A B_1, B_2, ..., B_n eseményeket **teljes eseményrendszer**nek nevezünk, ha páronként diszjunktak és lefedik az Ω-t, azaz $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ és $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.*

Hasonlóan értelmezhető egy megszámlálhatóan végtelen sok tagból álló teljes eseményrendszer is.

5. Tétel. ***A teljes valószínűség tétele*** *Ha B_1, B_2, ..., B_n egy olyan teljes eseményrendszer, amely pozitív valószínűségű eseményekből áll, $A \in \mathcal{F}$ egy tetszőleges esemény, akkor*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Hasonló módon fogalmazható meg a megszámlálhatóan végtelen változat is.

Bizonyítás. Érdemes észrevenni, hogy az A halmaz az $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ..., $A \cap B_n$ halmazok páronként diszjunkt uniója. Így a valószínűség véges additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i),$$

amivel a bizonyítás teljes. ⊠

3.2.3. A Bayes tétel

6. Tétel. ***A Bayes Tétel*** *Ha B_1, $B_2, \ldots$, B_n pozitív valószínűségi eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A \in \mathcal{F}$ egy tetszőleges pozitív valószínűségi esemény, akkor*

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Bizonyítás. A Bayes formulából és a Teljes valószínűség tétele egyszerű következménye.

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

⊠

7. Példa. *A Bayes tétel tipikus alkalmazására példa az alábbi feladat:*

Egy üzemben egy alkatrészt három gépsoron gyártanak. Adottak a gépsorok teljes termelésben való részvétele 20%, 30%, 50%, illetve a selejtarányok 2%, 1%, 0.5%. Egy alkatrészt véletlenszerűen kiválasztva az selejtesnek bizonyul. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gépsoron készült.

Mo.: Részvétel a termelésben 20%, 30%, 50%, azaz

$$\mathbb{P}(B_1) = 0.2 \qquad \mathbb{P}(B_2)0.3, \qquad \mathbb{P}(B_3) = 0.5.$$

A selejtarányok: 2%, 1%, 0.5%, azaz

$$\mathbb{P}(B_1|A) = 0.02, \qquad \mathbb{P}(B_2|A) = 0.01, \qquad \mathbb{P}(B_3|A) = 0.005.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy selejtes alkatrészt kiválasztva az alkatrész az első gépsoron készült:

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0.02 \cdot 0.2}{0.02 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.5} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3} + 2.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{4}{9.5} = 0.4211.$$

8. Példa. *Egy urnában van 5 golyó, melyek közül 3 piros és 2 fehér golyó. Kihúzunk egy golyót, majd visszarakjuk. Ha a kihúzott golyó piros, volt, beteszünk az urnába még 2 piros golyót, ha fehér volt, akkor még 5 fehér golyót. Ezt követően megint húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy másodszorra piros golyót húzunk.*

Mo.: Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy először piros golyót húzunk, B_2 azt az eseményt, hogy először fehér golyót húzunk, A azt az eseményt, hogy másodszorra piros golyót húzunk. ekkor

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(A|B_1) = \frac{5}{7}, \quad \mathbb{P}(A|B_2) = \frac{3}{10}.$$

A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{96}{175} = 0.5486.$$

3.2.4. A láncszabály

9. Tétel. ***Láncszabály*** *Legyenek B_1, B_2, ..., B_n olyan események, melyekre $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \neq 0$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}).$$

Bizonyítás. A bizonyítást csak $n = 3$ esetén végezzük el, mert abból már látszik az általános eset bizonyítása.

$$\mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_1)} \cdot \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)} =$$
$$= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3).$$

⊠

10. Példa. *Egy szegény molnárnak van három fia. Hazamegy a legnagyobb fiú és megeszi az otthon lévő sütemények 40%-át. Ezt követően hazaér a középső fiú, aki megeszi a megmaradt sütemények 50%-át. Végül hazaér a legkisebb fiú, aki megeszi a megmaradt sütemények 70%-át. Mennyi a valószínűsége, hogy egy süteményt a két kisebb fiú nem eszi meg, feltéve, hogy a legnagyobb sem ette meg?*
Mo.II.: *Alkalmazzuk az általunk megismert formalizmust, a feltételes valószínűséget és a láncszabályt.*

Jelölje B_i azt az eseményt, hogy egy sütemény túléli az i-edik fiút ($i = 1, 2, 3$), ahol az első fiú jelöli a legkisebbet. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_1) = 0.6,\\
&\mathbb{P}(B_2|B_1) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_2}|B_1\right) = 1 - 0.5 = 0.5,\\
&\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_3}|B_1 \cap B_2\right) = 1 - 0.7 = 0.3.
\end{aligned}$$

Így a láncszabály alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.09.$$

Mi azonban a $\mathbb{P}(B_2 \cap B_3|B_1)$ feltételes valószínűséget keressük, ami

$$\mathbb{P}(B_2 \cap B_3|B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1)} = \frac{0.09}{0.6} = 0.15.$$

3.3. Események függetlensége

3.3.1. Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége a feltételes valószínűség fogalmából vezethető le. Két eseményt, A-t és B-t akkor érzünk függetlennek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Ehhez az kell, hogy a B esemény pozitív valószínűségű legyen. Azonban a fenti egyenlőtlenségből rendezéssel kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$ és ehhez már a $\mathbb{P}(B) = 0$ feltételre nincs szükség.

11. Definíció. *Legyenek A és B események. Azt mondjuk, hogy **az A és a B események függetlenek**, ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

12. Példa. *A harminckét lapos magyar kártyából (4 szín, 8 figura) kihúzunk 3 lapot visszatevés nélkül. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kihúzott lap piros, B azt, hogy a harmadik kihúzott lap piros. Az A és B események függetlenek-e?*

A válasz az, hogy nem, ugyanis

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{8 \cdot 30 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{4 \cdot 31},$$

így $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

13. Példa. *A harminckét lapos magyar kártyában van 4 szín és 8 szám* ($4 \cdot 8 = 32$). *A színek egyike a piros, a számok egyike az ász (vagy másképpen disznó). Egy pakli kártyából kihúzunk egy lapot. Jelölje A azt az eseményt, hogy piros lapot húzunk, B azt, hogy ászt húzunk. Az A és B események függetlenek-e?*

A válasz: függetlenek, ugyanis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32},$$

így teljesül a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ *összefüggés.*

Távolítsuk el a pakliból a zöld alsót és az így megcsonkított pakliból húzzunk egy lapot. Az A és B események megőrzik-e a függetlenségüket? A válasz ezúttal az, hogy nem, ugyanis a kedvező/összes képlet alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{31}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{8}{31}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{31},$$

így a $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

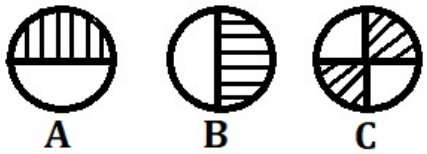
3.3.2. Véges sok esemény páronkénti és teljes függetlensége

14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események*

- ***páronként független****ek, ha közülük bármely két különböző független, azaz* $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *akkor*
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$
- ***teljesen független****ek, ha* $2 \leqslant k \leqslant n$ *és* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, *akkor*
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

15. Példa. *A teljes függetlenség erősebb feltétel, mint a páronkénti. Például kör alakú céltáblára véletlenszerűen lövünk, a céltábla bármely mérhető részhalmazát a részhalmaz területének megfelelő arányában találjuk el.*

Jelölje A, B, C azokat az eseményeket, hogy a céltábla felső felébe, jobb oldali felébe, illetve jobb felső vagy bal alsó negyedébe lövünk az ábrának megfelelő módon.



Ekkor az A, B, C események páronként függetlenek, ugyanis

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4},$$

azonban teljesen nem függetlenek, mivel

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}, \qquad \textit{de} \qquad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

3.3.3. Eseménysorozat páronkénti és teljes függetlensége

16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ eseménysorozat tagjai*

- ***páronként függetlenek*** *ha közülük bármely kettő független, azaz ha $i < j$, akkor*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$

- ***teljesen függetlenek****, ha $2 \leqslant k$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, akkor*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

3.3.4. Események függetlenségének a tulajdonságai

17. Tétel. *Legyenek A és B események úgy, hogy $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$. Ekkor A és B események függetlenek.*

Bizonyítás.

1. Ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor egy korábbi állítás alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Másrészt $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0 \cdot \mathbb{P}(B) = 0$, így a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ egyenlőség most is teljesül.

2. Ha $\mathbb{P}(A) = 1$, akkor egy korábbi állítás alapján kapjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. Másrészt $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1 \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)$, így a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

⊠

18. Tétel. *Ha A, B független események, akkor az $\overline{A}$, B események is függetlenek. (Tehát, ha A és B valamelyikét esetleg mindkettőt kicseréljük a komplementerére, akkor a függetlenség megőrződik.)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A és B függetlenek. Ekkor

$$\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \\ = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

⊠

19. Tétel. *Ha az $A_1, A_2, \ldots$ egy olyan eseménysorozat, amely tagjai teljesen függetlenek és tagja közül akármennyit, (esetleg az összeset) a komplementerére cserélünk, akkor az így kapott eseménysorozat tagjai teljesen függetlenek maradnak.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításával analóg. ⊠

A fentiek alkalmazásával egyszerűen bizonyítható az alábbi tétel:

20. Feladat. *1-nél kisebb valószínűségű események teljesen független véges rendszere nem fedi le az Ω-t.*

3.4. Kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Legyenek A és B események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Hogyan definiálja a $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget.*
2. *Fogalmazza meg a Bayes formulát.*
3. *Ismertesse a feltételes valószínűség legfontosabb tulajdonságai.*
4. *Mikor nevezünk egy $B_1, B_2 \ldots B_n$ eseményrendszert teljes eseményrendszernek?*
5. *Adja meg a teljes valószínűség tételét.*

6. *Fogalmazza meg a Bayes tételt.*

7. *Mikor nevezünk két eseményt függetlennek.*

8. *Mikor mondjuk, hogy egy (B_n) eseménysorozat tagjai páronként, illetve teljesen függetlenek.*

Feladatok

1. *Egy urnában van valamennyi piros és valamennyi fehér golyó (más színű golyó nincs az urnában). Kihúzunk egy golyót, amelyet a húzást követően vissza is rakunk az urnába. Ha pirosat húzunk, akkor belerakunk az urnába még k db piros golyót, ha fehéret húzunk, akkor még k db fehér golyót. Igazolja, hogy annak a valószínűsége, hogy először pirosat húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy másodszor pirosat húzunk.*

2. *Bizonyítsa be, hogy 1-nél kisebb valószínűségű események teljesen független véges rendszere nem fedi le az Ω-t.*

3. *Bizonyítsa be, hogyha az $A_1 \leqslant B_1$ és $A_2 \leqslant B_2$ események olyanok, hogy az A_1 és A_2, illetve a B_1 és B_2 események függetlenek, akkor*

$$\mathbb{P}\left((B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2)\right) = \mathbb{P}(B_1 \setminus A_1)\mathbb{P}(B_2 \setminus A_2).$$

4. fejezet

Valószínűségi változók

4.1. Matematikai módszerek

4.1.1. Parciális integrálás és lineáris helyettesítés

Bár elemi analízisből ismert, mégis nem árt átismételni.

A parciális integrálásnak az a lényege, hogy egy szorzatfüggvényt tudunk úgy integrálni, hogy valamelyik tagot integráljuk, a másikat deriváljuk. Hogy melyiket, azt mi döntjük el. Így egy új integrált kapunk, ami egyszerűbb, mint az eredeti, vagy integráltan alkalmazzuk a módszert.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

A lineáris helyettesítés a helyettesítéses integrálásnak az a speciális esete, amikor a belső függvény lineáris. Azonban ebbe nem kell belegondolnunk, elég, ha arra gondolunk, hogyha a jobb oldalt deriváljuk, akkor visszakapjuk a bal oldalon álló integrál integrandusát. Ha $\int f(x)dx = F(x) + C$, $a \neq 0$, akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

A valószínűségi változók véletlenszámok. Például, ha kockával dobunk, akkor a dobott számot nem ismerjük a dobás előtt, a dobott szám egy valószínűségi változó.

4.2. Valószínűségi változók

4.2.1. A valószínűségi változók

1. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt **valószínűségi változó**nak nevezünk, ha*

$$(\xi < x) := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} = \xi^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a ξ nívóhalmazai események.

2. Tétel. *Ha ξ egy valószínűségi változó, akkor*

$$(\xi = x) := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\} = \xi^{-1}(x) \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Mivel $\left(\xi \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right[\right) = \left(\xi < x + \frac{1}{n}\right) \setminus (\xi < x)$ esemény, és az események halmaza zárt a megszámolhatóan végtelen metszetképzésre,

$$(\xi = x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\xi \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right[\right)$$

így a $(\xi = x)$ is esemény. ⊠

4.3. Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye és tulajdonságaik

4.3.1. Monoton növekvő függvények bal és jobb oldali határértéke

Ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor jelölje $F(x_0 - 0)$, illetve $F(x_0 + 0)$ az F függvény x_0 pontbeli bal, illetve jobb oldali határértékét. Ha az F függvény monoton növekvő, akkor minden pontban létezik a bal illetve jobboldali határértéke, továbbá

$$F(x_0 - 0) \leqslant F(x_0) \leqslant F(x_0 + 0).$$

Az $F(x_0) - F(x_0 - 0)$ értéket az F függvény x_0 pontbelibeli bal ugrásának, az $F(x_0 + 0) - F(x_0)$ számot az x_0 pontbelibeli jobb ugrásnak nevezzük. Ha az F függvény balról folytonos az x_0

pontban, akkor $F(x_0-0)=F(x_0)$, ha jobbról folytonos az x_0 pontban, akkor $F(x_0+0)=F(x_0)$. Így például monoton növekvő, balról folytonos függvénynek nincs bal ugrása.

Ha az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek egy x_0 pontban létezik a jobb oldali határértéke, akkor az "átviteli elv" szerint a jobb oldali határérték $F(x_0+0)=\lim_{n\to\infty}F(x_0+\frac{1}{n})$ módon számolható, azaz a függvényhatárérték kiszámolását vissza tudjuk vezetni sorozat határértékének kiszámolására.

4.3.2. Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

3. Definíció. *Egy ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének az $\mathbb{F}_\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*

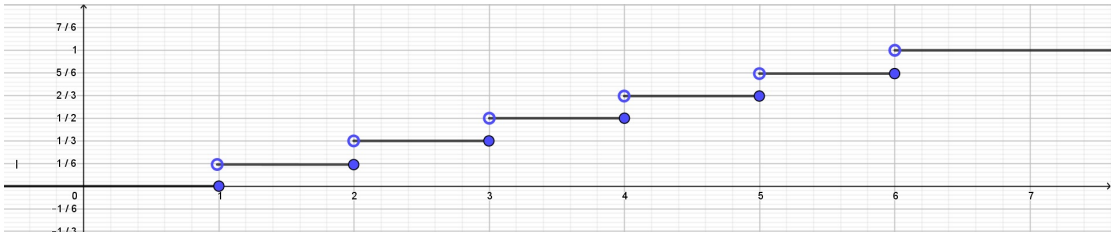
$$\mathbb{F}_\xi(x):=\mathbb{P}(\xi<x)\qquad(x\in\mathbb{R})$$

módon definiált függvényt nevezzük.

Minden valószínűségi változónak van eloszlásfüggvénye.

Példa *Dobókockával dobunk, akkor ezt a kísérletet egy $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ klasszikus valószínűségi mező írja le, ahol $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Jelölje ξ a dobott számot. Ekkor a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$\mathbb{F}(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\in]-\infty,1[\\ \dfrac{k}{6}, & \text{ha } x\in]k-1,k] \quad (k=2,3,4,5,6)\\ 1, & \text{ha } x>6.\end{cases}$$



Érdemes megjegyezni, hogy szokás az eloszlásfüggvényt

$$\mathbb{F}_\xi(x):=\mathbb{P}(\xi\leqslant x)\qquad(x\in\mathbb{R}) \tag{4.1}$$

módon definiálni. Ebben az esetben a tételekben szereplő "bal" és "jobb" szavak megcserélődnek. Például az általunk használt definíció esetén az eloszlásfüggvény balról folytonos, míg a (4.1) definíciót használva jobbról folytonos.

4.3.3. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

4. Tétel. *Legyen ξ egy valószínűségi változó $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor $\mathbb{F}$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal.*

1. *Monoton növekvő;*
2. *Balról folytonos;*
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbb{F}(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathbb{F}(x)=1.$

Bizonyítás.
1. Növekvőség: Legyenek $x<y$. Ekkor $(\xi<x)\subseteq(\xi<y)$, így a valószínűség monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x)=\mathbb{P}(\xi<x)\leqslant\mathbb{P}(\xi<y)=\mathbb{F}(y).$$

2. Bal oldali folytonosság: Legyen $x_0\in\mathbb{R}$. Mivel az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény monoton növekvő, így létezik az $\mathbb{F}(x_0-0)$ bal oldali határértéke. A valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x_0-0)&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{F}\left(x_0-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\xi<x_0-\frac{1}{n}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\xi<x_0-\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\mathbb{P}(\xi<x_0)=\mathbb{F}(x_0).\end{aligned}$$

Mivel a bal oldali határérték megegyezik a függvényértékkel, így az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény balról folytonos.
3. Határérték: A valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\mathbb{F}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{F}(n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi<n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi<n)\right)=\mathbb{P}(\xi\in\mathbb{R})=\mathbb{P}(\Omega)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\mathbb{F}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{F}(-n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi<-n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\xi<-n)\right)=\mathbb{P}(\xi\in\emptyset)=\mathbb{P}(\emptyset)=0.$$

⊠

4.4. Diszkrét valószínűségi változók

A valószínűségi változóknak több fajtája van. Mi csak a diszkrét és az abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni, gyakorlati szempontból is ezek a legfontosabbak.

4.4.1. Diszkrét valószínűségi változók eloszlása és tulajdonságai

Egy (x_n) sorozatot **injektív sorozat**nak nevezünk, ha $x_i \neq x_j$ valahányszor $i \neq j$.

5. Definíció. *A ξ valószínűségi változót **diszkrét valószínűségi változó**nak nevezzük, ha létezik x_1, x_2, ... véges, vagy megszámlálhatóan végtelen injektív sorozat, amelyre*

- $\mathbb{P}(\xi = x_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$ *esetén;*
- $\mathbb{P}(\xi \in \{x_1, x_2, \ldots\}) = 1$.

További jelölések:

- A x_1, x_2, ... sorozatot a ξ **diszkrét valószínűségi változó értékei**nek nevezzük és $\mathcal{R}_\xi$ módon jelöljük.
- A $p_1 := \mathbb{P}(\xi = x_1)$, $p_2 := \mathbb{P}(\xi = x_2)$ ..., sorozatot a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásának, vagy csak egyszerűen **diszkrét eloszlás**nak nevezzük.

6. Tétel. *Egy diszkrét eloszlás pozitív, 1 összegű számok sorozata, azaz $\sum_i p_i = 1$;*

Bizonyítás. A valószínűség σ-additivitása alapján nyilvánvaló, ugyanis

$$1 = \mathbb{P}\left(\xi \in \{x_1, x_2, \ldots\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_i (\xi = x_i)\right) = \sum_i \mathbb{P}(\xi = x_i) = \sum_i p_i.$$

⊠

Ha egy ξ diszkrét valószínűségi változó véges sok értéket vesz fel, akkor az eloszlásfüggvénye egy olyan balról folytonos lépcsős függvény, amely minden x_i helyen p_i-t ugrik.

4.4.2. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

7. Definíció. *Egy ξ **diszkrét valószínűségi változó várható értékét***

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_i x_i p_i$$

módon definiáljuk, amennyiben a $\sum_i |x_i| p_i$ sor konvergens.

4.5. Folytonos és abszolút folytonos valószínűségi változók

8. Definíció. *Egy $\mathbb{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt*

- ***folytonos**nak nevezünk, ha minden $x_0 \in \mathbb{R}$-hez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén ha $|x_0 - x| < \delta$, akkor $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.*
- ***abszolút folytonos**nak ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám úgy, hogy valahányszor $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n$ úgy, hogy*

$$|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \cdots + |y_n - x_n| < \delta,$$

akkor

$$|f(y_1) - f(x_1)| + |f(y_2) - f(x_2)| + \cdots + |f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Érdemes észrevenni, hogy az abszolút folytonos függvények folytonosak.

9. Definíció. *Legyen ξ egy valószínűségi változó $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó*

- ***folytonos**, ha az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénye folytonos,*
- ***abszolút folytonos**, ha az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénye abszolút folytonos*

Látható, hogy a folytonos valószínűségi változók osztálya bővebb, mint az abszolút folytonos valószínűségi változók osztálya.

10. Tétel. *Egy ξ valószínűségi változó pontosan akkor*

1. *folytonos, ha minden értéket 0 valószínűséggel vesz fel;*
2. *abszolút folytonos, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amellyel*

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

*ahol $\mathbb{F}$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az f függvényt a ξ valószínűségi változó **sűrűségfüggvény**ének nevezzük.*

Bizonyítás.

1. A $p_i = \mathbb{F}(x_i + 0) - \mathbb{F}(x_i) = \mathbb{P}(\xi = x_i)$ összefüggés alapján nyilvánvaló.
2. Nem bizonyítjuk.

⊠

A fenti tétel megteremti a lehetőségét annak, hogy egyszerűbben vezessük be az abszolút folytonos valószínűségi változókat.

4.5.1. Sűrűségfüggvény és tulajdonságai

11. Definíció. *Egy ξ valószínűségi változót **abszolút folytonos**nak nevezünk, ha létezik egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre*

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Egy ilyen f függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük.

12. Megjegyzés. *Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel és f sűrűségfüggvénnyel, akkor*

$$f(x) = \mathbb{F}'(x)$$

minden olyan x pontban, amelyben az eloszlásfüggvény differenciálható.

13. Tétel. *A sűrűségfüggvény tulajdonságai. Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor*

1. *f **nemnegatív**, azaz $f(x) \geqslant 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (Ez így nem teljesen pontos, legfeljebb egy Lebesgue-nullmértékű halmazon lehet negatív, de előírhatjuk, hogy legyen nemnegatív, ugyanis egy Lebesgue-nullmértékű halmazon szabad megváltoztatni egy sűrűségfüggvény értékét.)*
2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.*

Bizonyítás.
1. Ellenkező esetben ellentmondásba kerülnénk a valószínűség nemnegativitásával.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mathbb{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1$. $\boxtimes$

4.5.2. Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke

14. Definíció. *Egy ξ **abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét***

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

módon definiáljuk, amennyiben az $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ integrál létezik és véges.

4.6. Intervallumba esés valószínűsége

A következő tétel első pontja csak elméleti jelentőségű, a második és harmadik fontos, gyakran alkalmazzuk.

15. Tétel. *Legyen ξ egy valószínűségi változó és $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.*

1. ***Intervallumba esés valószínűsége eloszlásfüggvénnyel kifejezve:***

$$\mathbb{P}\left(\xi \in [a,b[\right) = \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a) \qquad \text{és} \qquad \mathbb{P}(\xi = x_0) = \mathbb{F}(x_0 + 0) - \mathbb{F}(x_0).$$

2. ***Intervallumba esés valószínűsége diszkrét esetben:***

$$\mathbb{P}(\xi \in H) = \sum_{x_i \in H} p_i,$$

3. ***Intervallumba esés valószínűsége abszolút folytonos esetben:***

$$\mathbb{P}(\xi \in H) = \int_a^b f(x)dx$$

A H halmaz jelöli az $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ intervallumok körül bármelyiket.

Bizonyítás.
1. Mivel $(\xi < a) \leqslant (\xi < b)$, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi \in [a,b[) = \mathbb{P}((\xi < b) \setminus (\xi < a) = \mathbb{P}(\xi < b) - \mathbb{P}(\xi < a) = \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a).$$

Felhasználva a valószínűség monotonitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = x_0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\xi \in \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right[\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi \in \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right[\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{P}\left(\xi < x_0 + \frac{1}{n}\right) - \mathbb{P}\left(\xi < x_0\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - \mathbb{F}(x_0) = \\ &= \mathbb{F}(x_0 + 0) - \mathbb{F}(x_0)\end{aligned}$$

azaz a $\mathbb{P}(\xi = x_0)$ az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény x_0-beli jobb oldali ugrása.
2. Legyenek $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ a ξ diszkrét valószínűségi változó összes olyan értéke, amelyek beleesnek az H intervallumba. A valószínűség véges, vagy σ-additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi \in H\right) = \mathbb{P}((\xi = x_{i_1}) \cup (\xi = x_{i_2}) \cup \ldots) = \mathbb{P}(\xi = x_{i_1}) + \mathbb{P}(\xi = x_{i_2}) + \cdots = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots.$$

3. Felhasználjuk, hogy egy abszolút folytonos valószínűségi változó minden értéket 0 valószínűséggel vesz fel. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi \in H) = \mathbb{P}((\xi \leqslant b) \setminus (\xi < a)) = \mathbb{P}((\xi < b)) - \mathbb{P}((\xi < a)) =$$
$$= \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx = .$$

⊠

4.6.1. A várható érték tulajdonságai

16. Tétel. *A várható érték tulajdonságai*

1. ***Transzformációs formula valószínűségi változókra*** *Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik varható értéke, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy mérhető (gondolhatjuk, hogy folytonos) függvény és létezik az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték, akkor*

   - ***diszkrét esetben*** $\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i)p_i$*;*
   - ***abszolút folytonos esetben*** $\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$*.*

2. ***Transzformáció formula valószínűségi vektorváltozókra*** *($n = 2$ eset). Ha ξ_1, ξ_2 olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy mérhető (vagy mondjuk folytonos) függvény úgy, hogy a $g(\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi változónak is létezik várható értéke, akkor*

   - ***diszkrét esetben*** $\mathbb{E}(g(\xi_1, \xi_2)) = \sum_{ij} g(x_i, x_j)p_{ij}$*, ahol* $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j)$ $(i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$*;*
   - ***abszolút folytonos esetben*** $\mathbb{E}(g(\xi_1, \xi_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dydx$*, ahol* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *egy olyan függvény, amelyre* $\mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dvdu$ *hasonló formulák könnyen megfogalmazhatóak $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant 2$ esetén.*

3. ***A várható érték additivitása*** *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értéke, akkor*

   - $n = 2$ *eset:* $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2)$*;*
   - $n \geqslant 2$ *eset:* $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2) + \dots + \mathbb{E}(\xi_n)$*.*

4. ***A várható érték homogenitása*** *Ha ξ olyan valószínűségi váltzó, amelynek van várható értéke és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(\lambda\xi) = \lambda\mathbb{E}(\xi)$.*

5. ***Eltolással kapcsolatos tulajdonság*** *Ha ξ olyan valószínűségi változó, amelynek van várható értéke, $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(\xi + c) = \mathbb{E}(\xi) + c$.*

6. ***A várható érték becslése*** *Ha ξ egy olyan valószínűségi változó, amelyre $-\infty < m < M < +\infty$ valós számok olyanok, hogy $\mathbb{P}(-m < \xi < M) = 1$, akkor $m < \mathbb{E}(\xi) < M$.*

Bizonyítás.

1. Nem bizonyítjuk.

2. Nem bizonyítjuk.

3. **A várható érték additivitásának a bizonyítás**hoz a transzformációs szabályt használjuk $g(x, y) := x + y$, $g(x, y) = x$ és $g(x, y) = y$ függvények esetén.

   Diszkrét esetben:

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{ij}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{ij}(x_i p_{ij} + y_j p_{ij}) = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_j \sum_i y_j p_{ij} =$$
$$= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2).$$

   Abszolút folytonos esetben:

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x + y)f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xf(x, y) + yf(x, y))dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x, y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x, y)dxdy =$$
$$= \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_2).$$

4. **A homogenitás bizonyítás**hoz a várható érték transzformációs szabályát használjuk (egydimenziós esetben) a $g(x) : \lambda x$ függvény esetén.

   Diszkrét esetben:

$$\mathbb{E}(\lambda\xi) = \sum_i \lambda x_i p_i = \lambda \sum_i x_i p_i = \lambda\mathbb{E}(\xi).$$

   Abszolút folytonos esetben:

$$\mathbb{E}(\lambda\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda xf(x)dx = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx = \lambda\mathbb{E}(\xi).$$

5. **A várható érték eltolással kapcsolatos tulajdonsága** szintén az (egydimenziós) transzformációs szabályra vezethető vissza. Ekkor a $g(\xi) := \xi + c$ függvényt használjuk.

Diszkrét esetben:

$$\mathbb{E}(\xi + c) = \sum_i (x_i + c)p_i = \sum_i x_i p_i + c \sum_i p_i = \mathbb{E}(\xi) + c.$$

Abszolút folytonos esetben:

$$\mathbb{E}(\xi + c) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + c)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mathbb{E}(\xi) + c.$$

6. A várható érték becslése:

Diszkrét esetben: Ha $xi \notin [m, M]$, akkor $p_i = \mathbb{P}(\xi = x_i) = 0$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i \geqslant \sum_i m p_i = m \sum_i p_i = m$$
$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i \leqslant \sum_i M p_i = M \sum_i p_i = M.$$

Abszolút folytonos esetben: Érdemes észrevenni, hogy $\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = 0$ és $\int_{M}^{+\infty} f(x)dx = 0$. Ebből azonban a sűrűségfüggvény nemnegativitása alapján kapjuk, hogy $f(x) = 0$, ha $x \in]-\infty, m[\cup]M, \infty[$, amiből kapjuk, hogy $\int_{-\infty}^{m} xf(x)dx = 0$ és $\int_{M}^{+\infty} xf(x)dx = 0$. Ekkor azonban

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \\
&= \int_{m}^{M} xf(x)dx \geqslant \int_{m}^{M} mf(x)dx = m\int_{m}^{M} f(x)dx = m \cdot \mathbb{P}\left(\xi \in [m, M]\right) = m; \\
\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \\
&= \int_{m}^{M} xf(x)dx \leqslant \int_{m}^{M} Mf(x)dx = M\int_{m}^{M} f(x)dx = M \cdot \mathbb{P}\left(\xi \in [m, M]\right) = M.
\end{aligned}$$

⊠

4.7. Momentumok és centrált momentumok

4.7.1. A szórásnégyzet és szórás

17. Definíció. *Ha ξ egy valószínűségi változó, amelyre létezik az $\mathbb{E}(\xi^k)$ várható érték, akkor az*

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ *értéket a* ξ *valószínűségi változó* k***-adik momentum****ának,*
- $\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^k\right)$ *értéket a* ξ *valószínűségi változó* ***centrált momentum****ának nevezzük.*
- *A második centrált momentumot* ***szórásnégyzet****nek nevezzük és* $\mathbb{D}^2(\xi)$ *módon jelöljük.*
- *Ha egy* ξ *valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete, akkor a* $\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$ *számot a* ξ *valószínűségi változó* ***szórás****ának nevezzük.*

18. Tétel. ***A szórásnégyzet kiszámítása*** *Ha a* ξ *valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete, akkor a*

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2$$

módon számolható.

Bizonyítás. Egyszerűen kijön a várható érték megfelelő tulajdonságaiból.

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}(\xi)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}(\xi) + \left[\mathbb{E}(\xi)\right]^2\right) = \mathbb{E}(\xi^2) - 2\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\xi) + \left[\mathbb{E}(\xi)\right]^2 = \\ = \mathbb{E}(\xi^2) - \left[\mathbb{E}(\xi)\right]^2.$$

⊠

19. Tétel (**A szórásnégyzet tulajdonságai.**)**.** *Legyenek* ξ, ξ_1, ξ_2 *olyan valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórásnégyzetük,* $c \in \mathbb{R}$*.*

1. ***Négyzetesen homogén****, azaz* $\mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2(\xi)$*. Ennek megfelelően a szórás abszolút homogén, azaz* $\mathbb{D}(c\xi) = |c|\mathbb{D}(\xi)$*.*
2. ***Transzláció invariáns*** $\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2(\xi)$*.*
3. ***Pozitív szemidefinit****, azaz* $\mathbb{D}^2(\xi) \geqslant 0$ *és* $\mathbb{D}^2(\xi) = 0$ *akkor és csak akkor, ha létezik* $c \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\mathbb{P}(\xi = c) = 1$*.*
4. ***Összeg szórásnégyzete:*** $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$*. (Tehát az additivitás csak korrelálatlan esetben teljesül.)*

Bizonyítás. A szórásnégyzet tulajdonságait a várható érték additivitására és homogenitására vezetjük vissza.

1. **Négyzetes homogenitás:**

$$\mathbb{D}^2(c\xi) = \mathbb{E}\left(c\xi - \mathbb{E}(c\xi)\right)^2 = \mathbb{E}\left(c(\xi - \mathbb{E}(\xi)\right)^2 = \\ = \mathbb{E}\left(c^2(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = c^2\mathbb{D}^2(\xi).$$

   A fentieknek megfelelően a szórás abszolút homogén, azaz $\mathbb{D}(c\xi) = |c|\mathbb{D}(\xi)$.

2. **Transzláció invariancia:**

$$\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{E}\left(\xi + c - \mathbb{E}(\xi + c)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}(\xi)\right)^2 = \mathbb{D}^2(\xi).$$

3. **Pozitív szemidefinitség** mivel

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \quad \text{és} \quad (\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \geqslant 0,$$

így a várható érték becslése alapján kapjuk, hogy $\mathbb{D}^2(\xi) \geqslant 0$.

Könnyű látni, hogyha $\mathbb{D}^2(\xi) = 0$, akkor létezik $C \in \mathbb{R}$, amellyel $\mathbb{P}(\xi = C) = 1$.

A megfordítás triviális.

4. **Összeg szórásnégyzete:**

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) &= \mathbb{E}\left((\xi_1 + \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2)\right)^2 = \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1) + (\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)\right)^2 = \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))^2 + (\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))^2 + 2(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))^2 + \mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))^2 + 2\mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)) = \\ &= \mathbb{D}^2(\xi_1) + \mathbb{D}^2(\xi_2) + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2).\end{aligned}$$

⊠

20. Megjegyzés. $\mathbb{D}^2 = 0$ *pontosan akkor, ha létezik* $C \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\mathbb{P}(\xi = C) = 1$. *Ekkor* $\mathbb{E}(\xi) = C$.

4.8. Nemnegatív, abszolút folytonos eloszlások momentumai

21. Tétel. *Legyen* ξ *egy olyan nemnegatív értékeket felvevő abszolút folytonos valószínűségi változó, amelyre létezik* $\mathbb{E}(\xi^\alpha)$, *ahol* $\alpha > 1$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(\xi^\alpha) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}(1 - \mathbb{F}(x))dx.$$

Bizonyítás. Az összefüggés könnyen kijön parciális integrálással.

$$\begin{aligned}\alpha \int_0^\infty & x^{\alpha-1}(1 - \mathbb{F}(x))dx = \\ & f'(x) = x^{\alpha-1} \qquad g(x) = 1 - \mathbb{F}(x) \\ & f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \qquad g'(x) = -f(x) \\ &= [x^\alpha(1 - \mathbb{F}(x)]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty x^\alpha f(x)dx = \mathbb{E}(\xi^\alpha).\end{aligned}$$

Tehát elegendő belátni, hogy $\lim_{x\to\infty} x^\alpha(1-\mathbb{F}(x))=0$.
A bizonyítást két lépésben mutatjuk be.

- Először megmutatjuk, hogy $\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty x^\alpha f(x)dx=0$.

$$\mathbb{E}(\xi^\alpha)=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t x^\alpha f(x)dx+\int_t^\infty x^\alpha f(x)dx\right)=$$
$$=\mathbb{E}(\xi^\alpha)+\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty x^\alpha f(x)dx.$$

- Megmutatjuk, hogy $\lim_{t\to\infty} t^\alpha(1-\mathbb{F}(t))=0$.

$$0=\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty x^\alpha f(x)dx\geqslant\lim_{t\to\infty} t^\alpha\int_t^\infty f(x)dx=$$
$$=\lim_{t\to\infty} t^\alpha\left(\int_0^\infty f(x)dx-\int_0^t f(x)dx\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty} t^\alpha\left(1-\mathbb{F}(t)\right)\geqslant 0.$$

Tehát valójában $\lim_{t\to\infty} t^\alpha(1-\mathbb{F}(t))=0$, amivel a bizonyítás teljes. ⊠

22. Megjegyzés. *A bemutatott összefüggés akkor is érvényben marad, ha a nemnegatív valószínűségi változó nem abszolút folytonos.*

4.9. Példák

23. Példa. *(Szabályos) dobókockával dobunk. Jelölje ξ a dobott számot. Határozza meg a ξ várható értékét és szórásnégyzetét.*

Megoldás:
A ξ **eloszlása:**

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A ξ **várható értéke:**

$$\mathbb{E}(\xi)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3.5$$

A ξ **második momentuma:**

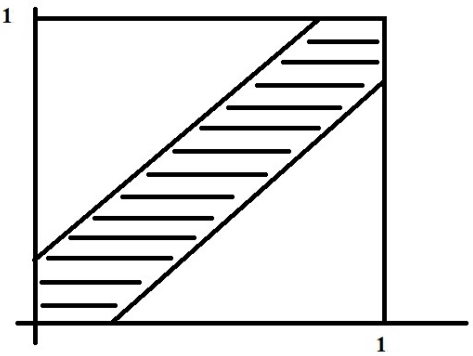
$$\mathbb{E}(\xi) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

A ξ **szórásnégyzete:**

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

24. Példa. *Ledobunk két pontot véletlenszerűen, egymástól függetlenül a* $[0, 1]$ *intervallumra. Jelölje* ξ *a két pont távolságát. Határozza meg a* ξ *valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

Megoldás: Ez a feladat hasonló a valószínűség geometriai kiszámítási módja részben leírt feladathoz, amikor két ember egy adott időintervallumban véletlenszerűen és egymástól függetlenül megjelenik egy adott helyen... Most is hasonló ábrára kell gondolni.



Legyen $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \frac{1 - 2\frac{(1-x)^2}{2}}{1} = 1 - (1 - x)^2 = -x^2 + 2x,$$

így a ξ **eloszlásfüggvénye:**

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

A ξ **sűrűségfüggvénye:**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin [0,1] \\ -2x+2, & \text{egyébként .} \end{cases}$$

A ξ **várható értéke:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^1 x(-2x+2)dx = \\ = \int_0^1 (-2x^2+2x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}.$$

A ξ **második momentuma:**

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_0^1 x^2(-2x+2)dx = \\ = \int_0^1 (-2x^3+2x^2)dx = \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

A ξ **szórásnégyzete:**

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

25. Példa. *Egy urnában van 2 golyó, melyek közül 1 piros és 1 fehér golyó. Kihúzunk 3 golyót visszatevéssel. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó várható értékét, szórásnégyzetét és eloszlásfüggvényét.*

Mo: *A golyók halmaza legyen $G := \{P, F\}$. Az eseménytér leírásához használjuk a következő jelöléseket:*

$$\omega_1 = (P,P,P), \quad \omega_2 = (P,P,F), \quad \omega_3 = (P,F,P), \quad \omega_4 = (F,P,P),$$
$$\omega_5 = (P,F,F), \quad \omega_6 = (F,P,F), \quad \omega_7 = (F,F,P), \quad \omega_8 = (F,F,F).$$

Az eseménytér: *$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$. könnyű látni, hogy klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk.*

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$x_0 = 0, \qquad \mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\{\omega_8\}) = \frac{1}{8},$$
$$x_1 = 1, \qquad \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{\omega_5, \omega_6, \omega_7\}) = \frac{3}{8},$$
$$x_2 = 2, \qquad \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = \frac{3}{8},$$
$$x_3 = 3, \qquad \mathbb{P}(\xi = 3) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{8}.$$

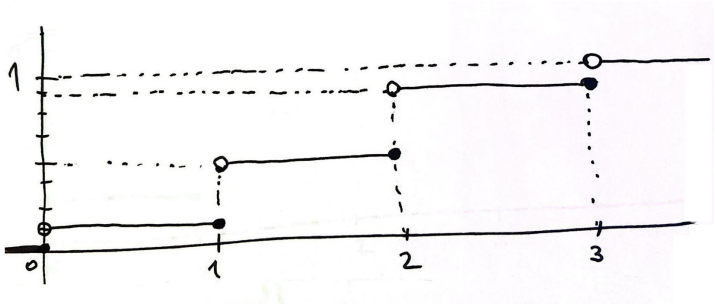
A kapott eredményeket foglaljuk táblázatba:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:



26. Példa. *Egy urnában van 3 golyó, amelyek közül 1 piros és 2 fehér. Visszatevés nélkül kihúzunk 2 golyót. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg a ξ eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét és eloszlásfüggvényét.*

Mo: *A golyók halmazát jelölje: $G := \{P, F_1, F_2\}$.*

Az elemi események:

$$\omega_1 := (P, F_1) \qquad \omega_2 := (F_1, P) \qquad \omega_3 := (P, F_2)$$
$$\omega_4 := (F_2, P) \qquad \omega_5 := (F_1, F_2) \qquad \omega_6 := (F_2, F_1)$$

Az eseménytér:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

Ekkor diszkrét valószínűségi mezőt kapunk.

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$x_0 = 0, \qquad p_0 = \mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\{\omega_5, \omega_6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$x_1 = 1, \qquad p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

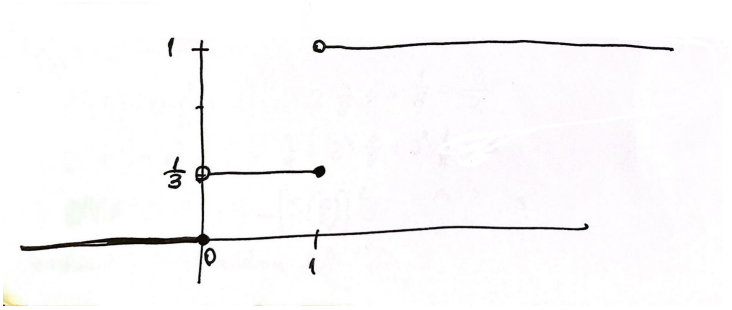
A kapott értékeket foglaljuk táblázatba.

x_i	*0*	*1*
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

A ξ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9}$$

A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:



27. Példa. *Szentpétervári paradoxon Példa olyan diszkrét valószínűségi változóra, amelynek nincs várható értéke. A probléma* ***Nicolaus Bernoulli****tól származik (1687-1759, svájci matematikus).*

Egy öregember bolyong Szentpéter utcáin és az arra járókat egy játékra invitálja. A játék lényege hogy a játékos ad egy fix összeget a öregembernek. Ezt követően dobások sorozatát végzi egy szabályos érmével. Ha a k-dik alkalommal dob először fejet, akkor az öregember fizet neki 2^k rubelt és a játék véget ér. Jelölje ξ az öregember által kifizetett összeget. A ξ valószínűségi változó eloszlása az alábbi táblázatban látható:

ξ	2	4	8	$\cdots$	2^n
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$

A ξ valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty,$$

A példa paradox jellege abból adódik, hogyha mondjuk 1000 *rubellel szállunk be a játékba, akkor* 0.5 *annak az esélye, hogy ezt az összeget el is veszítjük (és csak 2 rubelt kapunk az öregembertől). Annak a valószínűsége hogy* 1000 *rubelnél nagyobb a nyereségünk* $\frac{1}{2^{10}}$*, ami nagyon kicsi, mégis az öregember által kifizetett összeg várható értéke* $+\infty$*.*

28. Példa. *Legyen* ξ *egy Cauchy eloszlású valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in [0, +\infty[)$$

(Augustin Cauchy 1789-1857, francia matematikus.) Mivel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=+\infty} = +\infty,$$

így könnyű látni, hogy a Cauchy eloszlásnak nincs várható értéke.

4.10. Ellenőrző kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Mikor nevezünk egy* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvényt valószínűségi változónak?*
2. *Hogyan definiáljuk egy* ξ *valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és melyek a legfontosabb tulajdonságai?*
3. *Mikor nevezünk egy* ξ *valószínűségi változót diszkrétnek, illetve abszolút folytonosnak?*
4. *Melyek egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásának legfontosabb tulajdonságai?*
5. *Melyek egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásának legfontosabb tulajdonságai?*
6. *Hogyan definiáljuk egy diszkrét, illetve abszolút folytonos valószínűségi változó változó várható értékét?*
7. *Melyek a várható érték legfontosabb tulajdonságai?*
8. *Hogyan definiáljuk és hogyan számoljuk ki a valószínűségi változó szórásnégyzetét?*
9. *Melyek a szórásnégyzet legfontosabb tulajdonságai?*

Feladatok

1. *Ledobunk egy pontot véletlenszerűen és egyenletes eloszlással az egységnégyzetre. Jelölje ξ a pontnak az egységnégyzet határától való távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűség függvényét, a várható értékét és szórásnégyzetét.*

2. *Oldja meg az előző feladatot egységnégyzet helyett egység sugarú körlemez, gömb, illetve egység oldalhosszú négyzet esetén is.*

5. fejezet

Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

5.1. Matematikai eszközök

5.1.1. Valószínűségi változó generátorfüggvénye

1. Definíció. *Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi amely csak nemnegatív egész értékeket vesz fel. Definiáljuk a $G_\xi : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt*

$$G_\xi(z) \doteq \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} p_k z^k = \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} \mathbb{P}(\xi = k) z^k \qquad (z \in D)$$

módon. A D halmaz a komplex számok testének egy olyan legbővebb részhalmaza, amelyen a G_ξ hatványsor abszolút konvergens.

2. Megjegyzés. *A várható érték transzformációs szabálya alapján kapjuk, hogy*

$$G_\xi(z) = \mathbb{E}(z^\xi).$$

3. Tétel. ***A generátorfüggvény legfontosabb tulajdonságai:***

1. *Visszaadja az eloszlást, amiből származik:*

$$p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

2. *Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik **várható érték**e, az a generátorfüggvény segítségével*

$$\mathbb{E}(\xi) = G_\xi'(1)$$

módon számolható.

3. Amennyiben a ξ valószínűségi változó olyan, hogy létezik a ξ-nek szórásnégyzete, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'_\xi(1) + G''_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2.$$

4. Ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, akkor

$$G_{\xi_1+\xi_2}(z) = G_{\xi_1}(z)G_{\xi_2}(z).$$

Bizonyítás. Csak a 4.-et fogjuk bizonyítani. ⊠

5.1.2. Független összeg meghatározása konvolúcióval és generátorfüggvény segítségével

4. Definíció. *Legyenek ξ_1 és ξ_2 olyan diszkrét független valószínűségi változók, amelyek csak nemnegatív egész értékeket vesznek fel. Jelölje (p_i) és (q_j) a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók eloszlását. Ekkor az (r_k)*

$$r_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

*eloszlást a (p_i) **és** (q_j) **eloszlások konvolúciójá**nak nevezünk.*

5. Tétel. *Legyenek ξ_1, ξ_2 nemnegatív egész értékeket felvevő független diszkrét valószínűségi változók p_i és q_j eloszlásokkal. Ekkor a $\xi_1 + \xi_2$ összeg eloszlása meghatározható*

- ***konvolúció segítségével:***

  $\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_i p_{k-i}q_i$, azaz független összeg eloszlása egyenlő az eloszlások konvolúciójával.

- ***generátorfüggvény segítségével:***

  $G_{\xi_1+\xi_2}(z) = G_{\xi_1}(z)G_{\xi_2}(z)$, azaz független összeg generátorfüggvénye egyenlő a generátorfüggvények szorzatával, azaz a generátorfüggvény független összeget szorzatba visz.

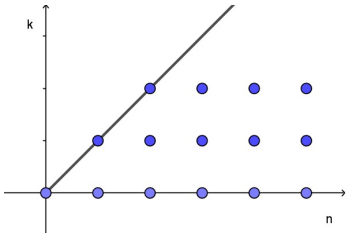
Bizonyítás.

- Nyilvánvaló a valószínűség σ, vagy véges additivitása és a függetlenség miatt.
- Két bizonyítást is adunk.

  1. Az előző pont és a szummák felcserélése alapján szintén könnyen bizonyítható, ugyanis:

$$G_{\xi_1+\xi_2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\xi_1 = n-k)\mathbb{P}(\xi_2 = k)z^{n-k}z^k.$$

A szummák felcserélése



$$
\begin{aligned}
G_{\xi_1+\xi_2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=n-k)z^{n-k}\mathbb{P}(\xi_2=k)z^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbb{P}(\xi_2=k)z^k\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=n-k)z^{n-k}\right) = \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=n-k)z^{n-k}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_2=k)z^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=n)z^n\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_2=k)z^k = G_{\xi_1}(z)G_{\xi_1}(z).
\end{aligned}
$$

2. Mivel ξ nemnegatív egész értékű és $z := a+bi$ egy rögzített komplex szám, ezért a z^ξ és a $\mathbb{E}(z^\xi)$

$$
\begin{aligned}
z^\xi &:= |z|^\xi\left(\cos(\xi\phi)+i\sin(\xi\phi)\right), \\
\mathbb{E}(z^\xi) &:= \mathbb{E}\left(|z|^\xi\cos(\xi\phi)\right)+i\mathbb{E}\left(|z|^\xi\sin(\xi\phi)\right)
\end{aligned}
$$

módon értelmezhető, ahol $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ és $|z|\neq 0$ esetén

$$
\varphi := \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right), & \text{ha } a>0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } a=0, \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)+\pi, & \text{ha } a<0. \end{cases}
$$

Mivel ξ_1 és ξ_2 függetlenek, így tetszőleges $z\in D$ esetén a z^{ξ_1} és a z^{ξ_2} valószínűségi változók is függetlenek, így

$$
G_{\xi_1+\xi_2}(z) = \mathbb{E}\left(z^{\xi_1+\xi_2}\right) = \mathbb{E}\left(z^{\xi_1}z^{\xi_2}\right) = \mathbb{E}\left(z^{\xi_1}\right)\mathbb{E}\left(z^{\xi_2}\right) = G_{\xi_1}(z)G_{\xi_1}(z).
$$

⊠

5.1.3. A geometriai sor összegképlete

Ha $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, akkor az

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots$$

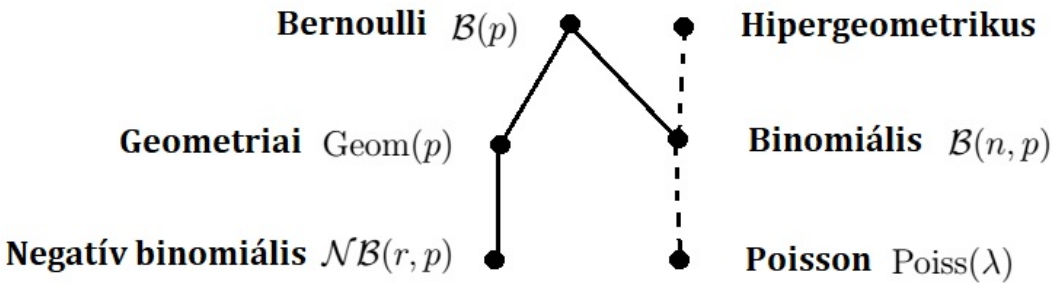
numerikus sort **geometriai sor**nak nevezzük. A **geometriai sor összegképlete** könnyen megkapható

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

5.2. Nevezetes diszkrét eloszlások

Az alábbi nevezetes diszkrét valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Diszkrét egyenletes;
2. Bernoulli;
3. Geometriai;
4. Negatív binomiális;
5. Binomiális;
6. Hipergeometrikus;
7. Poisson.



5.2.1. A diszkrét egyenletes eloszlás

6. Definíció. *Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, amely a $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ értékeket veszi fel*

$$p_i = \mathbb{P}(\xi = x_i) = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

*eloszlással. Ekkor azt mondjuk, hogy a ξ egy **diszkrét egyenletes eloszlású** valószínűségi változó.*

7. Tétel. *Megőrizve a fenti definíció jelöléseit a ξ **valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = s_n^2.$$

8. Példa. *Diszkrét egyenletes eloszlásra példa a kockadobás szabályos dobókockával, azonban ha a dobókocka nem szabályos, akkor nem diszkrét egyenletes eloszlás valósul meg.*

5.2.2. A Bernoulli eloszlás

9. Definíció. *A Bernoulli eloszlás p paraméterrel pénzfeldobás egy olyan érmével, ahol a fejdobás valószínűsége $p \in]0, 1[$. Az érmét egyszer dobjuk fel és a ξ valószínűségi változó 1 értéket vesz fel, ha a fejet dobunk, és 0-t, ha írást dobunk. Jele: $\xi \sim \mathcal{B}(p)$.*

A Bernoulli eloszlást egy olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező írja le, amelyre $\Omega = \{F, I\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, a $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ függvény az Ω egyelemű részhalmazain $\mathbb{P}(\{F\}) = p, \mathbb{P}(\{I\}) = 1-p := q$ értékeket vesz fel. Ez a valószínűségi mező csak akkor klasszikus, ha az érme szabályos, azaz a fejdobás és az írásdobás valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót $\xi(F) = 1$, $\xi(I) = 0$ módon értelmezzük.

A ξ eloszlása:

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

10. Tétel. *Ha ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó, akkor a ξ*

- ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = p, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = p(1-p).$$

Bizonyítás. A fenti táblázat alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1-p).
\end{aligned}$$

⊠

A Bernoulli eloszlást Jakob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikusról nevezték el.

5.2.3. A geometriai eloszlás

11. Definíció. *A geometriai eloszlásnak két változata van. Mindkét esetben független kísérletek sorozatát végezzük és egy p valószínűségű A esemény bekövetkezését figyeljük. A ξ valószínűségi változót p* ***paraméterű geometriai eloszlás****nak nevezzük, ha*

A. változat: *ξ_A jelöli az első sikeres bekövetkezéshez szükséges kísérletek számát.*

B. változat: *ξ_B jelöli az első sikeres bekövetkezés előtti kísérletek számát.*

12. Tétel. *Megőrizve a fenti jelöléseket a ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó*

A. változat: *A ξ_A valószínűségi változó*

- ***eloszlása:***
$$p_k = p(1-p)^{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots);$$
- ***várható értéke és szórásnégyzete:***
$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1-p}{p^2}.$$

B. változat: *A ξ_B valószínűségi változó*

- ***eloszlása:***
$$p_k = p(1-p)^{k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots);$$
- ***várható értéke és szórásnégyzete:***
$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p} - 1; \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1-p}{p^2}$$

Bizonyítás.
A. változat: generátorfüggvény segítségével számolunk.

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)z)^{k-1} = pz \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)z)^k = \frac{pz}{1-(1-p)z},$$
$$G'(z) = \frac{p}{(1-(1-p)z)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad G'(1) = \frac{1}{p},$$
$$G''(z) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)z)^3} \qquad \Longrightarrow \qquad G''(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_A) = G'(1) = \frac{1}{p},$$
$$\mathbb{D}^2(\xi_A) = G'(1) + G''(1) - (G'(1))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

B. változat: Az A változat és a valószínűségi változó, illetve a szórásnégyzet jól ismert tulajdonságai (lásd később) alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_B) = \mathbb{E}(\xi_A - 1) = \frac{1}{p} - 1;$$
$$\mathbb{D}^2(\xi_B) = \mathbb{D}^2(\xi_A - 1) = \mathbb{D}^2(\xi_A) = \frac{1-p}{p^2}.$$

⊠

13. Tétel. ***A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága:***

A. változat: $\mathbb{P}(\xi = n + k | \xi > n) = \mathbb{P}(\xi = k)$ *minden* $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ *esetén.*

B. változat: $\mathbb{P}(\xi = n + k | \xi \geqslant n) = \mathbb{P}(\xi = k)$ *minden* $n, k = 0, 1, 2, \ldots$ *esetén.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással könnyen megkapható. ⊠

A geometriai eloszlás a nevét a mértani (tehát geometriai) sorról kapta, mely szerint ha $p \in]0, 1[$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k(1-p) = \frac{1-p}{1-p} = 1.$$

A negatív binomiális eloszlás leírása megtalálható a függelékben.

5.2.4. Negatív binomiális

14. Definíció. *Független kísérletek sorozatát végezzük, melyben egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát figyeljük. Jelölje ξ azoknak a kísérleteknek a számát, amely ahhoz szükséges, hogy a megfigyelt A esemény r-edszer bekövetkezzen (ahol $r \in \mathbb{Z}_+$ rögzített szám). Ekkor azt mondjuk, hogy ξ egy* ***negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó*** *r* ***és*** *p* ***paraméterekkel****. Másik neve a negatív binomiális eloszlásnak: Pascal eloszlás.*

Jele: $\xi \sim \mathcal{NB}(r, p)$.

15. Megjegyzés. *1. Amikor egy p valószínűséggel bekövetkező A eseményről beszélünk, mindig gondoljunk arra, hogy feldobunk egy érmét, amelyre*

$$\mathbb{P}(\textit{fej}) = p, \qquad \mathbb{P}(\textit{írás}) = 1 - p.$$

Tehát az általunk vizsgált diszkrét valószínűségi változók nagy része Bernoulli eloszlásra vezethető vissza.

2. Egy $\xi \sim \mathcal{NB}(r,p)$ valószínűségi változó r db független p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó független összege, azaz, ha $\xi \sim \mathcal{NB}(r,p)$, akkor léteznek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r \sim \mathrm{Geom}(p)$ (A változat) geometriai eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_r.$$

16. Tétel. *Legyen $\xi \sim \mathcal{NB}(r,p)$, ekkor*

- ***a ξ eloszlása:***

$$\mathbb{P}(\xi = r+k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(amiből látszik, hogy $\mathcal{R}_\xi = \{r, r+1, r+2, \dots\}$).

- ***A ξ várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Bizonyítás.

- **eloszlás:** Tekintsük az F és I szimbólumokból alkotott $r+k$-tagú sorozatot, melyben az F-ek száma r, az $r+k$-adik pozícióban F áll, a többi pozícióban I. Az ilyen minták száma $\binom{r+k-1}{r-1}$. Ebből az eloszlást leíró képlethez a függetlenség felhasználásával jutunk el az eloszlást leíró képlethez.

- **Várható érték és szórásnégyzet:** Egy korábbi megjegyzés szerint ha $\xi \sim \mathcal{NB}(r,p)$, akkor $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_r$, ahol ξ_i p paraméterű geometriai eloszlású független valószínűségi változók tetszőleges $i = 1, 2, \dots, r$ esetén. Így

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_r) = r\frac{1}{p} = \frac{r}{p};$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_r) = r\frac{1-p}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

⊠

5.2.5. A binomiális eloszlás

17. Definíció. *Jelölje ξ egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát n független kísérlet esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ* ***binomiális eloszlású*** *n* ***és*** *p* ***paraméterekkel****, amit $\xi \sim B(n,p)$ módon jelölünk.*

18. Megjegyzés. *Egy $\xi \sim \mathcal{B}(n,p)$ valószínűségi változó n db független p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó összege, azaz, léteznek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ p paraméterű Bernoulli eloszlású független valószínűségi változók úgy, hogy*

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

19. Tétel. *Ha $\xi \sim B(n,p)$, akkor ξ valószínűségi változó*

- ***eloszlása:***
$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \dots, n);$$

- ***várható értéke és szórásnégyzete:***
$$\mathbb{E}(\xi) = np, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = np(1-p).$$

Bizonyítás. Ha $\xi \sim \mathcal{B}(n,p)$, akkor ξ n db független p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó független összege, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, ahol

$$\xi_i := \begin{cases} 1 \text{ ha az } i\text{-edik alkalommal } A \text{ bekövetkezik;} \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

- **A ξ eloszlásá**nak bizonyításához hasonló út vezet, mint amit a negatív binomiális esetén láttunk.

- **A ξ várható értéke és szórásnégyzete:**

  A várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

  $$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_n) = np;$$

  illetve, mivel a ξ_i valószínűségi változók páronként függetlenek, így a szórásnégyzeteik is összeadódnak, azaz

  $$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_n) = np(1-p).$$

⊠

A visszatevéses golyóhúzás esetén szintén binomiális eloszlást kapunk. Alkalmazzuk a szokásos jelöléseket: N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N-s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros. Ekkor, ha ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor ξ binomiális eloszlású n és $p = \frac{s}{N}$ paraméterekkel.

A binomiális eloszlás kapcsolatban áll a binomiális tétellel. Legyen $p \in (0,1)$, $\xi \sim \mathcal{B}(n,p)$ és $p_k = \mathbb{P}(\xi = k)$. A binomiális tétel alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1,$$

a szumma jel mögött éppen egy $\xi \sim B(n,p)$ valószínűségi változó eloszlásának a tagjai állnak. Innen származik az eloszlás neve.

5.2.6. A hipergeometrikus eloszlás

20. Definíció. *Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Alkalmazzuk a szokásos jelöléseinket, azaz N jelöli a golyók számát, s a piros golyók számát, $N-s$ a fehér golyók számát, n golyót húzunk, amelyek között k piros. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó* ***hipergeometrikus eloszlású****.*

A ξ valószínűségi változó már nem mindig tud bármilyen értéket felvenni 0 és n között, mivel a golyókat a húzásokat követően nem rakjuk vissza az urnába. Például, ha $0 < n - (N-s)$ akkor legalább ennyi piros golyót kell húznunk, mivel a fehérek elfogynak a húzás befejezése előtt.

21. Tétel. *Megőrizve a fenti jelöléseket a ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó*

- ***eloszlása:***

$$p_k = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ ahol } (\max\{0, n-(N-s)\} \leqslant k \leqslant \min\{s,n\});$$

- ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = n\frac{s}{N}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = n\frac{N-n}{N-1}\frac{s}{N}\left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. ⊠

A hipergeometrikus eloszlás kapcsolatba hozható az úgynevezett Vandermonde azonossággal (1772), mely szerint

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Ez az összefüggés már jóval Vandermonde előtt is ismert volt (1303) Zhu Shijie kínai matematikus révén.

5.2.7. A Poisson eloszlás

22. Definíció. *Legyen $\lambda > 0$ egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó* ***Poisson eloszlású λ paraméterrel****, ha eloszlása:*

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Jele $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda)$.

23. Tétel. *Ha $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda)$, akkor a ξ valószínűségi* ***változó várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda \qquad\qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \lambda$$

Bizonyítás. A generátorfüggvény segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}, \\ G'(z) &= \lambda e^{\lambda(z-1)} \qquad \Longrightarrow \qquad G'(1) = \lambda, \\ G''(z) &= \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \qquad \Longrightarrow \qquad G''(1) = \lambda^2, \end{aligned}$$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= G'(1) = \lambda, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= G'(1) + G''(1) - \left(G'(1)\right)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

⊠

A Poisson eloszlás a exponenciális függvénnyel áll kapcsolatban. Írjuk fel az exponenciális függvény Taylor sorát: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$. Írjuk x helyére λ-t, majd szorozzuk meg mindkét oldalt $e^{-\lambda}$-val. Így kapjuk, hogy $1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ami mutatja, hogy valóban eloslást kaptunk.

A Poisson eloszlás a nevét felfedezőjéről **Siméon Denis Poisson**ról kapta (Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile). Az eloszlás első közismert alkalmazása a porosz hadseregben lórúgástól meghalt katonák számának leírása volt (Ladislaus von Bortkiewicz: Das Gesetz der kleinen Zahlen („A kis számok törvénye"), 1898)

A nevezetes diszkrét eloszlások sorozataira vonatkozó határértéktételek megtalálhatók a függelékben.

Példa *Legyenek* $\xi_1 \sim \text{Poiss}(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_2)$ *független eloszlások. Határozzuk meg a* $\xi_1 + \xi_2$ *eloszlást.*

- $\xi_1 + \xi_2$ ***eloszlásának meghatározása konklúzióval***

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^k} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Azaz független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege szintén Poisson és a paraméterek összeadódnak.

- $\xi_1 + \xi_2$ ***eloszlásának meghatározása generátorfüggvénnyel*** *Ha* $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda)$ *akkor a* ξ *generátorfüggvénye*

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(1-z)},$$

így kapjuk, hogy

$$\xi_{\xi_1+\xi_2}(z) = G_{\xi_1}(z) G_{\xi_2}(z) = e^{\lambda_1(1-z)} e^{\lambda_2(1-z)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(1-z)},$$

azaz $(\xi_1 + \xi_2) \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

5.2.8. Nevezetes diszkrét eloszlások generátorfüggvényei

- **Bernoulli eloszlás:** Ha ξ Bernoulli eloszlású p paraméterrel, akkor

$$G_\xi(z) = (1-p)z^0 + pz = 1 - p + pz.$$

- **Geometriai eloszlás** Ha $\xi \sim \mathrm{Geom}(p)$, akkor

$$G_\xi(z) = \frac{zp}{1-qz},$$

ahol $q := 1-p$, $p_k = pq^{k-1}$ $k = 1, 2, \ldots$. A geometriai sorra vonatkozó összegképlet alapján kapjuk, hogy

$$G_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = z\sum_{k=1}^{\infty} p(qz)^{k-1} = z\sum_{k=0}^{\infty} p(qz)^k = \frac{zp}{1-qz}.$$

- **Binomiális eloszlás** Ha $\xi \sim \mathcal{B}(n,p)$, akkor

$$G_\xi(z) = (1-p+pz)^n,$$

ami könnyen kijön a generátorfüggvény független összegképlet alapján. Közvetlen számolással, ahol $p_k = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pz)^n.$$

- **Poisson eloszlás:** Ha $\xi \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$, akkor

$$G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

ugyanis mivel $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén, így kapjuk, hogy

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

5.2.9. Határérték tételek

1. Hipergeometrikus eloszlás nagy N esetén binomiálissal közelíthető, azaz ha ξ_k hipergeometrikus eloszlású N_k és s_k paraméterekkel úgy, hogy $N_k \to \infty$ és $\frac{s_k}{N_k} \to p \in]0,1[$, továbbá $n_k = n$ egy rögzített szám, akkor $\xi_k \sim \mathcal{B}(n,p)$.

2. A Poisson eloszlás nagy n esetén Binomiális eloszlással közelíthető, azaz ha $\xi_k \sim \mathcal{B}(n_k, p_k)$ úgy, hogy $n_k \to \infty$ és $n_k p_k \to \lambda > 0$, akkor $\xi_k \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

Bizonyítás.

1. Könnyű látni, hogyha sok golyó közül húzunk, akkor nem számít, hogy a golyóhúzás visszatevéses, vagy visszatevés nélküli.

2. Nem bizonyítjuk.

⊠

Ellenőrző kérdések

1. *Adja meg egy binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.*

2. *Adja meg egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.*

3. *Adja meg egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét.*

6. fejezet

Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

6.1. Matematikai eszközök

6.1.1. Valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

1. Definíció. *Egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt nevezzük.

2. Megjegyzés. *A várható érték transzformációs formulája alapján látható hogy*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Tétel. *A karakterisztikus függvények tulajdonságai:*

1. *Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < +\infty$, akkor*
$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{\varphi^{'}(0)}{i};$$
2. *Ha $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(\xi^2) = -\varphi^{''}(0)$, így*
$$\mathbb{D}^2(\xi) = -\varphi^{''}(0) + \varphi^{'}(0)^2.$$
3. *Ha ξ_1 és ξ_2 független valószínűségi változók, akkor*
$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t),$$
azaz a karakterisztikus függvény független összeget szorzatba visz.

4. Egyértelműségi tétel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

azaz a karakterisztikus függvény visszaadja az abszolút folytonos eloszlást, amelyből származik.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. ⊠

4. Megjegyzés. *A momentumok jelentőségét az adja, hogy visszaadják azt az eloszlást, amiből származnak. A karakterisztikus függvény Taylor-sorba fejthető*

$$\Phi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(\xi^k) + \mathcal{R}_{n+1}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

módon, ahol az $\mathcal{R}_{n+1}$ a maradéktag. Tehát a karakterisztikus függvény Taylor-sorában fellépő együtthatók éppen a momentumok.

A momentumokat a statisztikában tapasztalati (vagy más néven empirikus) momentumokkal becsülik, amelyek a mintaelemek megfelelő hatványainak az átlaga.

*Gyakran előfordul, hogy a minta ismert eloszlásból származik, de az eloszlás paraméterei ismeretlenek. Az ismeretlen paraméterek kifejezhetőek a momentumokból (illetve a tapasztalati momentumokból), bár sokszor nemlineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ezt a módszert is szokás a **momentumok módszeré**nek nevezni.*

6.1.2. Független abszolút folytonos eloszlások összegének meghatározása

5. Definíció. *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrálható függvények. Az $(f * g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

*módon definiált függvényt az f és g **függvények konvolúciójá**nak nevezzük.*

6. Tétel. *Legyenek ξ_1, ξ_2 független, abszolút folytonos valószínűségi változók. A $\xi_1 + \xi_2$ összeg eloszlását meg tudjuk határozni*

- ***konvolúció segítségével:***

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz független összeg sűrűségfüggvénye egyenlő a tagok sűrűségfüggvényeinek a konvolúciójával;

- ***karakterisztikus függvény segítségével:***

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, azaz összeg karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek a szorzatával, tehát a karakterisztikus függvény - hasonlóan a generátorfüggvényhez - összeget szorzatba visz.

Bizonyítás.

- A konvolúcióra vonatkozó képlet könnyen megkapható helyettesítéses integrálás segítségével:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \mathbb{P}(\xi_1+\xi_2<x) = \\ &= \iint_{x_1+x_2<x} f_1(x_1)f_2(x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u-t)f_2(t)dt\right)du,\end{aligned}$$

amiből kapuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u-t)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(u-t)dt.$$

- A karakterisztikus függvényekre vonatkozó összefüggésre két bizonyítást is adunk.

  1. Könnyen kijön a konvolúciós képletből az integrálás sorrendjének a megcserélésével:

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1+\xi_2}(x)e^{itx}dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy\right)e^{itx}dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)f_2(y)e^{it(x-y)}e^{ity}dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)e^{it(x-y)}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)e^{ity}dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)e^{itx}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)e^{ity}dy = \\ &= \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t).\end{aligned}$$

  2. igényel egy kis előkészítést. Euler képlete alapján

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így ha ξ egy valószínűségi változó, akkor tudjuk értelmezni az $e^{it\xi}$ valószínűségi változót, illetve a várható értékét

$$e^{i\xi} := \cos(t\xi) + i\sin(t\xi)$$
$$\mathbb{E}(e^{i\xi}) := \mathbb{E}(\cos(t\xi)) + i\mathbb{E}(\sin(t\xi))$$

módon tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Mivel ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók függetlenek, így az $e^{it\xi_1}$ és $e^{it\xi_2}$ valószínűségi változók is függetlenek, így kapjuk, hogy

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(\xi_1+\xi_2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\right) = \mathbb{E}\left(e^{it\xi_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{it\xi_2}\right) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t).$$

⊠

Példa *Legyen ξ_1 és ξ_2 független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Az eloszlásfüggvények konvolúciójával határozzuk meg a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó f eloszlásfüggvényét.*

$$f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-t)}\lambda e^{-\lambda t}dt =$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x 1dt = \lambda^2 x e^{-\lambda t}, \qquad \text{ha } x > 0, (\text{egyébként } f(x) = 0).$$

A kapott eredmény mutatja, hogy $\xi_1 + \xi_2$ egy λ paraméterű 2-od rendű gamma eloszlás (lásd később).

6.1.3. A változók cseréjének (transzformációjának) a szabálya

A valószínűségi változó transzformációján azt értjük, hogyha ξ egy valószínűségi változó, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan növekvő vagy csökkenő differenciálható függvény, akkor kíváncsiak vagyunk, hogy hogyan kaphatjuk meg a $g(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, illetve a sűrűségfüggvényét a ξ valószínűségi változó eloszlás, illetve sűrűségfüggvényéből.

Legyen $\xi : \Omega \to \mathcal{R}_\xi$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton differenciálható függvény. Definiáljuk a $-\infty \leqslant \underline{a} < \overline{a} \leqslant +\infty$ konstansokat a

$$\underline{a} := \sup\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{F}_\xi(x) = 0\}$$
$$\overline{a} := \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{F}_\xi(x) = 1\}$$

módon. Ekkor az $\eta := g(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

a. g szigorúan monoton

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < g(\underline{a}) \\ \mathbb{F}_\xi(g^{-1}(x)), & \text{ha } g(\underline{a}) \leqslant x < g(\overline{a}) \\ 1, & \text{ha } x \geqslant g(\overline{a}). \end{cases}$$

b. g szigorúan csökkenő

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < g(\overline{a}) \\ 1 - \mathbb{F}_\xi(g^{-1}(x)), & \text{ha } g(\overline{a}) \leqslant x < g(\underline{a}) \\ 1, & \text{ha } x \geqslant g(\underline{a}). \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény mindkét esetben

$$f(x) = \begin{cases} |(g^{-1})'(x)|\mathbb{F}_\xi(g^{-1}(x)), & \text{ha } x \in (u, v) \\ 0, & \text{egyébként .} \end{cases}$$

ahol $u = \min(g(\underline{a}), g(\overline{a})), v = \max(g(\underline{a}), g(\overline{a}))$.

6.2. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

Az alábbi nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni:

1. Egyenletes;
2. Exponenciális;
3. Normális.

6.2.1. Az egyenletes eloszlás

7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó* ***egyenletes eloszlás****ú az $[a, b]$ intervallumon, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával. Jele: $\xi \sim U(a, b)$.*

A ξ valószínűségi változó ***eloszlás****, illetve* ***sűrűségfüggvénye****:*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & ha\ x \in [a, b]; \\ 1, & ha\ x > b \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & ha\ x \in [a, b]; \\ 0, & ha\ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

8. Megjegyzés. *Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye könnyen kikövetkeztethető abból, hogy az intervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával. Ehhez legyen $\xi \sim U(a,b)$ és $x \in]a,b[$. Ekkor létezik $C \in \mathbb{R}$ úgy, hogy*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi \in [a,x[) = C \cdot (x-a).$$

azonban

$$1 = \mathbb{F}_\xi(b) = C(b-a),$$

amiből kapjuk, hogy $C = \frac{1}{b-a}$.

A sűrűségfüggvény könnyen megkapható az eloszlásfüggvényből deriválással.

9. Tétel. *Ha $\xi \sim U(a,b)$ akkor a ξ valószínűségi változó* ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=a}^{x=b} = \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=a}^{x=b} = \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b^2+ab+b^2)}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \\
&= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

10. Példa. *Legyen $\xi \sim \mathrm{U}[a,b]$ és $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $\varphi(\xi) \sim \mathrm{U}[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$.*

Megoldás: *Alkalmazhatnánk a változók cseréjének a szabályát, de inkább közvetlen módon számolunk. Idézzük fel az egyenletes eloszlású valószínűségi változóról tanultakat:*

Ha $\xi \sim \mathrm{U}[a,b]$, akkor

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & ha\ a \leqslant x < b, \\ 1, & ha\ x > b. \end{cases}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_{\alpha\xi+\beta}(x) = \mathbb{P}(\alpha\xi + \beta < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \frac{x-\beta}{\alpha}\right).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_{\alpha\xi+\beta}(x) = \begin{cases} 0, & ha\ \dfrac{x-\beta}{\alpha} < a \quad \Leftrightarrow \quad x < \alpha a + \beta, \\ \dfrac{\frac{x-\beta}{b} - a}{b-a} = \dfrac{x - (\alpha a + b)}{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}, & ha\ \dfrac{x-\beta}{\alpha} \in [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta], \\ 1, & ha\ \dfrac{x-\beta}{\alpha} > b \quad \Leftrightarrow \quad x > \alpha b + \beta, \end{cases}$$

amiből kapjuk, hogy $\varphi(\xi) \sim \mathrm{U}[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$.

6.2.2. Az exponenciális eloszlás

11. Definíció. *Legyen* $\lambda > 0$. *Azt mondjuk, hogy a* ξ *valószínűségi változó* λ ***paraméterű exponenciális eloszlás****ú valószínűségi változó, ha* ***eloszlás****, illetve* ***sűrűségfüggvénye****:*

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & ha\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & ha\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim Exp(\lambda)$.

12. Tétel. *Ha* $\xi \sim Exp(\lambda)$, *akkor a* ξ *valószínűségi változó* ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bizonyítás. Az $\mathbb{E}(\xi)^2$ és az $\mathbb{E}(\xi)^2$ kiszámítása során parciálisan kell integrálnunk.

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{+\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = \underbrace{\left[x(-e^{-\lambda x})\right]_{x=0}^{x=+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx =$$

$$\begin{pmatrix} f(x) = x & g'(x) = xe^{-\lambda x} \\ f'(x) = 1 & g(x) = -e^{-\lambda x} \end{pmatrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x="\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_0^{+\infty} x^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = \underbrace{\left[x^2\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_{x=0}^{x=+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} (2x) e^{-\lambda x} dx =$$

$$\begin{pmatrix} f(x) = x^2 & g'(x) = e^{-\lambda x} \\ f'(x) = 2x & g(x) = -e^{-\lambda x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx}_{\mathbb{E}(\xi)=\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

⊠

13. Tétel. *Az exponenciális eloszlás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. ***Örökifjú tulajdonság:*** *Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor*

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \qquad (s, t > 0).$$

2. ***Poisson folyamat:*** *Ha időegység alatt bekövetkező események száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor két egymást követő bekövetkezés között eltelt idő exponenciális eloszlású ugyanazzal a λ paraméterrel.*

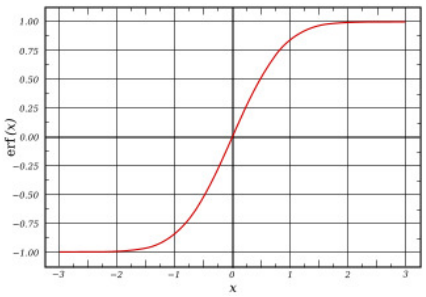
Bizonyítás. Az örökifjú tulajdonság egyszerű számolással könnyen kijön, a Poisson folyamat azonban egy komolyabb diszciplína (a sztochasztikus folyamatok) része. ⊠

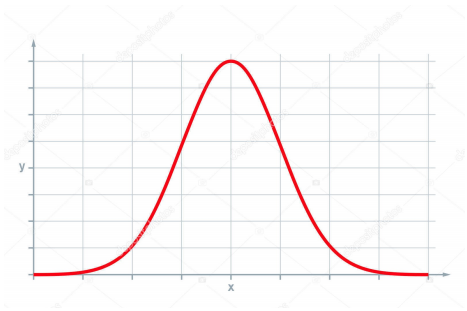
6.2.3. A normális eloszlás

14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó* ***standard normális*** *(jele:$\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$), ha* ***eloszlás****, illetve* ***sűrűségfüggvénye****:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.





Megmutatjuk, hogy φ valóban sűrűségfüggvény, ehhez polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk.

Helyettesítéses integrálás két dimenzióban: Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to A$ úgy, hogy $g^{-1}(B) = A$ továbbá

$$x = g_1(u, v), \qquad y = g_2(u, v)$$

$$\int\int_A f(x, y)dydx = \int\int_B f(u, v)\mathcal{J}(u, v)dvdu$$

ahol $\mathcal{J}(u, v)$ az (u, v) pontbeli **Jacobi determináns**

$$\mathcal{J}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} g_1(u, v) & \dfrac{\partial}{\partial v} g_1(u, v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u} g_2(u, v) & \dfrac{\partial}{\partial v} g_2(u, v) \end{pmatrix}$$

15. Tétel. *A $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ módon definiált függvény egy sűrűségfüggvény.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dydx.$$

- **Polárkoordinátás helyettesítés:** Legyen $A = \mathbb{R}^2$, $B = [0, +\infty[\times[0, 2\pi[$, $g = (g_1, g_2)$, $g_1 = g_1(r, \varphi)$, $g_2 = g_2(r, \varphi)$.

$$x = g_1(r, \varphi) = r\cos(\varphi) \qquad y = g_2(r, \varphi) = r\sin(\varphi).$$

- **A helyettesítés:**

$$f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = e^{-\frac{r^2(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)}{2}} = e^{-\frac{r^2}{2}},$$

- **A Jacobi determináns értéke:**

$$\mathcal{J}(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos(\varphi) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\cos(\varphi) \\ \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin(\varphi) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right) = r.$$

Így kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dydx = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}\,d\varphi dr =$$
$$= \int_0^{+\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = 2\pi \underbrace{\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_{r=0}^{r=+\infty}}_{=1} = 2\pi,$$

amivel a bizonyítás teljes.

⊠

16. Tétel. *Ha $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor az η* ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\eta) = 0, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = 1.$$

Bizonyítás. Az $\mathbb{E}(\eta^2)$ kiszámításánál parciálisan integrálunk.

$$\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = 0$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{=\sqrt{2\pi}}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} f(t)=t & g'(t)=te^{-\frac{t^2}{2}} \\ f'(t)=1 & g(t)=-e^{-\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$$
$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = 1.$$

⊠

17. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* ξ ***valószínűségi változó normális eloszlású*** m ***és*** σ^2 ***paraméterekkel*** *(jele:* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*), ha létezik* $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ *és* $\xi = \sigma\eta + m$*, ahol* $\sigma > 0$*,* $m \in \mathbb{R}$*.*

18. Tétel. *Ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*, akkor a* ξ

- ***eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye*** *tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén:*

$$\mathbb{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

- ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2;$$

Bizonyítás. A valószínűségi változó transzformációjával kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\sigma\eta + m < x) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

A kapott integrálban hajtsuk végre a $t = \frac{u-m}{\sigma}$ $t \in \mathbb{R}$ helyettesítést. Ekkor

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{\sigma} du$$

Régi határok: $t : -\infty \to \frac{x-m}{\sigma}$ és $u = \sigma t + m$,
Új határok: $u : -\infty \to \sigma\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + m = x$, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du.$$

A várható érték és a szórásnégyzet jólismert tulajdonságai (lásd részletesen a következő előadáson) $\mathbb{E}(\xi) = m$ és $\mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2$, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\sigma\eta + m) = \sigma\mathbb{E}(\eta) + m = \sigma \cdot 0 + m = m, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\sigma\eta + m) = \sigma^2\mathbb{D}^2(\eta) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2, \end{aligned}$$

amivel a bizonyítás teljes. ☒

19. Tétel. *Tulajdonságok:*

1. ***Standardizálás:*** *Ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*, akkor* $\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$*.*

2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*

3. Ha $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ *független eloszlások, akkor*

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Bizonyítás. Az 1. állítás nyilvánvaló.

A 2. állítás általánosabb körülmények között is érvényes. Megmutatjuk, hogyha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel és f sűrűségfüggvénnyel, további f az y tengelyre szimmetrikus, akkor $\mathbb{F}(-x) = 1 - \mathbb{F}(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel f szimmetrikus az y tengelyre, így $\mathbb{P}(\xi \geqslant x) = \mathbb{P}(\xi < -x)$, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}\left((\xi < x) \cup (\xi \geqslant x)\right) = \mathbb{P}(\xi < x) + \mathbb{P}(\xi \geqslant x) = \mathbb{P}(\xi < x) + \mathbb{P}(\xi < -x) \\ &= \mathbb{F}_\xi(x) + \mathbb{F}_\xi(-x), \end{aligned}$$

azaz valóban $\mathbb{F}(-x) = 1 - \mathbb{F}(x)$.

A 3. állítás. Legyenek $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ független valószínűségi változók. Könnyű látni, hogy $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = m_1 + m_2$, $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Így már csak azt kell bebizonyítani, hogy $\xi_1 + \xi_2$ szintén normális eloszlású. A részletes bizonyítást lásd később. ⊠

20. Példa. *Legyen* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *és* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ *tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *estén, ahol* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Ekkor* $\varphi(\xi) \sim \mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.
Megoldás: *Ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *akkor létezik* $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ *úgy, hogy* $\xi = \sigma\eta + m$. *Így*

$$\alpha\xi + \beta = \alpha(\sigma\eta + m) + \beta = \alpha\sigma\eta + \alpha m + \beta,$$

amiből kapjuk, hogy $\varphi(\xi) \sim \mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

6.2.4. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások karakterisztikus függvényei

- **Exponenciális eloszlás:** Ha $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, akkor

$$\varphi_\xi = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ugyanis

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it} \int_0^{+\infty} (\lambda - it) e^{-(\lambda - it)x} dx = \\ &= \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{1} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

A 4. egyenlőségjel komplex függvénytani megfontolásokon alapul, amelyeket nem részletezünk.

- **Standard normális eloszlás:** Ha $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor $\varphi_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ugyanis

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+itx} dx.$$

A kitevőben lévő kifejezést alakítsuk teljes négyzetté

$$-\frac{x^2}{2} + itx = -\frac{1}{2}(x^2 - 2itx) = -\frac{1}{2}\left((x-it)^2 + t^2\right) = -\frac{(x-it)^2}{2} - \frac{t^2}{2}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{1} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

A 3. egyenlőségjel komplex függvénytani megfontolásokon alapul, amelyeket nem részletezünk.

- **Normális eloszlás:** Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor

$$\varphi(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A bizonyításhoz felhasználjuk a lineáris transzformáció karakterisztikus függvényre kifejtett hatását, mely szerint

$$\varphi_{\alpha\xi+\beta}(t) = e^{it\beta} \varphi_\xi(\alpha t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Így, mivel $\xi = \sigma\eta + m$, ahol $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, így kapjuk, hogy

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{\sigma\eta+m}(t) = e^{itm} \varphi_\eta(\sigma t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

6.2.5. Független normális eloszlások összege

21. Tétel. *Legyenek $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ független normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Bizonyítás. Az állítást kétféleképpen bizonyítjuk.

- A konvolúciós képletet alkalmazunk. Az egyszerűbb számolás érdekében felhasználjuk, hogy léteznek $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változók, amelyekre $\xi_1 = \sigma_1\eta_1 + m_1$ és $\xi_2 = \sigma_2\eta_2 + m_2$. A számolást két lépésben végezzük el.

  a. Először megmutatjuk, hogyha $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változók, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ úgy, hogy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, akkor $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Jelölje az $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2$ sűrűségfüggvényét f. Ekkor

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi\alpha\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-t)^2}{\alpha^2}+\frac{t^2}{\beta^2}\right)}dt.$$

  Végezzük el a teljes négyzetté alakítást a kitevőben:

  $$-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-t)^2}{\alpha^2}+\frac{t^2}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\left(\beta^2(x-t)^2+\alpha^2t^2\right) = -\frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\left(t^2 - 2t\beta^2x + \beta^2x^2\right) =$$
  $$= -\frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\left[(t-\beta^2x)^2 + \alpha^2\beta^2x^2\right] = -\frac{(t-\beta^2x)^2}{2\alpha^2\beta^2} - \frac{x^2}{2}.$$

  Így kapjuk, hogy

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi\alpha\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\beta^2x)^2}{2\alpha\beta}}dt}_{\sqrt{2\pi}\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

  b. Innen már könnyű látni az állítást, ugyanis ha $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, független valószínűségi változók, akkor léteznek $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változók úgy, hogy $\xi_1 = \sigma_1\eta_1 + m_1$, $\xi_2 = \sigma_2\eta_2 + m_2$.

  $$\xi_1 + \xi_2 = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\underbrace{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\eta_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\eta_2\right)}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} + (m_1+m_2) \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

- A második út a bizonyításhoz a karakterisztikus függvények alkalmazása. A fentiek alapján könnyen látható, hogyha $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ független valószínűségi változók, akkor $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$, ugyanis

  $$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \left(e^{itm_1 - \frac{\sigma_1^2t}{2}}\right)\left(e^{itm_2-\frac{\sigma_2^2t}{2}}\right) = e^{it(m_1+m_2)-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t}{2}},$$

  azaz valóban $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

⊠

6.3. Standard normális eloszlásból származó további eloszlások

6.3.1. Az n szabadságfokú χ^2 eloszlás

22. Definíció. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az*

$$\eta_n := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

*valószínűségi változót n-**szabadságfokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változó**nak nevezzük. Jele: $\eta_n \sim \chi_n^2$.*

23. Megjegyzés.

- *A χ^2 próba Karl Pearson (1857-1936) angol statisztikus nevéhez köthető. A χ^2 próba a χ_n^2 eloszláson alapul.*
- *A centrális határeloszlás tétel értelmében a $\eta_n \sim \chi_n^2$ eloszlás standardizáltjának eloszlásfüggvénye tart a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\eta_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

ahol $m = \mathbb{E}(\xi_1^2)$, $\sigma = \mathbb{D}(\xi_1^2)$.

Érdekességek *Ha $\eta_n \sim \chi_n^2$, akkor az η_n valószínűségi változó*

- ***sűrűségfüggvénye:***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & hax > 0 \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

(Ahol Γ a gamma függvény, lásd később.)

- ***k-adik momentuma:***

$$\mathbb{E}\left((\eta_n)^k\right) = 2^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

6.3.2. Az n szabadságfokú t eloszlás

24. Definíció. *Legyenek $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\eta_n \sim \chi^2_n$ eloszlású független valószínűségi változók. Ekkor*

$$\zeta_n := \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\eta_n}{n}}}$$

*valószínűségi változót n **szabadságfokú** t **(vagy student) eloszlás**nak nevezzük. Jele: $\zeta_n \sim t_n$.*

25. Megjegyzés.

- *A t_n eloszlás William Sealy Gosset (1976-1937) angol statisztikus nevéhez fűződik, aki a Guinnes sörfőzőben dolgozott és statisztikai cikkét "Student" álnéven publikálta.*
- *Eloszlásfüggvényének alakja a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez hasonlít.*

Érdekességek *Ha $\zeta_n \sim t_n$, akkor a ζ_n valószínűségi változó*

- *sűrűségfüggvénye:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  ahol B *a béta függvény (lásd később).*

- *Momentumai csak $n > 1$ esetén végesek, ugyanis $n = 1$ esetben t_1 standard Cauchy eloszlású, amelynek nem végesek a k-adik momentumai.*

6.3.3. Az F eloszlás

26. Definíció. *Legyenek $\xi_n \sim \chi_n$ és $\eta_m \sim \chi^2_m$ független eloszlások. Ekkor a*

$$\zeta_{n,m} = \frac{\frac{\xi_n}{n}}{\frac{\eta_m}{m}}$$

*eloszlást F **eloszlásnak (vagy Fisher-Snedecor eloszlás**nak) nevezzük n és m szabadságfokokkal. Jele: $\zeta_{n,m} \sim F(d_1, d_2)$ ($d_1 = n$, $d_2 = m$ jelöli a szabadságfokokat.)*

George Waddel Snedecor (1881-1974) amerikai matematikus és statisztikus és Ronald Fisher (1890-1962) angol statisztikus és biológus.

Érdekesség: *Ha $\eta \sim F(d_1, d_2)$, akkor az η sűrűségfüggvénye:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{d_2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \dfrac{d_1}{d_2} x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol B *a béta függvény (lásd később).*

6.3.4. A lognormális eloszlás

27. Definíció. *Egy ξ valószínűségi változót (m, σ^2) paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változónak nevezünk, ha $\log(\xi) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, azaz a logaritmusa normális eloszlású m, σ^2 paraméterekkel.*

28. Példa. *Határozza meg az η sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*
Megoldás:

- ***A sűrűségfüggvényt*** *a transzformációra vonatkozó képlet alapján tudjuk meghatározni, ugyanis mivel $\eta = e^{\xi}$, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, így a transzformációs képletben szereplő g függvény $g(x) = e^x$. Így*

$$g^{-1}(x) = \ln(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \qquad s \qquad \left(g^{-1}\right)' = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

amiből

$$f_\eta(x) = \begin{cases} |g^{-1}(x)| f_\xi(g^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha } x > 0. \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- *A* ***várható érték*** *kiszámolásához egy kicsit trükközni kell. Mivel $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, így $\xi \sim \sigma\eta + m$, ahol $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Mivel $\eta \sim e^{\xi}$, így $\eta \sim e^{\sigma\eta+m}$. Így a várható érték transzformációs formulájában szereplő g függvény $g(x) = e^{\sigma x+m}$, $(x \in \mathbb{R})$. Így kapjuk, hogy*

$$\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma x+m} e^{-\frac{x^2}{m}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\sigma x-2m)} dx.$$

Innen kezdve már a szokott módon járunk el: teljes négyzet alakra hozás a kitevőben, majd lineáris helyettesítés.

$$x^2 - 2\sigma x - 2m = (x-\sigma)^2 - \sigma^2 - 2m$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2} e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2} dx = e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{1} = e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

- *A **második momentum** könnyen visszavezethető a várható érték kiszámolására (csak más paraméterekkel). Mivel*

$$\zeta^2 = (e^{\sigma\eta+m)})^2 = e^{2\sigma\eta+2m},$$

így a várható értékre vonatkozó képlet alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = e^{2m+\frac{1}{2}(2\sigma^2)} = e^{2m+2\sigma^2}.$$

Így már könnyű kiszámolni a szórásnégyzetet, ugyanis

$$\mathbb{D}^2(\zeta) = \mathbb{E}(\zeta^2) - [\mathbb{E}(\zeta)]^2 = \underbrace{e^{2m+2\sigma^2}}_{e^{2m+\sigma^2}e^{\sigma^2}} - \underbrace{(e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2})^2}_{e^{2m+\sigma^2}} = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

A lognormális eloszlást porok, szemcsés anyagok esetén a szemcsék átmérőjének eloszlásának leírására használják.

29. Példa. *Cementpor szemcséinek a méreteit vizsgáljuk. Legyen ζ egy találomra kiválasztott szemcse átmérője. Tegyük fel, hogy ez lognormális eloszlású, azaz $\eta = e^{\xi}$, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a szemcse átmérője a és b közé esik, ahol $0 < a < b$.*
Megoldás: *Az* ln *függvény növekedése és a standardizálás alapján a keresett valószínűség könnyen kifejezhető a Φ függvény segítségével:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < \zeta < b) = \mathbb{P}(a < e^{\xi} < b) = \mathbb{P}(\ln(a) < \xi < \ln(b)) = \\ = \mathbb{P}\left(\frac{\ln(a)-m}{\sigma} < \underbrace{\frac{\xi-m}{\sigma}}_{:=\eta\sim\mathcal{N}(0,1)} < \frac{\ln(b)-m}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{\ln(b)-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(a)-m}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

30. Példa. *Igazolja, hogyha ξ lognormális eloszlású m és σ^2 paraméterekkel (azaz $\xi \sim e^{\sigma\eta+m}$, ahol $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ és $\zeta = a^{\xi^{\alpha}}$, ahol a és α rögzített pozitív számok, akkor ζ is lognormális eloszlású. Határozza meg a ζ paraméterét.*
Megoldás: *Egyszerűen kijön, ugyanis*

$$\zeta = a\xi^{\alpha} = e^{\ln(a)}(e^{\sigma\eta+m})^{\alpha} = e^{\alpha\sigma\eta+\alpha m+\ln(a)},$$

ami mutatja, hogy η is lognormális eloszlású ($\alpha m + \ln(a), \alpha\sigma$) paraméterekkel.

31. Példa. *Legyenek $\xi_1, \xi_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.*
Megoldás:

$$\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2<0)=0, \text{ így } f_{\xi_1+\xi_2}=0, \text{ ha } x<0.$$

Tegyük fel, hogy $x>0$.

$$\begin{aligned} f_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \int_{\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-t)f_{\xi_2}(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{\xi_1}(x-t)\lambda e^{-\lambda t}dt = \\ &= \int_0^x f_{\xi_1}(x-t)\lambda e^{-\lambda t}dt + \int_x^{+\infty} \underbrace{f_{\xi_1}(x-t)}_{=0}\lambda e^{-\lambda t}dt = \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-t)}\lambda e^{-\lambda t} = \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x 1dt = \lambda^2 x e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Így

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \text{ ha } x>0 \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$$

6.4. Kiegészítés

6.4.1. A Γ és a B függvények

32. Definíció. *A $\Gamma : D \to \mathbb{R}$*

$$\Gamma(a) := \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$$

*módon definiált függvényt Γ **függvény**nek (vagy másodfajú Euler integrálnak) nevezzük.*

- *Valós esetben $D := \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$, ekkor a Γ függvénynek a $0,-1,-2,\dots$ pontokban pólusa van.*
- *$D := \{a+bi | a>0\}$ komplex esetben.*

33. Megjegyzés. *A Γ függvény Daniel Bernoulli (1700-1782) svájci matematikustól, komplex esetben a Γ jelölés Adrian-Maria Legendre (1752-1833) francia matematikustól származik.*

34. Definíció. *A $\mathrm{B} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x>0\}$) függvényt*

$$\mathrm{B}(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \qquad (a>0, b>0).$$

*módon definiáljuk és B **függvény**nek, (vagy elsőfajú Euler integrálnak) nevezzük.*

- *A* B *függvény komplex kiterjesztése*

$$(a,b) \in \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 | \mathrm{Re}(z_1) > 0, \mathrm{Re}(z_2) > 0\right\}.$$

35. Megjegyzés. *A* B *függvényt Leonhard Euler (1707-1783) svájci és Adrien-Marie Legendre (1752-1833) francia matematikusok tanulmányozták, a jelölés Jacques Binet-től (1786-1856) származik.*

6.4.2. A Γ függvény tulajdonságai

36. Tétel. *A* Γ *függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, *ha* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$;
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$ *minden* $n \in \mathbb{Z}_+$ *esetén;*
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;
5. $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$;
6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) = \dfrac{\pi}{\cos(\pi a)}$;
7. $\Gamma(a)\Gamma(-a) = \dfrac{-\pi}{a\sin(\pi a)}$.

Bizonyítás.

1. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = 1;$$

2. Ekkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Gamma(a) &= \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt = \\ &\quad f(t) = t^{a-1} \qquad\qquad g'(t) = e^{-t} \\ &\quad f'(t) = (a-1)t^{a-2} \qquad g(t) = -e^{-t} \\ &= \underbrace{\left[t^{a-1}\left(-e^{-t}\right)\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + (a-1)\int_0^\infty t^{s-2}e^{-t}dt = (a-1)\Gamma(a-1).\end{aligned}$$

3. Az előző két pont alapján könnyen megkapható.

4. Helyettesítéses integrálást alkalmazunk.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt =$$
$$t = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad dt = udu$$

Új határok: $u : 0 \to \infty$

Mivel $\left(\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{u}$, így kapjuk, hogy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2}\sqrt{2\pi}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{=\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

5. Nem bizonyítjuk, mivel a bizonyítás hosszú, viszont megmutatjuk, hogy a 6. és 7. azonosságok visszavezethetőek az 5. azonosságra.

6. $\frac{1}{2} - a := y$ Ekkor $a = \frac{1}{2} - y$, így $\frac{1}{2} + a = 1 - y$. Így

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) = \Gamma(y)\Gamma(1-y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}\Big|_{y=\frac{1}{2}-a} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi a\right)} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)}.$$

7. A 2. pontban bemutatott összefüggés $a < 0$, $a \notin \mathbb{Z}$ esetén is érvényben marad így kapjuk, hogy
$$-a\Gamma(a)\Gamma(-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},$$
mindkét oldalt $(-a)$-val osztva kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

⊠

37. Tétel. *Összefüggés a* Γ *és a* B *függvények között:*

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (a>0, b>0).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)$.

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{a-1}t^{b-1}e^{-(s+t)} dtds$$

- **helyettesítés:** $(s,t) \Longrightarrow (uv, u(1-v))$
- **a Jacobi-determináns:**

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = (uv - u(1-v)) = -u$$

- **Új határok:** $(u,v) \in [0,\infty[\times[0,1]$,

Így kapjuk, hogy

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \left(\int_0^1 (uv)^{a-1} \left(u(1-v)\right)^{b-1} e^{-u} u dv \right) du =$$
$$= \underbrace{\left(\int_0^\infty u^{a+b-1} e^{-u} du \right)}_{\Gamma(a+b)} \underbrace{\left(\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1} dv \right)}_{\mathrm{B}(a,b)} = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b).$$

$\boxtimes$

6.4.3. A Γ eloszlás

38. Definíció. *Legyenek $\lambda > 0$ és $p > 0$. A ξ valószínűségi változót λ* ***paraméterű*** *p-**edrendű** Γ **eloszlás**nak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, & ha \quad x > 0 \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \Gamma(\lambda, p)$.

Tulajdonságai:

- *$p = 1$ esetén exponenciális eloszlású (λ paraméterrel);*
- *$p = n \in \mathbb{Z}_+$ esetén n darab λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó független összege;*
- *$\lambda = \frac{1}{2}$, $p = \frac{n}{2}$ esetén n szabadságfokú χ^2 eloszlás;*
- ***karakterisztikus függvénye** $\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-p}$;*

- ***Várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{p}{\lambda}; \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{p}{\lambda^2}.$$

39. Megjegyzés. *Könnyű látni, hogyha p pozitív egész, $\xi \sim \Gamma(\lambda, p)$, akkor $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_p$, ahol $\xi_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, így ebben az esetben az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ könnyen kijön a várható érték és a szórásnégyzet megfelelő tulajdonságaiból. Ha azonban $p \notin \mathbb{Z}_+$, akkor a sűrűségfüggvénnyel kell számolni és integrálni kell.*

6.4.4. A B eloszlás

40. Definíció. *A ξ valószínűségi változót $\alpha > 0$, $\beta > 0$ paraméterű béta eloszlásnak nevezünk, ha eloszlásfüggvénye:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \text{ha} \quad x \in (0,1) \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \mathrm{B}(\alpha, \beta)$.

Tulajdonságai

- *$\alpha = 1$, $\beta = 1$ esetén $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. (azaz ha $\xi \sim \mathrm{B}(1,1)$, akkor $\xi \sim \mathrm{U}(0,1)$)*
- ***Momentumai:***

$$\mathbb{E}(\xi^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+k)}.$$

- ***Várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}; \qquad \mathbb{D}^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

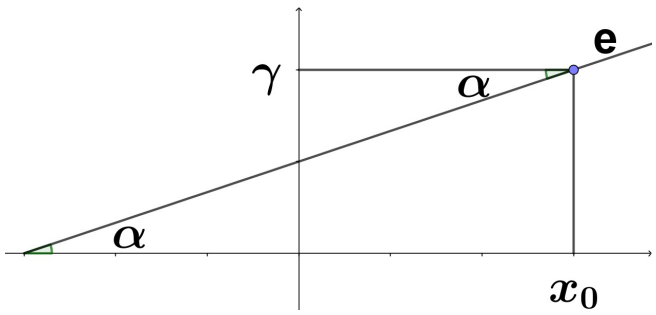
6.4.5. Cauchy eloszlás

41. Definíció. *Legyen (x_0, γ) az első síknegyed egy rögzített pontja. Tekintsünk egy olyan e egyenest, amely*

- *illeszkedik a (x_0, γ) pontra;*
- *az x tengellyel bezárt α szöge véletlenszerű és egyenletes eloszlású a $]0, 180^o[$ intervallumban.*

jelölje $P(\xi, 0)$ az e egyenes és az x tengely metszéspontját. Ekkor a ξ valószínűségi változót x_0, γ ***paraméterű Cauchy eloszlású valószínűségi változó****nak nevezzük. Az x_0 paramétert helyparaméternek, a γ paramétert skálaparaméternek nevezzük.*

Ha $x_0 = 0$, $\gamma = 1$, akkor a ξ valószínűségi változót ***standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó****nak nevezzük.*



Jele: $\xi \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$.

42. Megjegyzés. *A Cauchy eloszlást Augutstin Louis Cauchy (1789-1857) francia matematikus nevét viseli.*

A fizikusok a Cauchy eloszlást szokták meg Lorentz eloszlásnak, Cauchy-Lorentz eloszlásnak, vagy Reit-Wigner eloszlásnak is nevezni.

- *Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) holland fizikus;*
- *Gregorij Reit (1899-1981) orosz (ukrán) származású amerikai fizikus;*
- *Wigner Jenő Pál (angol nyelvterületen Eugene Paul Wigner) (1902-1995) magyar-amerikai fizikus.*

43. Tétel. *A Cauchy eloszlás eloszlás és sűrűségfüggvénye, karakterisztikus függvénye*

- ***A standard Cauchy eloszlás és sűrűségfüggvénye:***

$$\mathbb{F}(x) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}(x) + \frac{1}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}.$$

- ***A x_0, γ paraméterű Cauchy eloszlás és sűrűségfüggvénye:***

$$\mathbb{F}(x) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}$$

- ***A standard Cauchy és az (x_0, γ) paraméterű Cauchy karakterisztikus függvénye:***

$$\varphi(t) = e^{-|t|}, \qquad \varphi(t) = e^{ix_0t-\gamma|t|}.$$

Tulajdonságok

- *A standard Cauchy (és az (x_0, γ) paraméterű Cauchy) eloszlás legfontosabb tulajdonsága, hogy k-adik momentumai (így várható értéke és szórásnégyzete) $k \geqslant 1$ estén nem létezik.*

- *Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor*

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

szintén standard normális eloszlású valószínűségi változó.

- ***Általánosabban**, ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független Cauchy eloszlású valószínűségi változók $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyparaméterekkel és $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ skálapraméterekkel, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, akkor a*

$$Y := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

valószínűségi változó szintén Cauchy eloszlású $\sum_i a_i x_i$helyparaméterrel és $\sum_i |a_i| \gamma_i$ skálaparaméterrel.

- ***A centrális határeloszlás egy alternatívája.** A centrális határeloszlás tétel azt mondja ki, hogyha $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók véges szórásnégyzettel, akkor az*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

valószínűségi változó standardizáltjának eloszlásfüggvénye a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez konvergál.

Ezzel szemben, ha $X_1, X_2, \ldots$ olyan független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek f közös eloszlásfüggvényére

$$0 < \lim_{c \to \infty} \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} x^2 f(x) = \frac{2\gamma}{\pi} < \infty,$$

akkor az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ eloszlásfüggvénye a γ skálaparaméterű Cauchy eloszlás eloszlásfüggvényéhez konvergál.

6.5. Ellenőrző kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Adja meg egy a, b intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

2. *Adja meg egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

3. *Adja meg egy standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

4. *Hogyan származtatható egy (m, σ^2) paraméterű valószínűségi változó egy standard normális eloszlású valószínűségi változóból. Adja meg egy (m, σ^2) paraméterű valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

5. *Mit jelent egy (m, σ^2) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó standardizálása.*

Feladatok

1. *Egy ξ valószínűségi változót lognormálisnak nevezünk, ha logaritmusa normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel. Határozzuk megy egy ilyen valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

7. fejezet

Valószínűségi vektorváltozók (kétdimenziós eset)

7.1. Valószínűségi vektorváltozók

7.1.1. Valószínűségi vektorváltozók kétféle értelmezése

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

1. Ha $\xi_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók, akkor a $(\xi_1, \xi_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük.

2. A $(\xi_1, \xi_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
$$(\xi_1 < x, \xi_2 < y) := \{\omega \in \mathbb{R} : \xi_1(\omega) < x \text{ és } \xi_2(\omega) < y\} \in \mathcal{F}.$$

Könnyű látni, hogy kétféle értelmezés egyenértékű.
1. $\Longrightarrow$ 2.: Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Ekkor mivel ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók, így $(\xi_1 < x) \in \mathcal{F}$ és $(\xi_2 < y) \in \mathcal{F}$. Ekkor azonban

$$(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = (\xi_1 < x) \cap (\xi_2 < y) \in \mathcal{F}.$$

2. $\Longrightarrow$ 1. Tegyük fel, hogy a (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó. Megmutatjuk, hogy ekkor a ξ_1 (első komponens) egy valószínűségi változó. Mivel minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén $(\xi_1 < x, \xi_2 < n) \in \mathcal{F}$, így $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_1 < x, \xi_2 < n) \in \mathcal{F}$. Azonban

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_1 < x, \xi_2 < n) = (\xi_1 < x) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_2 < n) = \\ = (\xi_1 < x) \cap \Omega = (\xi_1 < x).$$

amiből kapjuk, hogy $(\xi_1 < x) \in \mathcal{F}$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ estén. Hasonló módon látható, hogy a ξ_2 (tehát a második komponens) szintén valószínűségi változó.

1. Tétel. *Ha (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, akkor a*

$$(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = \{\omega \in \Omega | \xi_1(\omega) = x \text{ és } \xi_2(\omega) = y\} \in \mathcal{F}.$$

Bizonyítás. Mivel ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók, így $(\xi_1 = x) \in \mathcal{F}$ és $(\xi_2 = y) \in \mathcal{F}$, de ekkor

$$(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = (\xi_1 = x) \cap (\xi_2 =) \in \mathcal{F}.$$

$\boxtimes$

7.1.2. Az együttes eloszlásfüggvény és tulajdonságai

2. Definíció. *Ha (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó, akkor az $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{F}(x, y) := \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt a (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó ***együttes eloszlásfüggvény****ének nevezzük.*

3. Tétel. *Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai: Legyen (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ együttes eloszlásfüggvénnyel. Ekkor $\mathbb{F}$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *Mindkét változójában növekvő és balról folytonos.*
2. *(a monoton növekvés helyett): Ha $a_1 < b_1$ és $a_2 < b_2$, akkor*

$$\mathbb{F}(b_1, b_2) - \mathbb{F}(a_1, b_2) - \mathbb{F}(b_1, a_2) + \mathbb{F}(a_1, a_2) \geqslant 0;$$

3. *Határértékek:*

$$\lim_{x_1 \to -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 0, \quad \lim_{x_2 \to -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 0, \quad \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 1.$$

Bizonyítás.
1. Először megmutatjuk, hogy az együttes eloszlásfüggvény mindkét változójában monoton növekvő. Ez könnyen kijön például a valószínűség monotonitása alapján. Ehhez legyenek $x_1 < x_2$ és $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $(\xi_1 < x_1, \xi_2 < y) \subseteq (\xi_1 < x_2, \xi_2 < y)$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x_1, y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < y) \leqslant \mathbb{P}(\xi_1 < x_2, \xi_2 < y) = \mathbb{F}(x_2, y).$$

Most megmutatjuk, hogy az együttes eloszlásfüggvény az első változójában balról folytonos, azaz $\mathbb{F}(x_0 - 0, y_0) = \mathbb{F}(x_0, y_0)$ minden x_0, y_0 valós szám esetén.

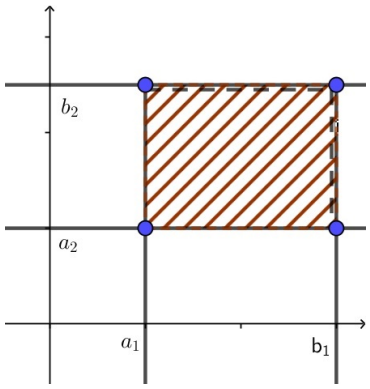
Mivel az együttes eloszlásfüggvény az első változójában monoton növekvő, ezért az első változójában léteznek mindkét oldali határértékei. A valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x_0 - 0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}\left(x_0 - \frac{1}{n}, y_0\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left(\xi_1 < x_0 - \frac{1}{n}\right) \cap (\xi_2 < y_0)\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\xi_1 < x_0 - \frac{1}{n}\right) \cap (\xi_2 < y_0)\right) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_0, \xi_2 < y_0) = \mathbb{F}(x_0, y_0).$$

2. Legyenek $a_1 < b_1$ és $a_2 < b_2$. ekkor

$$\mathbb{P}\left((\xi_1, \xi_2) \in [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\right) = \mathbb{F}(b_1, b_2) - \mathbb{F}(a_1, b_2) - \mathbb{F}(b_1, a_2) + \mathbb{F}(a_1, a_2)$$

amiből a valószínűség nemnegativitása alapján kapjuk az állítást.



3. A 2. pontbeli gondolatmenettel analóg módon kapjuk, hogy

$$\lim_{x_1\to-\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(\emptyset \cap (\xi_2 < x_2)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$
$$\lim_{x_2\to-\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}((\xi_2 < x_2) \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$
$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}((\xi_1 \in \mathbb{R}) \cap (\xi_2 \in \mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

⊠

7.1.3. Diszkrét és abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

A valószínűségi vektorváltozóknak csak két fajtáját vizsgáljuk, a diszkrétet és az abszolút folytonosat.

4. Definíció. *Egy* (ξ_1, ξ_2) ***valószínűségi vektorváltozót diszkrét****nek nevezünk, ha létezik* $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$ *sorozat úgy, hogy*

$$\mathbb{P}((\xi_1, \xi_2) \in \{(x_i, y_i) | i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}) = 1,$$

(azaz az értékkészlet megszámlálható).

- *Az* $((x_i, y_j))$ *sorozatot a* (ξ_1, ξ_2) ***diszkrét valószínűségi vektorváltozó értékkészletének,***
- *a* (p_{ij}) $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_j)$ *sorozatot* (ξ_1, ξ_2) ***diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlásá****nak nevezünk.*

5. Tétel (Diszkrét **valószínűségi vektorváltozó eloszlásának tulajdonságai**)**.** *Ha* (ξ_1, ξ_2) *egy valószínűségi vektorváltozó, akkor*

- $p_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$*;*
- $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Bizonyítás.

- A valószínűség nemnegativitása alapján nyilvánvaló.
- A valószínűség σ-additivitása (vagy véges additivitása) alapján kapjuk, hogy

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_i \sum_j \mathbb{P}\left(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_i \bigcup_j (\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

$\boxtimes$

6. Definíció. *Egy* (ξ_1, ξ_2) *valószínűségi vektorváltozót* ***abszolút folytonos****nak nevezünk, ha létezik* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény úgy, hogy*

$$\mathbb{F}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Az f *függvényt a* (ξ_1, ξ_2) *valószínűségi vektorváltozó* ***együttes sűrűségfüggvény****ének nevezzük.*

7. Megjegyzés. *Könnyű látni, hogy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó esetén az együttes sűrűségfüggvény az együttes eloszlásfüggvényből*

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbb{F}(x, y)$$

módon határozható meg, minden olyan (x, y) *pontban, amelyben létezik a differenciálhányadosa.*

8. Tétel (Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényének tulajdonságai). *Ha (ξ_1, ξ_2) egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó f sűrűségfüggvénnyel, akkor*

- *$f(x, y) \geqslant 0$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f negatív értéket az $\mathbb{R}^2$ legfeljebb Lebesque 0-mértékű halmazán vehet fel.);*
- *$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) = 1$.*

Bizonyítás. Az eloszlásfüggvény nemnegativitása inkább megállapodás kérdése.

A második állítás bizonyítása visszavezethető az együttes eloszlásfüggvény megfelelő tulajdonságára.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)dv \right) du = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dv \right) du = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \mathbb{F}(x, y) = 1.$$

⊠

7.1.4. Valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásai

9. Definíció. *Ha (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó, akkor a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változókat a (ξ_1, ξ_2) vektorváltozók **marginális eloszlásai**nak nevezzük.*

10. Tétel. *Legyen (ξ_1, ξ_2) egy valószínűségi vektorváltozó.*

1. *Jelölje $\mathbb{F}$ a (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor együttes eloszlásfüggvényét, $\mathbb{F}_1$ a ξ_1 és $\mathbb{F}_2$ a ξ_2 marginális eloszlások eloszlásfüggvényeit. Ekkor*

$$\mathbb{F}_1(x) = \lim_{x_2 \to +\infty} \mathbb{F}(x, x_2) \qquad \mathbb{F}_2(y) = \lim_{x_1 \to +\infty} \mathbb{F}(x_1, y)$$

2. *Ha (ξ_1, ξ_2) egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó, akkor (x_i, y_i) értékekkel és $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$ együttes eloszlással, akkor a ξ_1 diszkrét valószínűségi változó x_1, x_2, ... értékekkel és ξ_2 diszkrét valószínűségi változó y_1, y_2, ... értékekkel. A ξ_1 és ξ_2 eloszlása*

$$p_{i\cdot} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i) = \sum_j p_{ij}, \qquad p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_2 = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

   minden $(i = 1, 2, \dots)$ $(j = 1, 2, \dots)$ esetén;

3. *Ha (ξ_1, ξ_2) egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor ξ_1 és ξ_2 abszolút folytonos valószínűségi változók f_1, f_2 sűrűségfüggvényekkel és*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx,$$

   minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás.

1. Mivel $\mathbb{F}(\cdot,\cdot)$ mindkét változójában monoton növekvő, így a

$$\lim_{x_1\to+\infty}\mathbb{F}(x_1,y), \qquad \lim_{x_2\to+\infty}\mathbb{F}(x,x_2)$$

határértékek léteznek, és könnyen meghatározhatók. Ekkor a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{x_2\to+\infty}\mathbb{F}(x,x_2)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{F}(x,n)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\xi_1<x,\xi_2<n)=$$
$$=\mathbb{P}\left((\xi_1<x)\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi_2<n)\right)=\mathbb{P}((\xi_1<x)\cap\Omega)=\mathbb{P}(\xi_1<x)=\mathbb{F}_1(x).$$

A ξ_2-re vonatkozó összefüggés hasonló módon látható be.

2. A valószínűség σ-additivitása alapján kapjuk, hogy

$$p_{i\cdot}=\mathbb{P}(\xi_1=x_i)=\mathbb{P}\left((\xi_1=x_i)\cap\Omega\right)=\mathbb{P}\left((\xi_1=x_i)\cap\bigcup_j(\xi_2=y_j)\right)=$$
$$=\mathbb{P}\left(\bigcup_j((\xi_1=x_i)\cap(\xi_2=y_j))\right)=\sum_j\mathbb{P}\left(\xi_i=x_i,\xi_2=y_i\right)=\sum_j p_{ij.}$$

A ξ_2-re vonatkozó állítás analóg módon igazolható.

3. Könnyen kijön abból a korábbi tételünkből, amikor a marginális együttesfüggvényt határoztuk meg az együttes eloszlásfüggvényből határátmenet segítségével.

$$\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right)du=\lim_{y\to\infty}\mathbb{F}(x,y)=\mathbb{F}_1(x),$$

amiből kapjuk, hogy

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv.$$

Az f_2-re vonatkozó állítás hasonlóan látható.

⊠

7.2. A kovariancia fogalma és tulajdonságai

7.2.1. A kovariancia fogalma

Már találkoztunk a ξ_1 és a ξ_2 valószínűségi változók kovarianciájának a fogalmával, amit

- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) := \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))\,(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))\right)$ módon definiáltunk, és
- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)$ módon számolunk.

A fenti összefüggésben szereplő $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$ várható érték könnyen kiszámolható a valószínűségi vektorváltozókra vonatkozó transzformációs szabály alapján.

- diszkrét esetben $\mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$,
- abszolút folytonos esetben $\mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dydx$.

A kovariancia kiszámolására adott összefüggés kijön a várható érték additivitása és homogenitása (tehát linearitása) alapján:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) &= \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))\,(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\xi_1\xi_2 - \xi_1\mathbb{E}(\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\xi_2 + \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)\right) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - 2\mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) + \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) \\ &= \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2).\end{aligned}$$

7.2.2. A kovariancia tulajdonságai

11. Tétel (A kovariancia tulajdonságai)**.** *A kovariancia egy szimmetrikus bilineáris forma, amelyből származó kvadratikus forma pozitív szemidefinit. Egy kicsit jobban részletezve ez azt jelenti, hogy a kovariancia*

1. ***Szimmetrikus**, azaz* $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$.
2. ***Bilineáris**, azaz mindkét változójában homogén és additív, amihez a szimmetria miatt elegendő az első változóbeli homogenitást és additivitást igazolni.*
   - ***Homogenitás az első változóban:*** $\operatorname{cov}(\lambda\xi_1, \xi_2) = \lambda\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.
   - ***Additivitás az első változóban:*** $\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta)$;
3. ***Pozitív szemidefinit**: a belőle származó úgynevezett kvadratikus forma pozitív szemidefinit, azaz* $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}^2(\xi) \geqslant 0$.

4. ***Eltolásinvariáns**, azaz ha ξ_1, ξ_2 valószínűségi változók c_1, c_2 valós számok, akkor* $\operatorname{cov}(\xi_1 + c_1, \xi_2 + c_2) = \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

5. ***Cauchy-Bunyakovszkij-Shwarz egyenlőtlenség** ha ξ_1 és ξ_2 olyan valószínűségi változók, amelynek létezik szórásnégyzetük, akkor*

$$|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leqslant \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2);$$

Valamint $|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)$ *pontosan akkor teljesül, ha az alábbi három feltétel valamelyike teljesül.*

- $\mathbb{D}^2(\xi_1) = 0$, ξ_2 *tetszőleges;*
- ξ_1 *tetszőleges,* $\mathbb{D}^2(\xi_2) = 0$*;*
- *létezik* $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\mathbb{P}(\xi_2 = \lambda\xi_1 + c) = 1$.

Bizonyítás.

1. A cov szimmetrikus volta definíció alapján nyilvánvaló, ugyanis

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \mathbb{E}((\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1).$$

2. Megmutatjuk, hogy mindkét változójában additív és homogén.

   - Additív az első változójában, ugyanis a várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) &= \mathbb{E}\left((\xi_1 + \xi_2 - \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2))(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right) = \\ &= \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1)(\eta - \mathbb{E}(\eta)) + (\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right) = \\ &= \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right) + \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right) = \\ &= \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta).\end{aligned}$$

   - homogén az első változójában, ugyanis a várható érték homogenitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\lambda\xi_1, \xi_2) &= \mathbb{E}(\lambda\xi_1 - \mathbb{E}(\lambda\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\lambda(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1)))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2) = \\ &= \lambda\mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \lambda\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2).\end{aligned}$$

   - A második változóbeli additivitás és homogenitás a szimmetria révén visszavezethető az első változóbeli additivitásra és homogenitásra.

3. (Pozitív szemidefinit) Mivel a kovarianciából származó kvadratikus forma éppen a szórásnégyzet, ami pozitív szemidefinit, így ez az állítás nyilvánvaló.

4. A bizonyítás könnyen megkapható a várható érték eltolással kapcsolatos tulajdonságából:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1 + c_1, \xi_2 + c_2) &= \mathbb{E}\left((\xi_1 + c_1) - \mathbb{E}(\xi_1 + c_1)\right)\left((\xi_2 + c_2) - \mathbb{E}(\xi_2 + c_2)\right) = \\ &= \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))\right) = \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

5. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség. Ha $\mathbb{D}^2(\xi_1) = 0$ és ξ_2 tetszőleges, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(\xi_1 = c) = 1$. Így a kovariancia eltolásinvarianciája és első változóbeli additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(c, \xi_2) = \operatorname{cov}(0, \xi_2) = 0, \\ &\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2) = 0\mathbb{D}(\xi_2) = 0;\end{aligned}$$

   így a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség mindkét oldala 0, azaz egyenlőséggel teljesül.

   Ha ξ_1 tetszőleges, $\mathbb{D}^2(\xi_2) = 0$, akkor az előző lépéssel analóg módon kapjuk, hogy $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, $\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2) = 0$, tehát a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség megint csak egyenlőséggel teljesül.

   Most tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(\xi_1) \neq 0$ és $\mathbb{D}^2(\xi_2) \neq 0$. Definiáljuk a $g(\lambda)$ valós együtthatós másodfokú polinomot $g(\lambda) := \mathbb{D}^2(\lambda\xi_1 + \xi_2)$ módon. Ekkor a szórásnégyzet megfelelő tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$0 \leqslant g(\lambda) = \underbrace{\mathbb{D}^2(\xi_1)}_{a}\lambda^2 + \underbrace{2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}_{b}\lambda + \underbrace{\mathbb{D}^2(\xi_2)}_{c},$$

   ami mutatja, hogy a $g(\lambda)$ polinomnak egy darab kétszeres valós gyöke van, vagy nincs valós gyöke. Így a $g(\lambda)$ polinom D diszkriminánsa kisebb vagy egyenlő nullánál, azaz

$$D = b^2 - 2ac = (2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2))^2 - 4\mathbb{D}^2(\xi_1)\mathbb{D}^2(\xi_2) \leqslant 0,$$

   amiből rendezéssel kapjuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Mivel ha $\mathbb{D}^2(\xi_0) = 0$, vagy $\mathbb{D}^2(\xi_2) = 0$, akkor $|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)$, Így feltehetjük, hogy létezik $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(\xi_2 = \lambda\xi_1 + c) = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| = |\operatorname{cov}(\xi_1, \lambda\xi_1 + c)| = |\lambda|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = |\lambda|\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_1) = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\lambda\xi_1 + c) = \\ = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2),\end{aligned}$$

   azaz a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséggel teljesül

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Elegendő bebizonyítani, hogyha $\mathbb{D}^2(\xi_1) \neq 0$, $\mathbb{D}^2(\xi_2) \neq 0$, azonban $|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)$, akkor létezik $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(\xi_2 = \lambda\xi_1 + c) = 1$.

Tekintsük a $g(\lambda) := \mathbb{D}^2(\lambda\xi_1 + \xi_2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ valós együtthatós másodfokú polinomot. A $|\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)| = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)$ feltétel a fentiek miatt azzal ekvivalens, hogy ennek a polinomnak a D diszkriminánsa 0, azaz két egy darab kétszeres algebrai multiplicitású valós gyöke van.

Tudjuk, hogyha a $g(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ polinom olyan, hogy $D = b^2 - 4ac = 0$, akkor gyökei $\mu_{1,2} = \frac{-b}{2a}$. Mivel

$$g(\lambda) = \mathbb{D}^2(\xi_1)\lambda^2 + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)\lambda + \mathbb{D}^2(\xi_2),$$

így a kétszeres gyök

$$\mu_{1,2} = \frac{-\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}^2(\xi_1)},$$

ami nem 0, mivel $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$. Ezzel a μ értékkel $\mathbb{D}^2(\mu\xi_1 + \xi_2) = 0$, amiből kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\mu\xi_1 + \xi_2 = \mathbb{E}(\mu\xi_1 + \xi_2) = 1$, azaz $\mathbb{P}(\xi_2 = -\mu\xi_1 + \mathbb{E}(\mu\xi_1 + \xi_2))$, tehát

$$\lambda = -\mu = \frac{\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}^2(\xi_1)}, \qquad c = \mathbb{E}(-\lambda\xi_1 + \xi_2).$$

konstansokkal kapjuk az állítást.

⊠

12. Megjegyzés. *A kovariancia mindkét változóbeli homogenitása és eltolásinvarianciája egyetlen képletben is megfogalmazható:*

$$\mathrm{cov}(\lambda_1\xi_1 + c_1, \lambda_2\xi_2 + c_2) = \lambda_1\lambda_2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$$

13. Megjegyzés. *A fenti tétel második állítása könnyebben megjegyezhető az alábbi alakban: az alábbi állítások ekvivalensek:*

- $|\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)| = \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)$*;*
- *léteznek* λ*,* μ *valós számok úgy, hogy* $\mathbb{P}(\xi_1 = \lambda\xi_2 + c) = 1$*, vagy* $\mathbb{P}(\xi_2 = \lambda\xi_1 + c) = 1$

7.3. A korrelálatlanság és a függetlenség kapcsolata

7.3.1. Valószínűségi változók függetlensége

14. Definíció. *A* ξ_1 *és* ξ_2 *valószínűségi változókat* ***függetleneknek*** *nevezzük, ha minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y).$$

7.3.2. Valószínűségi változók függetlenségének ekvivalens megfogalmazásai, illetve egy következménye

15. Tétel. *A ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha*

1. ***Eloszlásfüggvény segítségével*** *minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, azaz az együttes eloszlásfüggvényük egyenlő a marginális eloszlásfüggvények szorzatával,*

2. ***Diszkrét esetben*** *$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ minden $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ esetén, azaz az együttes eloszlásuk egyenlő a marginálisok szorzatával,*

3. ***Abszolút folytonos esetben*** *$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, azaz az együttes eloszlásfüggvény egyenlő a marginális eloszlásfüggvények szorzatával.*

Bizonyítás.
1. Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.

$$\mathbb{F}(x, y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(y).$$

2. Megmutatjuk, hogyha ξ_1 és ξ_2 független diszkrét valószínűségi változók, akkor $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{j\cdot}$.

$$\begin{aligned} p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 \in \left]x_i - \frac{1}{n}, x_i\right], \xi_2 \in \left]y_j - \frac{1}{m}, y_j\right]\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 \in \left]x_i - \frac{1}{n}, x_i\right]\right) \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_2 \in \left]y_j - \frac{1}{m}, y_j\right]\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\xi_1 = x_i\right)\mathbb{P}\left(\xi_2 = y_j\right) = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogyha $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, akkor ξ_1 és ξ_2 függetlenek.

$$\mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y_j) = \sum_{x_i<x,\ y_j<y} p_{ij} = \sum_{x_i<x} p_{i\cdot} \sum_{y_j<y} p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y_j).$$

3. Megmutatjuk, hogyha ξ_1, ξ_2 független abszolút folytonos valószínűségi változók, akkor $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

Legyenek $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x_0, y_0) = \mathbb{F}_1(x_0)\mathbb{F}_2(y_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y_0} f_2(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{x_0}\int_{-\infty}^{y_0} f_1(x)f_2(y)dydy, \end{aligned}$$

másrészt

$$\mathbb{F}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y) dx dy,$$

ami (mértékelméleti meggondolások alapján) csak úgy lehet, ha $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

Megmutatjuk, hogyha ξ_1, ξ_2 olyan abszolút folytonos valószínűségi változók, hogy $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, akkor ξ_1 és ξ_2 függetlenek.

Legyenek $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathbb{F}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y) dy dy = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f_1(x) f_2(y) dy dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{y_0} f_2(y) dy = \mathbb{F}_1(x_0) \mathbb{F}_2(y_0).$$

⊠

16. Tétel. *Ha ξ_1 és ξ_2 olyan független valószínűségi változók, hogy léteznek az $\mathbb{E}(\xi_1)$, $\mathbb{E}(\xi_2)$ és az $\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2)$ várható értékek, akkor*

$$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\xi_2).$$

A megfordítás sajnos nem igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás a valószínűségi változókra vonatkozó transzformációs szabályán alapul. Az $\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2)$ kiszámításához a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := xy$ függvényt használjuk.

- Diszkrét esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} = \sum_{ij} x_i y_j p_{i\cdot} p_{\cdot j} = \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\xi_2).$$

- Abszolút folytonos esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_1(x) f_2(y) dx dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \mathbb{E}(\xi_1) \mathbb{E}(\xi_2).$$

⊠

7.3.3. A függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata

A fentiek alapján a függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata nyilvánvaló. Valószínűségi változók függetlensége maga után vonja a korrelálatlanságukat. Ez könnyen kijön a kovariancia kiszámítási szabályából és abból, hogy független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő a várható értékeik szorzatával, azaz ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_1) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = 0.$$

A megfordítás azonban nem igaz, két valószínűségi változó tud úgy korrelálatlan lenni, hogy nem függetlenek, mint ahogy ezt a következő példa is mutatja.

17. Példa. *Megadunk két valószínűségi változót, amelyek korrelálatlanok, de nem függetlenek.*

- *Diszkrét eset: Legyen (ξ_1, ξ_2) egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó melyek együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:*

$\xi_1 \backslash \xi_2$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
$x_1 = 4$	*0.1*	*0.2*	*0.1*
$x_2 = 6$	*0.1*	*0.4*	*0.1*

  Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = 0$, amiből kapjuk, hogy ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok, azonban nem függetlenek, mivel a marginális eloszlások szorzata nem adja vissza az együttes eloszlást.

- *Abszolút folytonos eset: Legyen (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(1 + x^3y - xy^3), & \text{ha } -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

  Ekkor megint csak egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = 0$, amiből egyből kapjuk, ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok. Azonban $\xi_1 \sim U(-1,1)$, $\xi_2 \sim U(-1,1)$, tehát nem függetlenek, ugyanis a marginális sűrűségfüggvények szorzata nem adja vissza az együttes eloszlásfüggvényt.

  Ez a példa Denkinger Géza példatárában található.

18. Példa. *Két pörgettyűvel pörgetünk, egy pirossal és egy kékkel. Mindkét pörgettyűn az 1, 2, 3 számokat lehet kipörgetni azonos valószínűséggel. Jelölje ξ a kipörgetett két szám összegét, η a kék pörgettyűvel kipörgetett számot. Határozzuk meg a $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ érték.*

Megoldás: *Felhasználjuk a kovariancia első változóbeli additivitását, valamint azt a tényt, hogy a ξ_1 és a ξ_2 függetlenek, így korrelálatlanok.*

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2,\xi_2)=\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)+\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_2)=0+\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_2)=\mathbb{D}^2(\xi_2).$$

Így elegendő kiszámolnunk a ξ_2 valószínűségi változó szórásnégyzetét, ami egyszerű feladat:

A ξ_2 valószínűségi változó eloszlása:

x_i	*1*	*2*	*3*
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_2)&=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1+2+3}{3}=2,\\ \mathbb{E}(\xi_2^2)&=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1+4+9}{3}=\frac{14}{3},\\ \mathbb{D}^2(\xi_2)&=\mathbb{E}(\xi_2^2)-\big(\mathbb{E}(\xi^2)\big)^2=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3},\end{aligned}$$

Így $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\dfrac{2}{3}$.

7.4. A korrelációs együttható

19. Definíció. *Ha ξ_1, ξ_2 olyan valószínűségi változók, amelyeknek pozitív a szórásuk, akkor az*

$$\mathrm{r}(\xi_1,\xi_2):=\frac{\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)}{\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)}$$

*valós számot a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók **korrelációs együttható**jának nevezzük.*

20. Tétel. *A korrelációs állandó rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $|\mathrm{r}(\xi_1,\xi_2|\leqslant 1$,
2. *Ha λ_1, λ_2 zérustól különböző valós számok, c_1, c_2 tetszőleges valós számok, akkor*

$$\mathrm{r}(\lambda_1\xi_1+c_1,\lambda_2\xi_2+c_2)=\operatorname{sgn}(\lambda_1\lambda_2)r(\xi_1,\xi_2),$$

ahol sgn *a szignumfüggvény, amit*

$$\operatorname{sign}(x):=\begin{cases}-1,\ ha\ x<0\\ 0,\ ha\ x=0\\ 1,\ ha\ x>0\end{cases}$$

módon definiálunk tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás.

1. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schvarcz egyenlőtlenség közvetlen következménye. Egyébként rendkívül hasznos, mert ha kijönne az, hogy $r(\xi_1, \xi_2) = 5$, akkor 1 valószínűséggel mindent újra kell számolnunk.

2. Könnyen kijön a kovariancia és a szórás megfelelő tulajdonságai alapján:

$$\mathrm{r}(\lambda_1\xi_1 + c_1, \lambda_2\xi_2 + c_2) = \frac{\mathrm{cov}(\lambda_1\xi_1 + c_1, \lambda_2\xi_2 + c_2)}{\mathbb{D}(\lambda_1\xi_1 + c_1)\mathbb{D}(\lambda_2\xi_2 + c_2)} = \\ = \frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1\lambda_2|}\frac{\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)} = \mathrm{sgn}(\lambda_1\lambda_2)\mathrm{r}(\xi_1, \xi_2).$$

⊠

7.5. Ellenőrző kérdések és feladatok

Ellenőrző kérdések

1. *Mit jelent az, hogy egy $(\xi_1, \xi_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvény valószínűségi vektorváltozó?*

2. *Hogyan definiáljuk egy (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvényét?*

3. *Melyek egy (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvényének négy legfontosabb tulajdonsága?*

4. *Mikor mondjunk, hogy egy (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó diszkrét illetve abszolút folytonos?*

5. *Melyek egy (ξ_1, ξ_2) diszkrét valószínűségi változó együttes eloszlásának legfontosabb tulajdonságai?*

6. *Definiálja egy (ξ_1, ξ_2) abszolút folytonos valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét és fogalmazza meg két legfontosabb tulajdonságát.*

7. *Hogyan határozható meg egy (ξ_1, ξ_2) diszkrét valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásai az együttes eloszlásból? (Szummázással, de konkrétan hogyan?)*

8. *Hogyan határozható meg egy (ξ_1, ξ_2) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásainak sűrűségfüggvényei az együttes sűrűségfüggvényből? (Integrálással, de konkrétan hogyan?)*

9. *Adja meg a valószínűségi vektorváltozókra vonatkozó transzformálási szabályt diszkrét és abszolút folytonos esetben egyaránt.*

10. *Hogyan definiálja két valószínűségi változó függetlenségét?*

11. *Mikor mondjuk, hogy a (ξ_n) valószínűségi változók teljesen független sorozata?*

12. *Hogyan definiáljuk és hogyan számoljuk ki két valószínűségi változó kovarianciáját?*

13. *Sorolja fel a kovariancia legfontosabb tulajdonságait.*

14. *Ismertesse a valószínűségi változókra vonatkozó Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget és bizonyítsa be $\mathbb{D}^2(\xi_1) \neq 0$, $\mathbb{D}^2(\xi_2) \neq 0$ esetben.*

15. *Mi az összefüggés a valószínűségi változók függetlensége és a korrelálatlansága között?*

16. *Definiálja a valószínűségi változók korrelációs együtthatójának a fogalmát és sorolja fel a tulajdonságait (legalább egyet).*

Feladatok

1. *Bizonyítsa be, hogyha ξ_1 és ξ_2 független valószínűségi változók, $a_1 < b_1$, $a_2 < v_2$, akkor $\mathbb{P}(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1, a_2 \leqslant \xi_2 < b_2) = \mathbb{P}(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1)\mathbb{P}(a_2 \leqslant \xi_2 < b_2)$.*

8. fejezet

Valószínűségi vektorváltozók II., nevezetes valószínűségi vektorváltozók

8.1. Matematikai alapok

Ez a fejezet igényel egy kis lineáris algebrai ismétlést.

8.1.1. Vektorok és mátrixok transzponáltjai

1. Definíció. ***Vektor transzponáltja*** *Ha* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*, akkor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ahol az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *-et az* $\boldsymbol{x}$ *vektor komponenseinek nevezzük.*

A felírásból látható, hogy egy ($\mathbb{R}^n$*-beli) vektor mindig* ***oszlopvektor****.*

Ha ***sorvektor****ra van szükségünk, akkor a vektort transzponálnunk kell.*

$$\boldsymbol{x}^T := [x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

2. Definíció. ***Mátrix fogalma:*** *Azt mondjuk, hogy* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$*, ha*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

*Az a_{ij} elemeket az A mátrix **komponenseinek** nevezzük. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ n sora és m oszlopa van. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, akkor azt mondjuk, hogy az A mátrix egy $n \times m$ típusú mátrix.*

3. Definíció. *Az $n \times n$ típusú mátrixot **négyzetes**, vagy **kvadratikus** mátrixnak nevezzük.*

4. Definíció. ***Mátrix transzponáltja*** *Hasonlóképpen a vektorok transzponáltjához, mátrixok körében is értelmezhetjük a transzponálást. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, akkor $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A transzponálás a sor és oszlopindexeket megcseréli.*

Példa

$$A := \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} \qquad \Longrightarrow \qquad A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 2}}$$

5. Megjegyzés. *A sor és oszlopvektorokat is tekinthetjük mátrixoknak.*

- *Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor x tekinthető egy $n \times 1$ típusú mátrixnak.*
- *Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $y = x^T$, akkor y egy $1 \times n$ típusú mátrix.*

8.1.2. Mátrixok szorzata

6. Definíció. *Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, akkor az A és B mátrixok összeszorozhatóak és $C := AB \in \mathrm{R}^{m\times l}$.*

Azaz az A és B mátrixok pontosan akkor szorozhatók össze, ha az A mátrixnak annyi oszlopa van, ahány sora a B mátrixnak. Ekkor a $C = AB$ mátrixnak annyi sora van, amennyi az A mátrixnak és a C mátrixnak annyi oszlopa van, amennyi a B mátrixnak.

A C mátrix c_{ij} komponense

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Arra kell gondolni, hogy a B mátrix j-edik oszlopát gondolatban ráfektetem az A mátrix i-edik sorára, az egymást átfedő elemeket szorzom, a kapott szorzatokat összeadom. Így kapom a $C = AB$ mátrix c_{ij} komponensét.

7. Megjegyzés. *Érdemes észrevenni, hogyha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor mást jelent az $x^T y$ és mást az xy^T. Legyenek mondjuk*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- *Az $x^T y$ mindig számot (azaz 1×1 típusú mátrixot) eredményez, ugyanis, ha $x, y \in \mathbb{R}^3$, akkor $x^T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, így $x^T y \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$.*

  A fenti példa esetén:

$$x^T y = [1\ 3\ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -4.$$

- *Az xy^T mindig számot (azaz $n \times n$ típusú mátrixot) eredményez, ugyanis, ha $x, y \in \mathbb{R}^3$, akkor $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $y^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, így $xy^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.*

  A fenti példa esetén:

$$xy^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [2\ 0\ -3] = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

8. Megjegyzés.

- *A mátrixok szorzása asszociatív, azaz $A(BC) = (AB)C$, ami úgy értendő, hogyha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és a két oldal egyenlő.*

- *Ha az A és B mátrixok összeszorozhatók, akkor a B^T és A^T mátrixok is összeszorozhatók és*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

8.1.3. Mátrix determinánsa

9. Definíció. *A determináns egy olyan függvény, amely minden négyzetes mátrixhoz (adott módon) egy valós számot rendel. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor az A mátrix determinánsát $|A|$ vagy $\det(A)$ módon jelöljük.*

A hozzárendelés megadásának többféle módja van, mi most csak az i-edik sor szerinti kifejtést ismertetjük.

- ***Az i-edik sor szerinti kifejtés*** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij},$$

ahol A_{ij} az A mátrix (ij)-edik aldeterminánsát jelöli, amit úgy kapunk az A mátrixból, hogy annak elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a visszamaradó $(n-1) \times (n-1)$ típusú mátrixnak vesszük a determinánsát.

A fenti képletben szereplő D_{ij} számot az A mátrix (i,j)-edik ***adjungált aldeterminánsá****nak nevezzük.*

Fontos még, hogyha $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, azaz $A=[a]$, akkor $\det(A)=a$.

10. Megjegyzés. *Sok érdekes tulajdonsága van a determinánsnak, ezek közül párat kiemelünk:*

1. *A fenti definíció úgy korrekt, ha megjegyezzük, hogy a determináns értéke független az i megválasztásától. (Ezt az állítást most nem bizonyítjuk.)*

2. *Az i-edik sor szerinti kifejtés rekurzív definíciót ad a determináns meghatározására.*

   Érdemes külön megjegyezni, hogy

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad-bc.$$

3. *A determináns néhány tulajdonsága:*

   - $\det(A)=\det(A^T)$, *ami lehetőséget teremt a sorokra vonatkozó tulajdonságok oszlopokra történő tulajdonságokra történő átvitelére, így például beszélhetünk* ***j-edik oszlop szerinti kifejtés****ről.*

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}D_{ij}.$$

   - ***Szorzástétel***

$$\det(AB)=\det(A)\det(B),$$

     ahol $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ valamilyen $n\geqslant 1$ esetén.

Példa *Legyen*

$$A:=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

egy invertálható mátrix, azaz $\det(A)=ad-bc\neq 0$. *Ekkor*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A kapott eredmény könnyen ellenőrizhető mátrix szorzással (a Falk-séma alkalmazásával):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & & d & -b \\ & & -c & a \\ \hline a & b & ad\text{-}bc & 0 \\ c & d & 0 & ad\text{-}bc \end{array}\right]$$

Példa *Számoljuk ki a*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát az első, illetve a második sor szerinti kifejtéssel, illetve a máasodik oszlopa szerinti kifejtéssel. (A rövidség kedvéért a $\det(A)$ *helyett* $|A|$*-t írunk.)*

- ***első sor szerinti kifejtés***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 1\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{-3} - 0\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{4} = 5;$$

- ***második sor szerinti kifejtés***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -2\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{-6} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-2} - 1\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{3} = 5;$$

- ***második oszlop szerinti kifejtés***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -0\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-2} - 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{-3} = 5;$$

Példa *Számoljuk ki az*

$$A := \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 3}}, \qquad \text{és} \qquad B := \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 2}}$$

mátrixok szorzatát. Az AB *szorzatmátrix* 3×2 *típusú lesz. A szorzást a jobb átláthatóság kedvéért Falk séma segítségével végezzük el.*

8.1.4. Négyzetes mátrix inverze

11. Definíció. ***Egységmátrix*** *egy $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot ($n\times n$ típusú) egységmátrixnak nevezzük, ha*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

azaz az I mátrix főátlójában 1-esek találhatóak, mindenhol máshol 0, ami talán úgy is megfogalmazható, hogy $I_{ij} = \delta_{ij}$, ahol δ_{ij} a Kronecker-delta, ami

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 1, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

módon van definiálva. (Leopold Kronecker (1823-1891) német matematikus.)

12. Tétel. *Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, I az $n \times n$ típusú egységmátrix, akkor*

$$A \cdot I = I \cdot A = A,$$

azaz I az $n \times n$ típusú mátrixok (multiplikatív) félcsoportjának egységeleme. (A félcsoportban az egységelem egyértelműen létezik.)

Egy egységelemes félcsoportot monoidnak nevezünk. Így elmondható, hogy az $\mathbb{R}^{n\times m}$ halmaz a szorzásra (mint műveletre nézve) monoidot alkot.

13. Megjegyzés. *Mivel az $n \times n$ típusú mátrixok halmazán a szorzás nem kommutatív, így egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén szükségesnek tűnik bevezetni a balinverz és jobbinverz fogalmát. A B mátrix az A mátrix balinverze, ha $B \cdot A = I$; a C mátrix az A mátrix jobbinverze, ha $A \cdot C = I$. Azonban a szorzás asszociativitása miatt az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik balinverze, ha létezik jobbinverze.*

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak létezik jobbinverze, akkor az egyértelműen létezik és A^{-1} módon jelöljük.

14. Definíció. *Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor ha létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, amelyre $A \cdot B = I$, akkor az A mátrix* ***invertálható*** *vagy* ***nemszinguláris mátrix****nak nevezzük. A B mátrixot (létezése esetén) az A mátrix inverzének nevezzük és A^{-1} módon jelöljük.*

15. Tétel. *Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha* $\det(A) \neq 0$.

Bizonyítás. Egyszerű, de nem részletezzük. ⊠

16. Megjegyzés. *A fentiek alapján látható, hogy $n \geqslant 2$ esetén az*

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \det(A) \neq 0\right\}$$

halmaz ellátva a mátrixszorzással egy nemkommutatív csoport.

17. Tétel. *Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy invertálható mátrix, akkor*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

ahol

- *a mátrix skalárszorosát komponensenként értelmezzük, azaz a mátrix minden komponensét kell szorozni az adott skalárral.*
- *D_{ij} az A mátrix (i,j)-edik adjungált aldeterminánsának nevezzük, azaz*

  $$D_{ij} = (-1)^{i\neq j}\det(A_{ij})$$

  ahol $A_{ij}\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ és a A_{ij} mátrixot úgy kapjuk az A mátrixból, hogy annak az i -edik sorát és j-edik oszlopát elhagyjuk.
- *A $[D_{ij}]^T$ képletben a T betű a transzponáltat jelenti.*

Bizonyítás. A bizonyítás a kifejtési tételből és a ferde kifejtési tételből könnyen kijön. (A ferde kifejtési tételt nem ismételtük át.) ⊠

8.2. Valószínűségi vektorváltozók és együttes eloszlásfüggvényük

8.2.1. A valószínűségi vektorváltozók (n-dimenziós eset)

18. Definíció. *A **valószínűségi vektorváltozó** fogalmát kétféle módon tudjuk értelmezni:*

- *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, ekkor a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ véletlen vektort valószínűségi vektorváltozónak nevezzük.*
- *Ha $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, úgy hogy*

  $$(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) := \{\omega \in \Omega | \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F}.$$

  *minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén, akkor a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ függvényt **valószínűségi vektorváltozó**nak nevezzük.*

Könnyű látni, hogy a kétféle értelmezése egyenértékű.

8.2.2. Valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlásfüggvénye

19. Definíció. *Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ egy valószínűségi vektorváltozó, akkor az $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) \qquad ((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

módon definiált függvényt a ξ ***valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvényé****nek nevezzük.*

8.2.3. Valószínűségi vektorváltozó téglába esésének valószínűsége

Tégla fogalma

- Az $\mathbb{R}$ halmaz egy $[a, b[$ részhalmazát téglának nevezzük. (Ha az eloszlásfüggvényt $\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x)$ módon definiáljuk, akkor az $]a, b]$ intervallumokkal kellene dolgoznunk.)
- Az $\mathbb{R}^n$ egy $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ részhalmazát n-dimenziós téglának nevezzük. Tehát egy n-dimenziós tégla egy dimenziós téglák Descartes-sorozata.

Téglába esés valószínűsége

• **Egy dimenzióban:** Ha ξ egy valószínűségi változó, $a < b$, $T := [a, b[$, akkor $\mathbb{P}(\xi \in T) = \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a)$, mint ahogy ezt már láttuk.

• **Két dimenzióban:** Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ egy kétdimenziós valószínűségi változó, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $T := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[$. A $\mathbb{P}(\xi \in T)$ valószínűséget szeretnénk eloszlásfüggvénnyel kifejezni. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A_{00} &:= \{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < b_2\}, \\ \boxed{A_{01}} &:= \{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < a_2\}, \\ \boxed{A_{10}} &:= \{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < b_2\}, \\ A_{11} &:= \{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < a_2\}. \end{aligned}$$

Ekkor a két halmazra vonatkozó szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \in T) &= \mathbb{P}(A_{00} \setminus (A_{01} \cup A_{10})) = \mathbb{P}(A_{00}) - (\mathbb{P}(A_{01} \cup A_{10})) = \\ &= \mathbb{P}(A_{00}) - (\mathbb{P}(A_{01}) + \mathbb{P}(A_{10}) - \mathbb{P}(\underbrace{A_{01} \cap A_{10}}_{(A_{11})})) = \\ &= \mathbb{P}(A_{00}) - \mathbb{P}(A_{01}) - \mathbb{P}(A_{10}) + \mathbb{P}(A_{11}) = \\ &= \mathbb{F}(b_1, b_2) - \mathbb{F}(b_1, a_2) - \mathbb{F}(a_1, b_2) + \mathbb{F}(a_1, a_2). \end{aligned}$$

A kapott eredmény felírható bizonyos speciális lineáris kombinációk segítségével.

$$\mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2)b_2\right) = \begin{cases} = \mathbb{F}(b_1, b_2), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0 \\ = \mathbb{F}(b_1, a_2), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1 \\ = \mathbb{F}(a_1, b_2), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0 \\ = \mathbb{F}(a_1, a_2), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1. \end{cases}$$

A bevezetett formalizmussal a téglába esés valószínűsége két dimenzióban az alábbi módon írható le:

$$\mathbb{P}\left(\xi \in T\right) = \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{0,1\}^2} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2)b_2\right).$$

• **Három dimenzióban:** Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ egy háromdimenziós valószínűségi változó, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$, $T := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times[a_3, b_3[$. A $\mathbb{P}\left(\xi \in T\right)$ valószínűséget szeretnénk eloszlásfüggvénnyel kifejezni. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A_{000} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < b_2, \xi_3 < b_3\right\}, \\ \boxed{A_{001}} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < b_2, \xi_3 < a_3\right\}, \\ \boxed{A_{010}} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < a_2, \xi_3 < b_3\right\}, \\ \boxed{A_{100}} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < b_2, \xi_3 < b_3\right\}, \\ A_{011} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < b_1, \xi_2 < a_2, \xi_3 < a_3\right\}, \\ A_{101} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < b_2, \xi_3 < a_3\right\}, \\ A_{110} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < a_2, \xi_3 < b_3\right\}, \\ A_{111} &:= \left\{\omega \in \Omega | \xi_1 < a_1, \xi_2 < a_2, \xi_3 < a_3\right\}. \end{aligned}$$

Könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi \in T\right) = \mathbb{P}\left(A_{000} \setminus (A_{001} \cup A_{010} \cup A_{100})\right).$$

A három halmazra vonatkozó szita formula alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{001} \cup A_{010} \cup A_{100}) = \\ = \mathbb{P}(A_{001}) + \mathbb{P}(A_{010}) + \mathbb{P}(A_{100}) - \\ - \mathbb{P}(\underbrace{A_{001} \cap A_{010}}_{A_{011}}) - \mathbb{P}(\underbrace{A_{001} \cap A_{100}}_{A_{101}}) - \mathbb{P}(\underbrace{A_{010} \cap A_{100}}_{A_{110}}) + \\ + \mathbb{P}(\underbrace{A_{010} \cap A_{010} \cap A_{100}}_{A_{111}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\xi \in T\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(A_{000}\right) - \mathbb{P}\left(A_{001} \cup A_{010} \cup A_{100}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(A_{000}\right) - \left(\mathbb{P}\left(A_{001}\right) + \mathbb{P}\left(A_{010}\right) + \mathbb{P}\left(A_{100}\right) - \mathbb{P}\left(A_{011}\right) - \mathbb{P}\left(A_{101}\right) - \mathbb{P}\left(A_{110}\right) + \mathbb{P}\left(A_{111}\right)\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(A_{000}\right) - \mathbb{P}\left(A_{001}\right) - \mathbb{P}\left(A_{010}\right) - \mathbb{P}\left(A_{100}\right) + \mathbb{P}\left(A_{011}\right) + \mathbb{P}\left(A_{101}\right) + \mathbb{P}\left(A_{110}\right) - \mathbb{P}\left(A_{111}\right).
\end{aligned}$$

Így a kapott eredmény felírható bizonyos speciális lineáris kombinációk segítségével.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 \ + (1-\varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2)b_2, \varepsilon_3 a_3 + (1-\varepsilon_3)b_3\right) = \\
&= \begin{cases}
= \mathbb{F}(b_1, b_2, b_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon = 0 \\
= \mathbb{F}(b_1, b_2, a_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon = 1 \\
= \mathbb{F}(b_1, a_2, b_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon = 0 \\
= \mathbb{F}(a_1, b_2, b_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon = 0 \\
= \mathbb{F}(b_1, a_2, a_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon = 1 \\
= \mathbb{F}(a_1, b_2, a_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon = 1 \\
= \mathbb{F}(a_1, a_2, b_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon = 0 \\
= \mathbb{F}(a_1, a_2, a_3), & \text{ha } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon = 1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi \in T) = \\
&= \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{0,1\}^3} (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2)b_2, \varepsilon_3 a_3 + (1-\varepsilon_3)b_3\right).
\end{aligned}$$

• n-dimenzióban: Legyen $T := [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \cdots \times [a_n, b_n[$, $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Ekkor az n halmazra vonatkozó szita-formula (Poincare-formula) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi \in T) = \\
&= \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n} \mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \ldots, \varepsilon_n a_n + (1-\varepsilon_n)b_n\right).
\end{aligned}$$

8.2.4. Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai

20. Tétel. *Ha $\mathbb{F}$ a $(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye, akkor*

1. *$\mathbb{F}$ minden változójában balról folytonos (a többi változó tetszőleges rögzítése esetén);*
2. *(A monoton növekedés helyett) Ha $a_1 < b_1$, …, $a_n < b_n$, akkor*

$$\sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n} \mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \ldots, \varepsilon_n a_n + (1-\varepsilon_n)b_n\right) \geqslant 0;$$

3. Határértékek:

- $\lim_{x_i \to -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2 \dots, x_n) = 0$, *azaz valamelyik változóval tartunk a 0-hoz, akkor az* $\mathbb{F}$ *függvény határértéke 0.*
- $\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \\ \dots \\ x_n \to +\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2 \dots, x_n) = 1$, *azaz ha mindegyik változóval tartunk a* $+\infty$*-hez, akkor az* $\mathbb{F}$ *függvény határértéke 1.*

Bizonyítás. A 2. állítás abból következik, hogy a bal oldal éppen a

$$\mathbb{P}\left((\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n) \in [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \dots \times [a_n, b_n[\right)$$

valószínűség, (téglába esés valószínűsége) ami a valószínűség valószínűség nemnegativitása miatt nemnegatív.

A többi állítás nyilvánvaló. ☒

8.3. Valószínűségi vektorváltozók fajtái

Kétféle fajtájuk van: diszkrét és abszolút folytonos.

8.3.1. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

21. Definíció. *Egy* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ***valószínűségi vektorváltozót diszkrétnek*** *nevezünk, ha értékkészlete megszámlálható. Egy* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ *diszkrét valószínűségi vektorváltozó*

- ***értékkészletét***

$$\{(x_{i_1}, x_{i_2} \dots, x_{i_n}) | i_1 = 1, 2, \dots, i_2 = 1, 2, \dots, i_n = 1, 2, \dots\}$$

úgy, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})\}\right) = 1.$$

- ***eloszlása***

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2} \dots, \xi_n = x_{i_n})$$

minden $i_1 = 1, 2, \dots, i_2 = 1, 2, \dots, i_n = 1, 2, \dots$ *esetén.*

22. Megjegyzés. *Diszkrét valószínűségi vektorváltozó értékkészlete egyenlő a komponenseik értékkészleteinek Descartes szorzatával.*

23. Megjegyzés. *Ha (ξ_1, ξ_2) kétdimenziós diszkrét eloszlású valószínűségi változó, akkor a (ξ_1, ξ_2) értékkészletét*

$$\{(x_i, y_j)|i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$$

módon jelöltük.

Ha például $n = 3$ és $i_1 = 1, 2, i_2 = 1, 2, i_3 = 1, 2, 3$, akkor a $(\xi_1, \xi_2\xi_3)$ értékkészletét jelölhetük

$$\{(x_i, y_j, z_k|i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2, 3\}$$

módon, azaz az értékkészletnek $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ eleme van. Ez együttes eloszlást már nem tudjuk egyetlen táblázatban felírni, ugyanis akkor az eloszlás tagjai egy téglatest celláiba kellene beírnunk. ha vektorváltozó komponenseinek száma nagyobb, mint 3 ($n > 3$), akkor már erre sincs lehetőségünk.

Ha $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ egy valószínűségi vektorváltozó és n nagy, akkor már nincs lehetőségünk arra, hogy n különböző betűt alkalmazzunk a változók értékeire és azok indexelésére.

24. Tétel (Diszkrét véletlen vektorváltozók együttes eloszlásának tulajdonságai)**.** *Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ diszkrét véletlen vektorváltozók*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}|i_1 = 1, 2, \dots; i_2 = 1, 2, \dots; \dots; i_n = 1, 2, \dots, \},$$

értékekkel, és

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \dots, \xi_n = x_{i_n}).$$

együttes eloszlással, akkor

1. $p_{i_1 i_2 \dots i_n} \geqslant 0$,
2. $\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$.

Bizonyítás. A bizonyítás triviális a valószínűség definíciója és σ additivitása miatt ⊠

8.3.2. Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

25. Definíció. *Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$* ***valószínűségi vektorváltozót abszolút folytonos****nak nevezünk, ha létezik egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy*

$$\mathbb{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén.

Az f függvényt az abszolút folytonos ***valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényé****nek nevezzük.*

26. Megjegyzés. *Abszolút folytonos esetben az együttes eloszlásfüggvényből könnyen visszakapható az együttes sűrűségfüggvény:*

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \mathbb{F}(u_1, u_2, \dots, u_n) \Bigg|_{\substack{u_1=x_1 \\ u_2=x_2 \\ \dots \\ u_n=x_n}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *esetén.*

27. Tétel. ***Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai:*** *Ha* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ *egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, akkor az* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *együttes sűrűségfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0$ *minden* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *esetén, (ami inkább megállapodás, mint tulajdonság);*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n = 1.$

8.4. Valószínűségi vektorváltozó várható érték vektora és variancia mátrixa

A valószínűségi változókról megismert várható érték és szórásnégyzet szerepét vektorváltozók esetén a várható érték vektor és a variancia mátrix veszi át.

8.4.1. A várható érték vektor

28. Definíció. *A* $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ ***valószínűségi vektorváltozó várható érték vektora*** *az*

$$\mathbb{E}(\xi) := [\mathbb{E}(\xi_1), \mathbb{E}(\xi_2), \dots, \mathbb{E}(\xi_n)]^T$$

vektor.

29. Tétel (A várható érték vektor tulajdonságai). *Legyenek* $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ *valószínűségi vektorváltozók,* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. *A várható érték*

1. ***additív****, azaz* $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$,
2. ***homogén****, azaz* $\mathbb{E}(A\xi) = A\mathbb{E}(\xi)$,
3. ***eltolással kapcsolatos tulajdonság****, ami azt jelenti, hogy* $\mathbb{E}(\xi + \boldsymbol{b}) = \mathbb{E}(\xi) + \boldsymbol{b}$

Bizonyítás. A valószínűségi változók megismert tulajdonságainak az egyszerű következményei ⊠

30. Példa. *Legyen* $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ *egy valószínűségi vektorváltozó,*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}\left(A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix} a\xi_1 + b\xi_2 \\ c\xi_1 + d\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(a\xi_1 + b\xi_2) \\ \mathbb{E}(c\xi_1 + d\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbb{E}(\xi_1) + b\mathbb{E}(\xi_2) \\ c\mathbb{E}(\xi_1) + d\mathbb{E}(\xi_2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\xi_1) \\ \mathbb{E}(\xi_2) \end{bmatrix} = A\mathbb{E}(\xi).$$

8.4.2. A variancia mátrix

31. Definíció. *A* $\xi := [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ ***valószínűségi változó variancia mátrixá****nak a*

$$\mathrm{var}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(\xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}^2(\xi_2) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \ldots & \mathbb{D}^2(\xi_2) \end{bmatrix}$$

mátrixot nevezzük. (Tehát $\mathrm{var}(\xi) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, amelynek* (ij)*-edik komponense a* $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$*.*

32. Megjegyzés. *Érdemes észrevenni, hogy*

$$\mathrm{var}(\xi) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T\right),$$

ahol az argumentumban szereplő négyzetes mátrix várható értéke komponensenként értendő.

33. Tétel (A varianciamátrix tulajdonságai). *Legyen* $\xi := [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ *egy valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a* $\mathrm{var}(\xi) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ *mátrix*

1. ***Pozitív szemidefinit mátrix****, azaz minden* $x \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $x^T \mathrm{var}(\xi) x \geqslant 0$*.*
2. ***Négyzetesen homogén****, azaz minden* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *esetén* $\mathrm{var}(A\xi) = A\mathrm{var}(\xi)A^T$*.*
3. ***Transzláció invariáns****, azaz minden* $B \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $\mathrm{var}(\xi + B) = \mathrm{var}(\xi)$*.*

Bizonyítás.

1. Pozitív szemidefinitség: Legyenek $\xi := [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ egy valószínűségi vektorváltozó, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Ekkor
$$\begin{aligned} x^T \mathrm{var}(\xi) x &= x^T \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T\right) x = \\ &= \mathbb{E}\left(x^T (\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T x\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(x^T (\xi - \mathbb{E}(\xi)) \cdot \left[x^T (\xi - \mathbb{E}(\xi))\right]^T\right) = \\ &= \mathbb{E}\left((x_1^2(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))^2 + \dots + x_n^2(\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n))^2\right) \\ &= \mathbb{D}^2(x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n) \geqslant 0. \end{aligned}$$

2. Négyzetes homogenitás:
$$\begin{aligned} \mathrm{var}(A\xi) &= \mathbb{E}\left((A\xi - \mathbb{E}(A\xi))(A\xi - \mathbb{E}(A\xi))^T\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(A(\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T A^T\right) = \\ &= A\mathrm{var}(\xi) A^T. \end{aligned}$$

3. Eltolásinvariancia:
$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\xi + B) &= \mathbb{E}\left(((\xi + B) - \mathbb{E}(\xi + B))((\xi + B) - \mathbb{E}(\xi + B))^T\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(((\xi + B) - \mathbb{E}(\xi + B))((\xi + B) - \mathbb{E}(\xi + B))^T\right) = \mathrm{var}(\xi). \end{aligned}$$

⊠

34. Példa. *Egy urnában van egy piros és egy fehér golyó. Kihúzunk egyet. Jelölje ξ_1 a kihúzott piros, ξ_2 a kihúzott fehér golyók számát. Határozza meg a (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását, a várható érték vektorát és a variancia mátrixát.*
Megoldás: *Együttes és marginális eloszlások:*

ξ_1/ξ_2	*0*	*1*	
0	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Így kapjuk, hogy
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{D}^2(\xi_1) = \mathbb{D}^2(\xi_2) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) &= 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) &= \mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a várható érték vektor és a variancia mátrix:

$$\mathbb{E}\left((\xi_1,\xi_2)^T\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{var}(\xi_1,\xi_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ez a példa attól érdekes, hogy a (ξ_1,ξ_2) valószínűségi vektorváltozó egyidejűleg polinomiális és polihipergeometrikus (lásd később).

8.4.3. Minimum és maximum eloszlása

35. Tétel. *Legyenek $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ független valószínűségi változók $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2,\ldots,\mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényekkel. Definiáljuk a ξ_1^* és ξ_n^* változókat a*

$$\xi_1^* := \min(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n), \qquad \xi_n^* := \max(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$$

módon. Ekkor

$$\mathbb{F}_{\xi_1^*}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1-\mathbb{F}_i(x)\right), \qquad \mathbb{F}_{\xi_n^*}(x) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{F}_i(x)$$

minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás.

- Az ξ_1^* eloszlásfüggvénye.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\xi_1^*}(x) &= \mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)<x) = 1-\mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\geqslant x) = \\ &= 1-\mathbb{P}((\xi_1\geqslant x)\cap(\xi_2\geqslant x)\cap\cdots\cap(\xi_n\geqslant x)) = \mathbb{P}(\xi_1\geqslant x)\mathbb{P}(\xi_2\geqslant x)\ldots\mathbb{P}(\xi_n\geqslant x) = \\ &= 1-(1-\mathbb{P}(\xi_1<x))(1-\mathbb{P}(\xi_2<x))\ldots(1-\mathbb{P}(\xi_n<x)) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{F}_i(x)).\end{aligned}$$

- Az ξ_n^* eloszlásfüggvénye.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\xi_n^*}(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)<x) = \mathbb{P}((\xi_1<x)\cap(\xi_2<x)\cap\cdots\cap(\xi_n<x)) = \\ &= \mathbb{P}(\xi_1<x)\mathbb{P}(\xi_2<x)\ldots\mathbb{P}(\xi_n<x)) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\xi_i<x).\end{aligned}$$

⊠

Példa *Könnyű látni, hogyha $\xi_i\sim\mathrm{Exp}(\lambda_i)$ valószínűségi változók ($i=1,2,\ldots,n$), akkor a $\min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ szintén exponenciális eloszlású $\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ paraméterekkel.*

8.5. Nevezetes diszkrét valószínűségi vektorváltozók

Ebben a szakaszban megismerkedünk a polinomiáslis és a polihipergeometrikus eloszlásokkal.

8.5.1. A polinomiális eloszlás

36. Definíció (**A polinomiális eloszlás**). *Legyen $r \geqslant 2$, B_1, B_2, …, B_r egy teljes eseményrendszer p_1, p_2, …, p_r valószínűségekkel. n független kísérletet végzünk és azt számoljuk, hogy a B_1, B_2, …, B_r események közül melyik hányszor következik be.*
Jele: $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r]^T \sim Polinom(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$.
Eloszlása:

$$p_{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

ahol $0 \leqslant k_i \leqslant n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *és* $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

A várható érték vektora és variancia-mátrixa:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = npi, \qquad \mathbb{D}^2(\xi_i) = np_i(1 - p_i), \qquad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = -np_ip_j \qquad (i \neq j).$$

A polinomiális eloszlás marginális eloszlásai binomiális eloszlások. $\xi_i \sim \text{Binom}(n, p_i)$, ugyanis a polinomiális tétel és az $n! = (n)_{k_1}(n - k_1)!$ felbontás alapján kapjuk, hogy

$$p_{k_1} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1) = \sum_{k_2+\cdots+k_r=n-k_1} \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} =$$

$$= \frac{(n)_{k_1}}{k_1!} p_1^{k_1} \underbrace{\sum_{k_2+\cdots+k_r=n-k_1} \frac{(n-k_1)!}{k_2! \ldots k_r!} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}}_{(p_2+\cdots+p_r)^{n-k_1}} = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (1 - p_1)^{n-k_1}.$$

37. Megjegyzés. *Érdemes elgondolkozni azon, hogy mi a kapcsolat binomiális és a polinomiális eloszlás között. A binomiális eloszlás tulajdonképpen kétdimenziós polinomiális eloszlás, hiszen (a golyóhúzásos példánál maradva) amelyik golyó nem piros, az fehér.*

Ha háromféle színű golyónk van: piros, kék és fehér, és a ξ_1, ξ_2, ξ_3 valószínűségi változók számolják az egyes színekből (piros, kék, fehér) kihúzott golyók számát, akkor a (ξ_1, ξ_2) nem lesz kétdimenziós polinomiális eloszlású valószínűségi változó, mert a kihúzott piros és kék golyók számának összege nem minden esetben adja ki a húzások számát.

Alacsonyabb dimenziós polinomiális eloszlásokat a magasabb dimenziós polinomiális eloszlásokból bizonyos színek összevonásával tudunk kapni. Például összevonjuk a kék és fehér színeket és kétféle színt számolunk, a kihúzott pirosok és nem pirosok számát. Ez az eloszlás az eredetiből szummázással kapható.

Hasonló értelemben kaphatók meg egy n dimenziós polinomiális eloszlású valószínűségi változóból a megfelelő alacsonyabb dimenziós polinomiális eloszlású valószínűségi változók.

38. Példa. *Egy urnában van 2 piros, 2 kék és 1 fehér golyó. Visszatevéssel kihúzunk 3 golyót. Legyen* $\xi \sim [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$. *Ekkor* $\xi \sim Polinom(n = 3, p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{2}{5}, p_3 = \frac{1}{5})$.

$$p_{003} = \frac{3!}{0!0!3!}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} = 0.008,$$
$$p_{012} = \frac{3!}{0!1!2!}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{6}{125} = 0.048,$$
$$p_{021} = \frac{3!}{0!2!1!}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{12}{125} = 0.096,$$
$$p_{030} = \frac{3!}{0!3!0!}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{8}{125} = 0.064,$$
$$p_{102} = \frac{3!}{1!0!2!}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{6}{125} = 0.048,$$
$$p_{111} = \frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{24}{125} = 0.192,$$
$$p_{120} = \frac{3!}{1!2!0!}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{24}{125} = 0.192,$$
$$p_{201} = \frac{3!}{2!0!1!}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{12}{125} = 0.096,$$
$$p_{210} = \frac{3!}{2!1!0!}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{24}{125} = 0.192,$$
$$p_{300} = \frac{3!}{3!0!0!}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{8}{125} = 0.064,$$

Így kapjuk az együttes eloszlást:

(ξ_1, ξ_2)	*0*	*1*	*2*	*3*	
0	$p_{003} = 0.008$	$p_{012} = 0.048$	$p_{021} = 0.096$	$p_{030} = 0.064$	*0.216*
1	$p_{102} = 0.048$	$p_{111} = 0.192$	$p_{120} = 0.192$	-	*0.432*
2	$p_{201} = 0.096$	$p_{210} = 0.192$	-	-	*0.288*
3	$p_{300} = 0.064$	-	-	-	*0.064*
	0.216	*0.432*	*0.288*	*0.064*	*1*

Könnyű látni, hogy a ξ_1, *és* ξ_2 *marginálisok Binomiális eloszlásúak* $n = 3$, $p = \frac{2}{5}$ *paraméterekkel, a* ξ_3 *marginális szintén Binomiális eloszlású* $n = 2$, $p = \frac{1}{5}$ *paraméterekkel.*

8.5.2. Polihipergeometrikus eloszlás

39. Definíció. *Visszatevés nélküli golyóhúzás urnából több mint két szín esetén. Használjuk a következő jelöléseket*
N: golyók száma,
r: a színek száma,
$s_1, s_2, \dots, s_r$: a különböző színű golyók száma ($s_1 + s_2 + \dots + s_r = N$),
n: ennyi golyót húzunk.

Az együttes eloszlás:

$$p_{k_1,k_2,\dots,k_r} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \frac{\binom{s_1}{k_1}\binom{s_2}{k_2}\dots\binom{s_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}$$

ahol $0 \leqslant k_i \leqslant s_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

A várható érték vektora és variancia-mátrixa:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = n\frac{s_i}{N}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi_i) = n\frac{N-n}{N-1}\frac{s_i}{N}\left(1 - \frac{s_i}{N}\right) \qquad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = -\frac{N-n}{N-1}\frac{s_i}{N}\frac{s_j}{N} \qquad (i \neq j)$$

40. Tétel. ***A marginális eloszlások*** *hipergeometrikus eloszlások megfelelő paraméterekkel. Például legyen k_1 olyan, hogy $\max(0, n - (N - s_1)) \leqslant k_1 \leqslant \min(s_1, n)$. Ekkor*

$$P_{k_1} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1) = \sum_{\substack{k_2+\dots+k_r=n-k_1 \\ 0\leqslant k_i\leqslant s_i}} \frac{\binom{s_1}{k_1}\binom{s_2}{k_2}\dots\binom{s_r}{k_r}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{\binom{s_1}{k_1}}{\binom{N}{n}} \underbrace{\sum_{\substack{k_2+\dots+k_r=n-k_1 \\ 0\leqslant k_i\leqslant s_i}} \binom{s_2}{k_2}\dots\binom{s_r}{k_r}}_{\binom{N-s_1}{n-k_1}} = \frac{\binom{s_1}{k_1}\binom{N-s_1}{n-k_1}}{\binom{N}{n}}$$

Itt felhasználjuk a Zhu-Vandermonde azonosságot, mely szerint

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=m} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\dots\binom{n_r}{k_r} = \binom{n_1 + n_2 + \dots + n_r}{m},$$

ahol n_1, n_2, …, n_r rögzített pozitív egészek úgy, hogy $n_1+n_2+\dots+n_r \leqslant m$. Alexandre-Théophile Vandermonde (1772), Zhu Shijie (1303).

41. Megjegyzés. *A polihipergeometrikus és az alacsonyabb dimenziós polihipergeometrikus eloszlások kapcsolatáról hasonló gondolatok fogalmazhatók meg, mint amit a polinomiális és binomiális eloszlásoknál láttunk.*

42. Példa. *Egy urnában van 2 piros, 2 kék és 1 fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzunk 3 golyót. Jelölje ξ_1, ξ_2, ξ_3 a kihúzott piros, kék és fehér golyók számát. Mivel*

$$p_{021} = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10} = 0.1,$$

$$p_{111} = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10} = 0.4,$$

$$p_{120} = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{2}{10} = 0.2,$$

$$p_{201} = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10} = 0.1,$$

$$p_{210} = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Így a (ξ_1, ξ_2) vektorváltozó együttes eloszlása:

ξ_1/ξ_2	*0*	*1*	*2*	
0	-	-	$p_{021} = 0.1$	*0.1*
1	-	$p_{111} = 0.4$	$p_{120} = 0.2$	*0.6*
2	$p_{201} = 0.1$	$p_{210} = 0.2$	-	*0.3*
	0.1	*0.6*	*0.3*	

Látható, hogy ξ_1 és ξ_2 marginális eloszlások hipergeometrikusak $N = 5$, $s = 2$, $N - s = 3$, $n = 3$ paraméterekkel, ugyanis egy ilyen valószínűségi változó eloszlása:

x_i	*0*	*1*	*2*
p_i	$\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = 0.1$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.6$	$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = 0.3$

8.6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

Ebben a szakaszban megismerkedünk a többdimenziós egyenletes és a többdimenziós normális eloszlásokkal.

8.6.1. Többdimenziós egyenletes eloszlás

Most csak a kétdimenziós esetet tárgyaljuk, a többdimenziós egyenletes eloszlás analóg módon tárgyalható.

43. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy összefüggő korlátos nyílt (vagy zárt) halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ vektorváltozó egyenletes eloszlású a D halmazon, ha a sűrűségfüggvénye:*

$$f(x,y) = \begin{cases} C, & ha\ (x,y) \in D \\ 0 & egyébként, \end{cases}$$

ahol $C = \frac{1}{m(D)} =$, ahol $m(D)$ a D halmaz területét jelöli.

44. Megjegyzés. *1. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó marginális eloszlásai nem feltétlenül egyenletesek.*

2. Ha a $D \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz invariáns halmaza egy $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egybevágósági transzformációnak, amelynek egyetlen fixpontja a $P(x_1, x_2)$ pont, akkor $\mathbb{E}(\xi_1) = x_1$, $\mathbb{E}(\xi_2) = x_2$.

A bizonyítás rendkívül egyszerű, ugyanis, ha az $\mathbb{E}(\xi_1) = x_1$, $\mathbb{E}(\xi_2) = x_2$ nem teljesülne, akkor a Φ függvény egy az (x_1, x_2) pontot egy tőle különböző (x_1', x_2') pontba vinné, ami szintén várható értéke lenne a (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozónak, ami lehetetlen.

45. Példa. *Legyen a (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a*

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < -2x + 1\}$$

tartományon. Határozzuk meg a marginális eloszlásait.
Mo.: *Könnyen látható, hogy a (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye:*

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & ha\ 0 < x < 1\ és\ 0 < y < -2x + 2; \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

Mivel

$$f_1(x) = \int_0^{-2x+1} 1 dy = -2x + 1,$$

így a ξ_1 eloszlásfüggvénye:

$$f_1(x) := \begin{cases} -2x+1, & \text{ha } x \in]0,1[; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $y = -2x+2 \iff x = -\frac{1}{2}y+1$, és

$$f_2(y) = \int_0^{-\frac{1}{2}y+1} 1dx = -\frac{1}{2}y+1,$$

így a ξ_2 eloszlásfüggvénye:

$$f_2(y) := \begin{cases} -\frac{1}{2}y+1, & \text{ha } y \in]0,2[; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ami mutatja, hogy egyenletes eloszlású valószínűségi változók marginális eloszlásai gyakran nem egyenletes eloszlásúak.

46. Példa. *A (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x,y) = \begin{cases} C, & \text{ha } 0 < x < 6.6 \text{ és } 6.6 - x < y < 14.4 - x; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a (ξ_1, ξ_2) véletlen vektor korrelációs együtthatójának az értékét.
Mo.: *Hihetetlen, de a feladat megoldása mindössze két integrálással megúszható. A (ξ_1, ξ_2) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a megadott paralelogrammán. A C konstans értékének meghatározásához határozzuk meg a paralelogramma területét. $T = alap \cdot magasság$, amiből kapjuk, hogy $C = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6}$.*

A marginálisok várható értékei meghatározhatóak az előző megjegyzés alapján. A $(\mathbb{E}(\xi_1), \mathbb{E}(\xi_2))$ pár éppen a paralelogramma átlói metszéspontjának a koordinátái. Így kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi_1) = 3.3$, $\mathbb{E}(\xi_2) = 7.2$.

A $cov(\xi_1, \xi_2)$ értékének a meghatározásához először ki kell számolnunk az $E(\xi_1\xi_2)$ várható értéket. Alkalmazzuk a transzformációs szabályt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dydx = \int_0^{6.6}\int_{6.6-x}^{14.4-x} xy\frac{1}{7.8\cdot 6.6}dydx = \\
&= \frac{1}{7.8\cdot 6.6}\int_0^{6.6} x\int_{6.6-x}^{14.4-x} ydydx = \frac{1}{7.8\cdot 6.6}\int_0^{6.6} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=6.6-x}^{y=14.4-x} dx = \\
&= \frac{1}{7.8\cdot 6.6}\int_0^{6.6} x(10.5-x)7.8dx = \frac{1}{6.6}\int_0^{6.6}(10.5x - x^2)dx = \\
&= \frac{1}{6.6}\left[10.5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=6.6} = \frac{1}{6.6}\left(10.5\frac{6.6^2}{2} - \frac{6.6^3}{3}\right) = 10.5\frac{6.6}{2} - \frac{6.6^2}{3} = 20.13.
\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\operatorname{cov}(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = 20.13 - 3.3 \cdot 7.2 = -3.63.$$

Geometriai okok miatt látható, hogy a ξ_1 egyenletes eloszlású a $]0, 6.6[$ intervallumon, így kapjuk, hogy $\mathbb{D}^2(\xi_1) = \frac{6.6^2}{12}$.

Az $\mathbb{E}(\xi_2^2)$ meghatározásához már integrálnunk kell:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_2^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dydx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6}\int_0^{6.6}\int_{6.6-x}^{14.4-x} y^2 dydx = \\
&= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6}\int_0^{6.6}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=6.6-x}^{y=14.4-x} dx = \frac{1}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 3}\int_0^{6.6}(14.4-x)^3 - (6.6-x)^2 dx = \\
&= \frac{1}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 12}\left([(6.6-x)^4]_{x=0}^{x=6,6} - [(14,4-x)^4]_{x=0}^{x=6,6}\right) = \\
&= \frac{-6,6^4 - 7.8^4 + 14.4^4}{7.8 \cdot 6.6 \cdot 12} = \frac{3027}{50} = 60,54.
\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}^2(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_2^2) - (\mathbb{E}(\xi_2))^2 = 60,54 - 7.2^2 = 8.7.$$

Így kapjuk, hogy a keresett korrelációs együttható:

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)} = \frac{-3.63}{\sqrt{3,63}\sqrt{8.7}} = -0.6459.$$

8.6.2. Többdimenziós normális eloszlás

47. Definíció (n-dimenziós standard normális eloszlás). *Legyenek $\eta_1, \ldots, \eta_n$ standard normális eloszlású teljesen független valószínűségi változók. Ekkor az $\eta = [\eta_1, \ldots, \eta_n]^T$ valószínűségi változót* ***n-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó****nak nevezzük. Jele: $\eta \sim \mathcal{N}(0, I)$.*

Együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A várható érték vektora és variancia-mátrixa

$$\mathbb{E}(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{var}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

48. Definíció (n-dimenziós nem elfajuló normális eloszlás). *Legyen η egy n-dimenziós standard normális valószínűségi vektorváltozó, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ úgy, hogy $\det(A) \neq 0$, és $m \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a $\xi \sim \eta+m$ valószínűségi változót n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. Jele $\xi \sim \mathcal{N}(m, D)$, ahol $D = AA^T$.*
Együttes eloszlásfüggvénye:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det(D))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T D^{-1}(x-m)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A várható érték vektora és variancia-mátrixa

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \qquad \mathrm{var}(\xi) = AA^T.$$

8.6.3. 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók

49. Tétel. *Legyen (ξ_1, ξ_2) olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek paraméterei: $m_1 = \mathbb{E}(\xi_1)$, $\sigma_1^2 = \mathbb{D}^2(\xi_1)$, $m_2 = \mathbb{E}(\xi_2)$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}^2(\xi_2)$, $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\xi_1, \xi_2)$. Ekkor az együttes sűrűségfüggvény:*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\mathrm{r}^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2\mathrm{r}\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma 2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az eltolásinvariancia miatt elegendő bizonyítani a tételt $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ esetén. Határozzuk meg a $\det(D)$ és D^{-1} értéket. Tudjuk, hogy

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\det(D) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - (\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2))^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\mathrm{r}^2),$$

így

$$2\pi\sqrt{\det(D)} = 2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2\sqrt{1-\mathrm{r}^2},$$

azaz az állítás konstansra vonatkozó részét ellenőriztük.

Határozzuk meg a D^{-1} értékét:

A Cramer tétel alapján, ha

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} = \begin{bmatrix} \mathrm{d} & \text{-b} \\ \text{-c} & \mathrm{a} \end{bmatrix}.$$

A kitevő ellenőrzése:

$$-\frac{1}{2}\left(x^T D^{-1} x\right) = -\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)^2}[x,y]\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) \\ -\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \sigma_2^2 x & -\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)y \\ -\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)x & \sigma_1^2 y \end{bmatrix}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)^2}\left(\sigma_1^2 x^2 - 2\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)xy + \sigma_2^2 y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-\mathrm{r}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\mathrm{r}\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right).$$

⊠

50. Tétel. *Ha $(\xi_1,\xi_2) \sim \mathcal{N}(m,D)$ úgy, hogy ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok, akkor függetlenek.*

Bizonyítás. Ha ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok, akkor $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ és $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ független valószínűségi változók. ⊠

9. fejezet

Egyenlőtlenségek, nagy számok törvényei, Központi határeloszlás tétel, további mérőszámok

9.1. Konvergencia fajták

Legyen (ξ_n) valószínűségi változók egy sorozata, ξ egy valószínűségi változó

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy ξ_n tart a ξ-hez 1 valószínűséggel, ha*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\right)=\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega|\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\right\}\right)=1$$

és $\xi_n \overset{a.s.}{\to} \xi$ módon jelöljük.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy ξ_n tart a ξ-hez sztochasztikusan, ha minden $\varepsilon>0$ esetén*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}|\xi_n-\xi|>0\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega||\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon\}\right)=1$$

és $\xi_n \overset{p}{\to} \xi$ módon jelöljük.

3. Megjegyzés. *Az 1 valószínűséggel való konvergencia maga után vonja a sztochasztikus konvergenciát.*

4. Definíció. *Jelölje $\mathbb{F}_n$ a ξ_n eloszlásfüggvényét minden $n\in\mathbb{Z}_+$ esetén, és $\mathbb{F}$ a ξ eloszlásfüggvényét.*

Azt mondjuk, hogy ξ_n tart a ξ-hez gyengén, ha $\mathbb{F}_n(x)\to\mathbb{F}(x)$ minden olyan pontban, amelyben $\mathbb{F}$ folytonos. $\xi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \xi$ módon jelöljük.

9.2. Egyenlőtlenségek

9.2.1. Markov egyenlőtlenség

5. Tétel. *Legyen η egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke és $c > 0$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(\eta < c) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}(\eta)}{c}.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{P}(\eta < c) = 1 - \mathbb{P}(\xi \geqslant c)$, így elegendő bebizonyítani, hogy $\mathbb{P}(\eta \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\eta)}{c}$.

a. Diszkrét esetben:

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i) \geqslant \sum_{x_i \geqslant c} x_i \mathbb{P}(\eta = x_i) \geqslant \sum_{x_i \geqslant c} c\mathbb{P}(\eta = x_i) = c \sum_{x_i \geqslant c} \mathbb{P}(\eta = x_i) = c\mathbb{P}(\eta \geqslant c).$$

b. Abszolút folytonos esetben:

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_0^{+\infty} x f_\xi(x)dx \geqslant \int_c^{+\infty} x f_\xi(x)dx \geqslant \int_c^{+\infty} c f_\xi(x)dx = c \int_c^{+\infty} f_\xi(x)dx = c\mathbb{P}(\eta \geqslant c).$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

⊠

9.2.2. Csebisev egyenlőtlenség

6. Tétel. *Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik szórásnégyzete és $\varepsilon > 0$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. A Markov egyenlőtlenség következménye. Legyen $\eta = (\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$, $c = \varepsilon^2$. Ekkor η egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke. Mivel

$$(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 < c = \varepsilon^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon,$$

így a Markov egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

⊠

7. Következmény. *Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik szórásnégyzete, akkor annak a valószínűsége, hogy beleesik a saját várható értékének $k\mathbb{D}(\xi)$ sugarú környezetébe legalább $1-\frac{1}{k^2}$, azaz*

$$\mathbb{P}\left(|\xi-\mathbb{E}(\xi)|<k\mathbb{D}(\xi)\right)\geqslant 1-\frac{1}{k^2}.$$

Bizonyítás. A Csebisev egyenlőtlenségből jön ki $\varepsilon=k\mathbb{D}(\xi)$ választással.

Például: 3σ szabály. ($\sigma=\mathbb{D}(\xi)$):

$$\mathbb{P}\left(|\xi-\mathbb{E}(\xi)|<3\sigma\right)\geqslant 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

⊠

9.3. A nagy számok törvényei

9.3.1. A nagy számok gyenge törvényei

A nagy számok gyenge törvényei **sztochasztikus konvergenciá**t mondanak ki.

8. Tétel (Csebisev-féle nagy számok törvénye)**.** *Ha $\xi_1, \xi_2 \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórásnégyzete, m a közös várható érték, $\varepsilon>0$ akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}-m\right|<\varepsilon\right)=1,$$

(azaz a várható érték közelíthető az átlaggal).

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}\right)=m,\qquad \mathbb{D}^2\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}n\mathbb{D}^2(\xi_1)=\frac{\mathbb{D}^2(\xi_1)}{n}.$$

Így a Csebisev egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}-m\right|<\varepsilon\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{\mathbb{D}^2(\xi_1)}{n}}{\varepsilon^2}\right)=1.$$

⊠

9. Tétel (Bernoulli-féle nagy számok törvénye)**.** *Független kísérletek sorozatát vizsgáljuk és egy p valószínűséggel következő eseményeinek a számát figyeljük.*

Jelölje $\frac{k_n}{n}$ az esemény relatív gyakoriságát, azaz n kísérletből az A esemény k_n-szer következik be. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Így nyilván $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{k_n}{n} - p| \leqslant \varepsilon) = 1$. (Tehát az esemény relatív gyakorisága visszaadja határértékben az elméleti valószínűséget.) A relatív gyakoriságok sztochasztikusan konvergálnak a valószínűséghez.

Bizonyítás. $k_n \sim \mathrm{B}(n, p)$. Így

$$\mathbb{E}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(k_n) = \frac{1}{n}np = p,$$
$$\mathbb{D}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2(k_n) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n},$$

Így a Csebisev egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Ha a p valószínűség nem ismert, akkor a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

ugyanis teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy

$$-p(1-p) = p^2 - p = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{4}.$$

⊠

10. Definíció. *Az ε számot **pontosság**nak, a jobb oldalt **megbízhatóság**nak nevezzük.*

Jacob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikus.

9.3.2. A nagy számok erős törvényei

A nagy számok erős törvényei 1-**valószínűségben** vagy **majdnem biztos konvergenciá**t mondanak ki:

A tétel Nasrollah Etemadi ma is élő, a Chicagoi Egyetem professor emeritusától származik.

11. Tétel. *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ azonos eloszlású, páronként független valószínűségi változók, úgy $m = \mathbb{E}(\xi_i) < +\infty$, akkor a $\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}$ 1-valószínűséggel tart m-hez, azaz*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m\right) = \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)}{n} = m\right) = 1$$

9.4. A centrális határeloszlás tétel

A centrális határeloszlás tétel **gyenge konvergenciá**t fogalmaz meg. Központi szerepe van a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában.

12. Tétel. *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik véges szórásnégyzetük ($m = \mathbb{E}(\xi_i)$, $\sigma = \mathbb{D}(\xi_i)$, ekkor $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ jelöléssel.*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \,(= \varphi(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Bizonyítás. Karakterisztikus függvény segítségével egyszerűen elvégezhető. ⊠

A tétel története:

- Az első verzió Abraham de Moivre francia matematikus nevéhez fűződik (1733)
- Pierre-Simon Laplace (1812) újra felfedezi az elméletet
- Alekszandr Mihajlovics Ljapunov (1901) elsőként igazolja a tételt.

Érdekesség, hogy a tétel bizonyítása Alan Turing doktori disszertációjában is szerepel már. Az elnevezés (centrális határeloszlás tétel) Pólya György egy 1920 dolgozatából származik.

9.4.1. A központi határeloszlás tétel illusztrációja

13. Példa. *Legyenek $\xi_1, \xi_2 \sim \mathrm{U}(0,1)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\xi_1 + \xi_2$ eloszlását. Adja meg a $\xi_1 + \xi_2$ standardizáltjának az eloszlását is.*
Megoldás: *Két különböző megoldást is adunk.*

1. Megoldás: *Meghatározzuk az összeg eloszlást a sűrűségfüggvények konvolúciója segítségével. Mivel* $\xi_1 \in [0,1]$ *és* $\xi_2 \in [0,1]$*, így* $\xi_1 + \xi_2 \in [0,2]$*, tehát*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = 0, \ \ ha\ x \in [0,2].$$

Mivel $f_1(x) = f_2(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ *tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *estén, ahol a* $\chi_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény a* $H \subseteq \mathbb{R}$ *halmaz úgynevezett indikátorfüggvénye, amely*

$$\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in H, \\ 0, & ha\ x \notin H \end{cases}$$

módon van definiálva.

A konvolúciós képlet alapján kapjuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x-t)\chi_{[0,1]}(t)dt.$$

Mivel

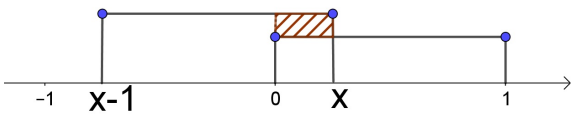
$$\chi_{[0,1]}(x-t) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - t \in [0,1] \quad \Longleftrightarrow \quad t \in [x-1, x] \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_{[x-1,x]}(t) = 1,$$

így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x-t)\chi_{[0,1]}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[x-1,x]}(t)\chi_{[0,1]}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[x-1,x]\cap[0,1]}(t)dt,$$

tehát azt kell figyelni, hogy az $[x-1,x]$ *és a* $[0,1]$ *halmazok hogyan metszenek össze, majd a kapott indikátorfüggvényt kell integrálni, ami - lépcsős függvény lévén - könnyű dolog. Esetszétválasztást végzünk.*

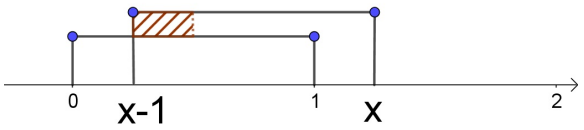
- *Ha* $x \in [0,1]$*, akkor* $[x-1,x] \cap [0,1] = [0,x]$



Így $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(t)dt = x$*, azaz*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = x \qquad (x \in [0,1]).$$

- *Ha* $x \in [1,2]$, *akkor* $[x-1,x] \cap [0,1] = [x-1,1]$



Mivel a nemnegatív értékű függvény integrálja a görbe alatti síkidom területe, így kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[x-1,x]}(t)dt = 1-(x-1) = -x+2,$$

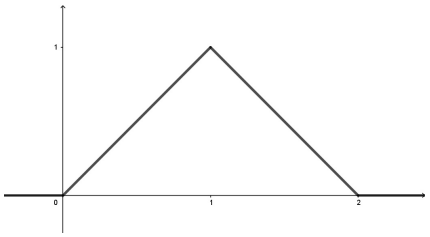
azaz

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = -x+2 \qquad (x \in [1,2]).$$

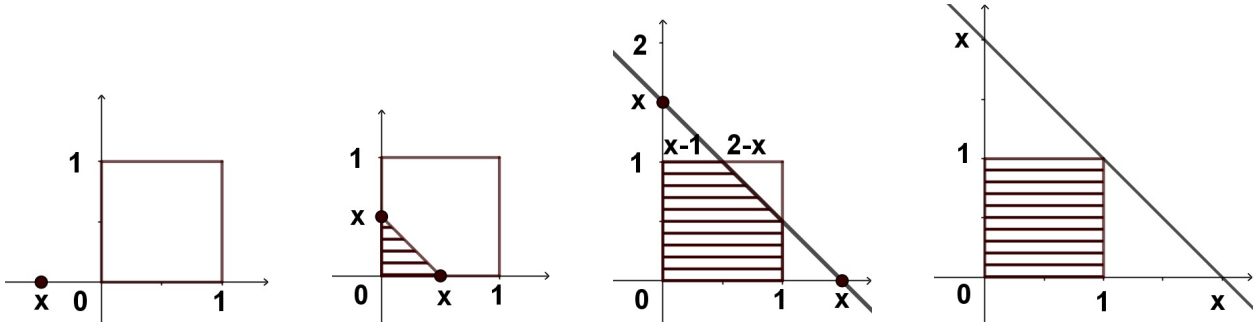
Eredményeinket összegezve kapjuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \notin [0,2]; \\ x, & ha\ x \in [0,1]; \\ -x+2, & ha\ x \in [1,2]. \end{cases}$$

A kapott függvény grafikonja:



2. Megoldás: *Határozzuk meg a* $\xi_1+\xi_2$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ehhez fogalmazzuk át a feladatot: Ledobunk egy pontot az egységnégyzetre. Mennyi a valószínűsége, hogy a ledobott pont koordinátáinak összege egy rögzített* $x \in \mathbb{R}$ *számnál kisebb, azaz* $\mathbb{F}_{\xi_1+\xi_2}(x) = \mathbb{P}(\xi_1+\xi_2 < x) =?$ *rögzített* $x \in \mathbb{R}$ *estén.*



A fenti ábrák alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_{\xi_1+\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2}, & ha\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2}, & ha\ 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 1, & ha\ x > 2. \end{cases}$$

Amiből deriválással kapjuk az $f_{\xi_1+\xi_2}$ eloszlásfüggvényt.

14. Példa. *Határozza meg három független $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlását. Idézzük fel a $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(u) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0; \\ u, & ha\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2-u, & ha\ 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & ha\ x > 2. \end{cases}$$

A konvolúciós képlet alapján kapjuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)\chi_{[0,1]}(t)dt = \int_0^1 f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt.$$

Most hajtsuk végre a $t = x - u$ helyettesítést. Ekkor $t = x - u$, $\frac{dt}{du} = -1$, amiből $dt = -du$.

A régi határok: *$t : 0 \to 1$,*

Az új határok: *$u = x - t : x - 1 \to x$.*

Figyelembe véve a $dt = -du$ összefüggést kapjuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_{x-1}^{x} f_{\xi_1+\xi_2}(u)du.$$

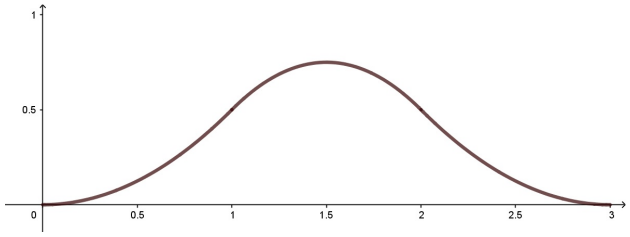
Most már csak azt kell figyelni, hogy az $[x-1, x]$ (x-től függően) hogyan metsz bele az $]-\infty, 0]$, $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,+\infty[$ intervallumokba.

- *Ha $x \in]-\infty, 0]$, akkor $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = 0$.*
- *Ha $x \in [0,1]$, akkor $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_0^x u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{x^2}{2}$.*
- *Ha $x \in [1,2]$, akkor $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_{x-1}^1 u du + \int_1^x (2-u)du = -x^2 - 3x - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.*

- *Ha* $x \in [2,3]$, *akkor* $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \int_{x-1}^{2}(2-u)du = \left[2u - \frac{u^2}{2}\right]_{u=x-1}^{u=2} = \frac{1}{2}(x-3)^2$.
- *Ha* $x \in [3,+\infty[$, *akkor* $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = 0$.

Összegezve az eredményeket kapjuk, hogy

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \notin [0,3]; \\ \dfrac{x^2}{2}, & ha\ x \in [0,1]; \\ -x^2+3x-\dfrac{3}{2}, & ha\ x \in [1,2]; \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2, & ha\ x \in [2,3]. \end{cases}$$



9.5. Moivre-Laplace tétel

Mivel a binomiális eloszlás független Bernoulli-eloszlások összege, így alkalmazható a centrális határeloszlás tétel.

15. Tétel (Moivre-Laplace tétel)**.** *Ha* $\xi \sim \mathrm{B}(n,p)$, $0 \leqslant a < b \leqslant n$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(a \leqslant \xi \leqslant b\right) \sim \Phi\left(\frac{b-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

16. Példa. *Igazolja, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^n}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}.$$

Megoldás:

Legyen $\xi_n \sim \mathrm{Poiss}(\lambda = n)$ ekkor, $\xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ független összeg, ahol $\xi_i \sim \mathrm{Poiss}(\lambda = 1)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ha n nagy, akkor ξ_n a központi határeloszlás tétel

következményeként a ξ_n standardizáltjának az eloszlásfüggvénye a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez konvergál. Mivel $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, így az állítást bebizonyítottuk. Tehát:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n < n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} < 0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - m}{\sigma} < 0\right) =$$

$$= \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

10. fejezet

Statisztika I. Pontbecslések

10.1. Szükséges matematikai előismeretek

1. Tétel (A logaritmus azonosságai)**.** *Legyenek* $x, y > 0$*,* $c \in \mathbb{R}$*.*

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*;*
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$*;*
3. $\ln(x^c) = c\ln(x)$*;*
4. $\ln(e^x) = x$*.*

Az 1., 2., 3. tulajdonságok azt jelentik, hogy a logaritmus szorzatot összegbe, hányadost különbségbe, illetve hatványt szorzatba visz. A 4. azonosság a logaritmus alapazonossága, ami azt jelenti, hogy az $x \to \ln(x)$ *és az* $x \to e^x$ *függvények egymás inverzei.*

Az 1. azonosság véges sok tényezőre is igaz, azaz ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív valós számok, akkor*

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

2. Tétel (A szummázás azonosságai)**.** *Legyenek* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *és* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *tetszőleges valós számsorozatok,* $\lambda \in \mathrm{R}$*. Ekkor*

1. $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$*;*
2. $\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$*;*

3. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

Az 1. azonosság azt fejezi ki, hogy összeg tagonként szummázható, a 2. pedig azt, hogy a szummából a konstans szorzó kiemelhető.

Bizonyítás. A fenti két állítás az összeadás és a szorzás azonosságai miatt nyilvánvaló. A korrekt bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik, amit most nem végzünk el. Az állításokat az $n = 3$ eset bemutatásával illusztráljuk.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = \\ &= \sum_{i=1}^{3} x_i + \sum_{i=1}^{3} y_i;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \lambda x_i &= \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda \sum_{i=1}^{3} x_i.\end{aligned}$$

⊠

3. Tétel (A deriválás azonosságai)**.** *Legyenek* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *deriváltható függvények,* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

1. $\frac{\partial}{\partial v} \sum_{i=1}^{n} f_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v} f_i(v)$;
2. $\frac{\partial}{\partial v} \lambda f(v) = \lambda \frac{\partial}{\partial v} f(v)$.

Az 1. azonosság a deriválás additív, a 2. azonosság a homogén tulajdonságát fejezi ki.

10.2. A statisztika részterületei

- **Mintavételezés**
- **Becsléselmélet**
  - pontbecslés
  - intervallumbecslés
- **Hipotéziselmélet**

10.2.1. Minta és mintarealizáció

4. Definíció (Minta és mintarealizáció)**.**

- ***Minta:*** *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlású valószínűségi változók. Ha ezek függetlenek, akkor független mintáról beszélünk.*
- ***Mintarealizáció:*** *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valós számok vagy vektorok.*
- ***Mintaelemszám:*** *n.*

  $n \leqslant 50$ kis minta

  $50 \leqslant n \leqslant 500$ közepes minta

  $n \geqslant 500$ nagy minta.

5. Definíció (Mintavételezés)**.**

- ***Reprezentatív minta:*** *a populáció minden tagjának egyforma esélye van a mintába kerülésre.*
- ***Rétegzett mintavétel:*** *rétegképző ismérveket használunk. Ezek az ismérvek kapcsolatban vannak azzal a paraméterrel, amit vizsgálunk. Ezek az ismérvek segítenek abban, hogy a minta emlékeztessen a sokaság összetételére.*

6. Definíció. *A statisztika célja (többek között) az eloszlás ismeretlen paraméterének (vagy paramétereinek) a meghatározása.*

- ***Pontbecslés:*** *megmondjuk, hogy mi az ismeretlen paraméter.*
- ***Intervallumbecslés:*** *megadjuk azt az intervallumot, amelybe az ismeretlen paraméter (előre adott) nagy valószínűséggel beletartozik.*

10.2.2. A statisztika, torzítatlan és konzisztens becslések

7. Definíció. *Egy $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vagy ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$) függvénysorozatot* ***statisztiká****nak nevezünk.*

8. Definíció. *Egy (g_n) becsléssorozatot a $\vartheta \in \Theta$ ismeretlen paraméter*

- ***Torzítatlan becslés****nek nevezzük, ha $\mathbb{E}(g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = \vartheta$.*
- ***Asszimptotikusan torzítatlan becslés****nek nevezzük, ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = \vartheta$.*

9. Definíció. *A (g_n) becsléssorozatot az ismeretlen ϑ paraméter* ***konzisztens becslés****nek nevezzük, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \vartheta| < \varepsilon) = 0$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, (más szavakkal a $g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi változó sztochasztikusan konvergál a ϑ-hoz).

10. Definíció. *Legyen a g_n és a $g_n^{'}$ két torzítatlan becslése a ϑ paraméternek (azaz $\mathbb{E}(g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \vartheta$ és $\mathbb{E}(g_n^{'}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \vartheta)$. Azt mondjuk, hogy a g_n* ***becslés hatásosabb a $g_n^{'}$ becslésnél****, ha kisebb a szórása, azaz*

$$\mathbb{D}^2(g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqslant \mathbb{D}^2(g_n^{'}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

10.3. Alapstatisztikák

A következő alapstatisztikákkal fogunk megismerkedni

- átlag ($\overline{\xi}$);
- empirikus szórásnégyzet (s_n^2);
- korrigált empirikus szórásnégyzet (s_n^{*2});
- empirikus medián (med);
- medián abszolút eltérés (MAD);
- tapasztalati eloszlásfüggvény ($\mathbb{F}_n^*$);
- hisztogramok.

10.3.1. Átlag

11. Definíció. *A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta $\overline{x}$ módon jelölt* ***átlag****a:*

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

12. Tétel (Átlag tulajdonsága)**.** *Az átlag az elméleti várható érték (m) torzítatlan becslése.*

Bizonyítás. A várható érték additivitása és homogenitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\overline{\xi_i}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n} nm = m.$$

⊠

10.3.2. Empirikus és korrigált empirikus szórásnégyzet

13. Definíció. ***Tapasztalati (vagy empirikus) szórásnégyzet:***

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2.$$

14. Tétel. *Az s_n^2 tulajdonságai:*

1. ***Kiszámítása:***

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - (\overline{\xi})^2.$$

Az itt szereplő $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^2 := m_2$ mennyiséget tapasztalati második momentumnak nevezzük.

Így $s_n^2 = m_2 - (\overline{\xi})^2$.

2. ***Steiner formula:*** *tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén:*

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\overline{x} - a)^2.$$

3. *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként korrelálatlanok, akkor*

$$\mathbb{E}(s_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Bizonyítás.

1. **Az $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - (\overline{x})^2$ bizonyítása:**

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2 =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2.$$

2. **A Steiner formula bizonyítása:**

Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a teve szabályt kell alkalmazni.

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - a) + (a - \overline{x})\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - a)^2 + 2(x_i - a)(a - \overline{x}) + (a - \overline{x})^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 + \underbrace{2(a - \overline{x})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}_{-2(\overline{x}-a)^2} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a - \overline{x})^2}_{(\overline{x}-a)^2} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - 2(\overline{x} - a)^2 + (\overline{x} - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\overline{x} - a)^2.$$

Megjegyzés: A Steiner-formulából $a = 0$ választással kijön az 1. állítás

3. **Az $\mathbb{E}(s_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ azonosság bizonyítása.**

   Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként korrelálatlan minta, m az elméleti várható értékkel és σ^2 elméleti szórásnégyzettel.

   A bizonyításhoz a Steiner formulát kell alkalmazni $a = m$ esetben. A 2. állítás és a várható érték additivitása és homogenitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(s_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i - m)^2 - \mathbb{E}(\overline{\xi} - m)^2.$$

   Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi - m)^2 = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2.$$

   Megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}(\overline{\xi} - m)^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$, ami egy kicsit számolásigényesebb. A bizonyítás során felhasználjuk az n-tagú összeg négyzetére vonatkozó azonosságot, azaz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j.$$

A páronkénti korrelálatlanságot is felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\overline{\xi}-m)^2=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m\right)^2=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m)\right)^2=\frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m)^2+2\sum_{i<j}(\xi_i-m)(\xi_j-m)\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i-m)^2+2\sum_{i<j}\underbrace{\mathbb{E}(\xi_i-m)(\xi_j-m)}_{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

Az előzőek alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(s_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i-m)^2-\mathbb{E}(\overline{\xi}-m)^2=\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

⊠

15. Tétel. *A tapasztalati szórásnégyzet az elméleti szórásnégyzet asszimptótikusan torzítatlan becslése.*

Bizonyítás.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(s_n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2.$$

⊠

16. Definíció. ***Korrigált tapasztalati szórásnégyzet:***

$$s_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2,$$

azonban

$$s_n^{*2}=\frac{n}{n-1}s_n^2$$

módon is számolható.

Szórási együttható: $\frac{s_n}{\overline{\xi}}$.

17. Tétel. *Az s_n^{*2} az elméleti szórásnégyzet torzítatlan becslése.*

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}(s_n^{*2})=\mathbb{E}\left(\frac{n}{n-1}s_n^2\right)=\frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left(s_n^2\right)=\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2.$$

⊠

10.3.3. Empirikus medián és medián abszolút eltérés

18. Definíció. *Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor a ξ **medián**jának azt a $\nu \in \mathbb{R}$ számot nevezzük, amelyre $\mathbb{F}(\nu) = \frac{1}{2}$.*

19. Definíció. ***Tapasztalati medián:*** *Legyen a rendezett minta: $\xi_1^* \leqslant \xi_2^* \leqslant \cdots \leqslant \xi_n^*$.*
Tapasztalati medián:

$$\operatorname{med}(\xi_i) := \begin{cases} \dfrac{\xi_k^* + \xi_{k+1}^*}{2}, & ha\ n = 2k, \\ \xi_k^*, & ha\ n = 2k-1. \end{cases}$$

Abban az esetben használják, ha az eloszlásnak nincs várható értéke.

20. Definíció. *Jelölje* med *a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta tapasztalati mediánját. Ekkor a*

$$\operatorname{MAD}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \operatorname{med}(|\xi_1 - \operatorname{med}|, \ldots, |\xi_n - \operatorname{med}|)$$

módon definiáljuk.

21. Tétel. *Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egy valós számsorozat, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor*

1. *Az $x \mapsto (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$ módon definiált függvény minimumhelye*

$$x = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. *Az $x \mapsto |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$ módon definiált függvény minimumhelye az $x = \operatorname{med}(x_i)$.*

Bizonyítás.

1. Legyen $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x x_i + x^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x^2 - 2x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \\ &= m_2 + x^2 - 2mx = m_2 + (x - m)^2 - m^2. \end{aligned}$$

   Ez a kifejezés akkor a legkisebb, ha $x = m$.

2. Nem bizonyítjuk.

$\boxtimes$

10.3.4. Tapasztalati eloszlásfüggvény

22. Definíció. ***Tapasztalati eloszlásfüggvény*** *Legyen $\xi_1^* < \xi_2^* < \cdots < \xi_n^*$ egy rendezett minta. Ekkor az $\mathbb{F}_n^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{F}_n^*(x) := \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leqslant \xi_1^*, \\ \dfrac{k}{n}, \text{ ha } \xi_k^* < x \leqslant \xi_{k+1}^*, \\ 1, \text{ ha } x > \xi_n^*. \end{cases}$$

módon definiált függvényt ***tapasztalati eloszlásfüggvény****nek nevezzük.*

Tehát $\mathbb{F}_n^*$ egy olyan monoton növekvő balról folytonos lépcsős függvény, amely a rendezett minta minden elemén $\frac{1}{n}$-et ugrik.

A tapasztalati eloszlásfüggvény más módon is bevezethető:

$$\mathbb{F}_n^*(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{]\xi_i, +\infty[}(x),$$

ahol az $I_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

$$I_H(x) := \begin{cases} 1, \text{ ha } x \in H; \\ 0, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

módon van definiálva tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}$ esetén. Az I_H függvényt a H halmaz **indikátorfüggvény**ének nevezzük.

Ez utóbbi definíció jobb, mint az előző, mivel nem igényli a mintaelemek páronkénti különbözőségét.

23. Tétel. *Glivenko-Cantelli tétel vagy* ***a matematikai statisztika alaptétele:***

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{F}_n^*(x) - \mathbb{F}_n(x)| = 0 \right) = 1$$

ahol $\mathbb{F}$ az elméleti eloszlásfüggvény, ami azt jelenti, hogy a tapasztalati eloszlásfüggvény visszaadja annak az eloszlásnak az eloszlásfüggvényét, amelyből a minta származik.

10.4. Becslési módszerek

10.4.1. Maximum likelihood módszer

Tegyük fel, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ egy független minta ϑ ismeretlen paraméterrel.

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_n, \vartheta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} p(\xi_i, \vartheta) & \text{diszkrét minta esetén,} \\ \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i, \vartheta) & \text{abszolút folytonos minta esetén} \end{cases}$$

ahol $p(\cdot, \vartheta)$ jelöli azt az eloszlást, amelyből a diszkrét minta származik, illetve abszolút folytonos esetben $f(\cdot, \vartheta)$ jelöli azt az ismeretlen eloszlás sűrűségfüggvényét az L függvényt **likelihood függvény**nek nevezzük.

Jelölje $\widehat{\vartheta}$ az ismeretlen $\vartheta \in \Theta$ paraméter maximum likelihood becslését.

A $\widehat{\vartheta}$ meghatározása: A $\widehat{\vartheta}$ az a hely, ahol az $L(\cdot)$ függvény a maximumát felveszi, azaz

$$L(\widehat{\vartheta}) = \max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta).$$

Megkeressük azt a helyet, ahol $\vartheta \to L(\vartheta)$ likelihood függvény a maximumát felveszi és a maximumhely $\widehat{\vartheta}$ adja az ismeretlen $\vartheta \in \Theta$ paraméter maximum likelihood becslését.

A technikai kivitelezéshez felhasználjuk azt az analízisből ismert tételt, hogyha egy deriválható függvénynek egy pontban lokális maximuma, vagy minimuma van, ott az első derivált eltűnik. Azokat a pontokat, ahol egy deriválható függvény első deriváltja eltűnik a függvény stacionárius pontjainak nevezzük. Tehát meg kell keresnünk az $\vartheta \to L(\vartheta)$ függvény stacionárius pontjait.

Mivel a $\vartheta \to L(\vartheta)$ függvény szorzat alakú, és a szorzat alakú függvényt nem könnyű deriválni, így vesszük a $\vartheta \to L(\vartheta)$ függvény logaritmusát, a

$$\vartheta \to l(\vartheta) := \ln(L(\vartheta))$$

függvényt, amelyet log-likelihood függvénynek nevezünk és $l(\vartheta)$ módon jelölünk.

A log-likelihood függvénynek több jó tulajdonsága is van:

- mivel az ln függvény szigorúan növekvő, így a $\vartheta \to l(\vartheta)$ függvénynek ugyanazok a maximumhelyei, mint a $\vartheta \to L(\vartheta)$ függvénynek;
- a logaritmus szorzatot összegbe visz, így a deriválás könnyebben kivitelezhető.

Összegezve: Meg kell oldanunk a $\dfrac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta) = 0$ egyenletet, majd meg kell vizsgálnunk, hogy a kapott $\widehat{\vartheta}$ valóban maximum helye $\vartheta \to l(\vartheta)$ függvénynek. Ez utóbbi vizsgálattól rendszerint eltekintünk.

24. Tétel. *A maximum Likelihood módszer tulajdonságai:*

- *Nem mindig ad torzítatlan becslést;*
- *Mindig konzistens becslést ad;*
- *A leghatásosabb becslést adja (amennyiben van ilyen).*

Bizonyítás. A harmadik állítás bizonyításához kell a Rao-Cramer egyenlőtlenség, (benne van a Fisher-féle információ mennyiség is). ⊠

10.4.2. Momentumok módszere

Ha egy ξ egy valószínűségi változó, akkor a ξ **k-adik elméleti momentum**át

$$\nu_k := \mathbb{E}(\xi^k)$$

módon definiáljuk (amennyiben létezik).

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egy független minta úgy, hogy az eloszlásnak, amelyből származik létezik a k-adik momentuma, akkor ezt a **k-adik empirikus momentum**mal közelítjük, ami

$$m_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k$$

módon van definiálva.

A momentumok módszere

Adott egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független minta ismeretlen paraméterekkel, a célunk az ismeretlen paraméterek meghatározása. Az ismeretlen paraméterek kifejezhetők elméleti momentumokkal, bár ehhez gyakran nemlineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Ekkor az ismeretlen paraméterek becslésekor az elméleti momentumok helyett a tapasztalati momentumokat használjuk. Például:

- A független minta a Poiss(λ) eloszlásból származik, és az ismeretlen λ paraméter becslése a cél. Mivel ekkor $\mathbb{E}(\xi) = \lambda$, így a λ ismeretlen paraméter becslése $\widehat{\lambda} = \overline{\xi}$. Ebben az esetben, mivel $\mathbb{D}^2(\xi) = \lambda$, így az ismeretlen paraméter akár $\widehat{\lambda} = m_2 - (\overline{\xi})^2$ módon is becsülhető lenne, de ebben az esetben a $\widehat{\lambda} = \overline{\xi}$ becslést kell választani, mivel alacsonyabb fokú.
- Ha a független minta Exp(λ) eloszlásból származik, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, így az ismeretlen λ paraméter $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{\xi}}$ módon becsülhető.
- Ha az ismeretlen minta $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásból származik, akkor az m ismeretlen paraméter $\widehat{m} = \overline{\xi}$, a σ^2 ismeretlen paraméter $\widehat{\sigma^2} = m_2 - (\overline{\xi})^2$ módon becsülhető.

11. fejezet

Statisztika II., Intervallumbecslések

11.1. Szükséges matematikai előismeretek

11.1.1. A Γ függvény

1. Definíció. *A* $\Gamma : D = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

módon definiált függvényt Γ ***függvény****nek nevezzük.*

A Γ függvény Daniel Bernoulli svájci matematikus (1700-1782) nevéhez fűződik.

2. Tétel (Tulajdonságai)**.** *1.* $\Gamma(n) = (n-1)!$*, ha* $n \in \mathbb{Z}_+$*, azaz a* Γ *függvény a faktoriális függvény folytonos kiterjesztésének tekinthető.*

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

11.1.2. A $\mathcal{B}$ függvény

3. Definíció. *A Béta függvényt* $\mathcal{B} : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+)$$

módon definiáljuk.

4. Tétel (Tulajdonságai)**.**

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

11.2. A normális eloszlásból származtatott eloszlások

11.2.1. Khi-négyzet eloszlás

5. Definíció. *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor a*

$$\chi_n^2 \sim \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

eloszlást n ***szabadságfokú khi-négyzet eloszlás****nak nevezünk.*

6. Tétel (Tulajdonságai)**.** *Az n szabadságfokú khi-négyzet eloszlás sűrűségfüggvénye:*

$$f(x,n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

11.2.2. Student eloszlás

7. Definíció. *Ha $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor a*

$$t_n \sim \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

valószínűségi változót ***student eloszlású valószínűségi változó****nak nevezzük (ahol $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$).*

A Student eloszlás William Seally Gosset (1876-1782) angol statisztikus, vegyész és sörfőző nevéhez fűződik. A Guinness sörgyárnak dolgozott, eredményeit Student álnéven publikálta.

8. Tétel (Tulajdonságai)**.** *A t_n eloszlás sűrűségfüggvénye:*

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

- *$n = 1$ esetben Cauchy eloszlást kapunk*

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  sűrűségfüggvénnyel.

- *Illetve ha $n \to \infty$-ben, akkor a t_n közelít a standard normális eloszláshoz.*

11.2.3. Fisher-Snedecor eloszlás

9. Definíció. *χ^2_n és χ^2_m független, kszi-négyzet eloszlású valószínűségi változók, akkor az*

$$F_{n,m} \sim \frac{\frac{\chi^2_n}{n}}{\frac{\chi^2_m}{m}}$$

eloszlást n, m ***szabadságfokú Fisher-Snedecor eloszlású valószínűségi változó****nak nevezzük.*

Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) brit polihisztor. George Waddel Snedecor (1881-1974) amerikai matematikus és statisztikus.

10. Tétel (Tulajdonságai)**.** *A Fisher-Snedecor eloszlás sűrűségfüggvénye*

$$f_{n,m}(x) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{m\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{\frac{-n+m}{2}}} \qquad (x \geqslant 0)$$

11.2.4. Érdekesség: $\Gamma_{n,\lambda}$ eloszlás

11. Definíció. *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor a*

$$\Gamma_{n,\lambda} \sim \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

eloszlást n ***szabadságfokú λ paraméterű Γ eloszlás****nak nevezzük.*

12. Tétel. *Sűrűségfüggvénye:*

$$f_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n e^{-\lambda x}, \text{ ha } x > 0; \\ 0, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

13. Megjegyzés. *A fent látott eloszlások sűrűségfüggvényeiben az n szabadságfok (a definíciójuk miatt) pozitív egész volt. Azonban a kapott sűrűségfüggvények lehetővé teszik a számunkra, hogy a szabadságfokok tetszőleges pozitív valós számok legyenek.*

11.3. $1-\alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum

14. Definíció. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egy független minta ϑ ismeretlen paraméterrel. Keressük azokat a $\underline{g}$, $\overline{g}$ statisztikákat, amelyre*

$$\mathbb{P}\left(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqslant \vartheta \leqslant \overline{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\right) \geqslant 1-\alpha.$$

Ekkor a $(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \overline{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n))$ *intervallumot a* ϑ *ismeretlen paraméter* $1-\alpha$ ***konfidencia szintű intervallumbecslés****ének nevezzük.*

Általánosítás:

Keressük azt a $C(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *tartományt, amelyre*

$$\mathbb{P}(\vartheta \in C(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = 1 - \alpha.$$

11.4. Fontosabb intervallumbecslések

A továbbiakban a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minden esetben $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlású független minta lesz. Az alábbi esetekkel fogunk foglalkozni:

- μ-t becsüljük
  1. σ^2 ismeretlen: az alkalmazott statisztika: $\frac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$;
  2. σ^2 ismeretlen: az alkalmazott statisztika: $\frac{\overline{\xi}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$.
- σ^2-et becsüljük

  az alkalmazott statisztika: $\frac{n s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

11.4.1. μ-t becsüljük, σ^2 ismert

15. Tétel. *Megtartva az előző jelöléseket,*

$$\frac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Bizonyítás. Rendkívül egyszerű, mivel

$$\mathbb{E}(\overline{\xi}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n} n \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i) = \mu,$$
$$\mathbb{D}^2(\overline{\xi}) = \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2} n \mathbb{D}^2(\xi_1) = \frac{1}{n}\sigma^2,$$

így $\mathbb{D}(\overline{\xi}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, amiből egy ismert tétel alapján kapjuk, hogy $\overline{\xi} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$, amiből standardizálással kapjuk az állítást. ⊠

A konfidencia szerkesztésének a menete:

1. A mintából kiszámoljuk a $\overline{\xi}$ értékét, n és σ^2 adott.

2. Kiszámoljuk az $u_{\frac{\alpha}{2}}$ értéket. Mivel $\dfrac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(-u_{\frac{u}{2}} \leqslant \frac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant u_{\frac{u}{2}}\right) = \Phi\left(u_{\frac{u}{2}}\right) - \left(1-\Phi\left(u_{\frac{u}{2}}\right)\right) = 2\Phi\left(u_{\frac{u}{2}}\right) - 1.$$

3. Mivel az α értéke is adott, így könnyen visszakereshető a táblázat alapján az $u_{\frac{u}{2}} = \Phi\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ értéke.

4. A 2. pont alapján kapjuk, hogy a konfidencia intervallum

$$\underline{g}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \overline{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{u}{2}}}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{g}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \overline{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{u}{2}}}{\sqrt{n}},$$

11.5. μ-t becsüljük, σ^2 ismeretlen

16. Tétel. *Ha $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ eloszlású független valószínűségi változók, akkor*

1. $\overline{\xi} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$;

2. $\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$;

3. $\overline{\xi}$ *és* s_n^{*2} *függetlenek.*

Bizonyítás.
1. A korábbi tételeink alapján nyilvánvaló.
2., 3. Nem egyszerű, lineáris algebrai előismeretek kellenek hozzá, például ortogonális mátrixot használ. ☒

17. Tétel. *Ha $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók, akkor*

$$\frac{\overline{\xi}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

Bizonyítás. Ezt mondja ki a Lukács Tétel.
Lukács Jenő (Lukacs, Eugene (1906-1987) magyar születésű amerikai matematikus). ☒

18. Megjegyzés. *A módszer könnyen megjegyezhető, ugyanis a*

$$\frac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

statisztikában az ismeretlen σ paramétert ki kell cserélni annak s_n^* torzítatlan becslésére. Így mi kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{\xi}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

elméleti eloszlásnak meghatározása nem egyszerű, de "elhisszük", hogy ez t_{n-1} eloszlású. Mivel egy t_{n-1} eloszlású valószínűségi változó f sűrűségfüggvénye egy y tengelyre szimmetrikus függvény. Tehát tudjuk alkalmazni az $\mathbb{F}(-x) = 1 - \mathbb{F}(x)$ $(x \in \mathbb{R}$ összefüggést, így a konfidencia intervallum szerkesztése analóg a μ-t keressük, σ^2 ismert esettel.

A konfidencia intervallum meghatározásának lépései:

1. A $t_{\frac{\alpha}{2}}$ meghatározása

$$\mathbb{P}\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{\xi}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\mathbb{F}\left(t_{\frac{\alpha}{2}} - 1\right) - 1 = 1 - \alpha.$$

   A megfelelő táblázatból a $t_{\frac{\alpha}{2}}$ visszakereshető az

$$\mathbb{F}\left(t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

   összefüggés alapján.

2. Így kapjuk, hogy a konfidencia intervallum

$$\overline{\xi} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} s_n^*}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{\xi} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} s_n^*}{\sqrt{n}}.$$

11.5.1. Az ismeretlen σ^2 paraméterre vonatkozó konficencia intervallum szerkesztése.

19. Tétel. *Megőrizve korábbi jelöléseinket*

$$\frac{n s_n}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}.$$

Bizonyítás. Lukács Jenő Tétele alapján nyilvánvaló. ☒

A konfidencia intervallum szerkesztésének a lépései:

1. Mivel a χ^2_{n-1} eloszlás sűrűségfüggvénye nem szimmetrikus az y tengelyre, így nem tudunk olyan konfidencia intervallumot szerkeszteni, amely az origóra szimmetrikus, (és így) a legrövidebb konfidencia intervallumot sem tudjuk előállítani.

2. Tudjuk, hogy $\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, így az

$$\mathbb{P}\left(x_a \leqslant \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leqslant x_f\right) = 1 - \alpha$$

   összefüggés alapján vissza kell keresnünk a megfelelő táblázatból egy megfelelő $x_a = x_{\text{alsó}}$ és $x_f = x_{\text{felső}}$ értékpár.

3. Mivel

$$\mathbb{P}\left(x_a \leqslant \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leqslant x_f\right) = \mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

   így elegendő azt az x_a, x_f párt megtalálni, amelyre

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}.$$

   Ezekkel az x_a és x_f számokkal a konfidencia intervallum:

$$\frac{ns_n^2}{x_f} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{ns_n^2}{x_a}.$$

12. fejezet

Statisztika III., Hipotézisvizsgálat

12.1. Hipotézisvizsgálat

12.1.1. Alap és ellenhipotézis

1. Definíció. *Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ egy minta, a közös eloszlásfüggvény $\mathbb{F}(\cdot, \vartheta)$, ahol $\vartheta \in \Theta$ az ismeretlen paraméter. A Θ paraméterteret felbontjuk két részre Θ_0, Θ_1 úgy, hogy $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.*

H_0 ***alaphipotézis:*** *$\vartheta \in \Theta_0$;*

H_1 ***ellenhipotézis:*** *$\vartheta \in \Theta_1$.*

Ha $\vartheta \in \Theta_0 \cap \Theta_1$, akkor véletlenszerűen döntünk.

2. Definíció. *Megőrizve a korábbi jelöléseket*

H_0 ***egyszerű alaphipotézis****, ha $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$, azaz $\vartheta = \vartheta_0$;*

H_1 ***ellenhipotézis****, ha $\Theta_1 = \Theta \setminus \{\vartheta_0\}$, azaz $\vartheta \neq \vartheta_0$.*

12.1.2. A döntés, szignifikancia szint, első és másodfajú hiba

A $\chi = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintarealizáció$\} \subseteq \mathbb{R}^N$ **mintater**et két diszjunkt halmazra bontjuk $\chi = C \cup \overline{C}$, a C halmazt **kritikus tartomány**nak nevezzük.

- Ha $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$, akkor H_0-t elvetjük,
- Ha $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{C}$, akkor H_0-t elfogadjuk.

3. Definíció. *Egy próbát* α ***szignifikancia szintű****nek nevezünk, ha*

$$\mathbb{P}(\xi) \in C|H_0) \leqslant \alpha.$$

Ha döntést hozunk, elkövethetünk hibákat.

- ***Elsőfajú hibá****nak nevezzük azt a valószínűséget, hogy* H_0*-t elvetjük pedig igaz, azaz az elsőfajú hiba a*

  $$\mathbb{P}(\xi) \in C|H_0)$$

  valószínűséget.

- ***Másodfajú hibá****nak nevezzük annak az eseménynek a valószínűségét, hogy* H_1*-et elfogadjuk, pedig hamis, azaz a másodfajú hiba a*

  $$\mathbb{P}(\xi) \in \overline{C}|H_1)$$

  valószínűség.

4. Definíció. *A* $W : \Theta \to [0,1]$ $(W = W(C, \vartheta, n))$

$$W(\vartheta) = \mathbb{P}(\{\xi \in C|\vartheta\}) \qquad (\vartheta \in \Theta)$$

módon definiált függvényt a C ***kritikus tartományhoz tartozó erőfüggvény****nek nevezzük, ahol* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *a független minta.*

5. Definíció. *A* C *kritikus tartományhoz tartozó* W ***erőfüggvény****t* ***konzisztens****nek nevezzük, ha*

$$\lim_{n\to\infty} W(\vartheta) = 1 \qquad (\vartheta \in \Theta_1)$$

6. Definíció. *Egy próbát* ***torzítatlan****nak nevezünk* α ***szinten****, ha*

$$\mathbb{P}(\xi \in C|\vartheta) \leqslant \alpha \qquad (\vartheta \in \Theta_0),$$
$$\mathbb{P}(\xi \in C|\vartheta) \geqslant \alpha \qquad (\vartheta \in \Theta_1),$$

7. Definíció. *Az* α *szintű* C_1 *és* C_2 *kritikus tartománnyal definiált próbák közül a* C_1***-et erősebb****nek nevezzük* ***a*** C_2***-nél****, ha*

$$\mathbb{P}(\xi \in C_1|\vartheta) \geqslant \mathbb{P}(\xi \in C_2|\vartheta) \qquad (\vartheta \in \Theta),$$

azaz minden $\vartheta \in \Theta$ *esetén a* C_1*-hez tartozó erőfüggvény nagyobb vagy egyenlő, mint a* C_2*-höz tartozó erőfüggvény.*

12.2. Nevezetes várható értékre vonatkozó próbák

- egymintás u-próba;
- egymintás t-próba;
- kétmintás u-próba;
- kétmintás t-próba (Ehhez a két ismeretlen elméleti szórásnégyzetnek meg kell egyezniük, ezt a tényt az F-próbával ellenőrizzük.)

12.2.1. Egymintás u-próba

Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, ahol σ^2 ismert, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ egy adott szám:

Az egyszerű alap és ellenhipotézis:

$H_0 : \mu = \mu_0$;

$H_1 : \mu \neq \mu_0$.

A döntés:

1. Úgy döntünk, hogy $\mu = \mu_0$ feltételezésével

$$\frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

2. A konfidencia intervallumok szerkesztésénél megismert módon meg kell határozunk az u értéket, melyre

$$\mathbb{P}\left(-u < \frac{\overline{\xi} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < u, \mid \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha$$

azaz a megfelelő u érték az

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

összefüggés alapján számolható.

3. A minta alapján kiszámítjuk az

$$u_{\text{obs}} := \frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

értéket.

4. Döntés: Ha $|u_{\text{obs}}| < u$, (obs=observed)akkor a H_0 alaphipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben elutasítjuk.

12.2.2. Egymintás t-próba

Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta, ahol σ^2 ismeretlen, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ egy adott szám.

Az egyszerű alap és ellenhipotézis:

$H_0 : \mu = \mu_0$;

$H_1 : \mu \neq \mu_0$.

A döntés:

1. Úgy döntünk, hogy tudjuk, hogy $\mu = \mu_0$ feltételezésével

$$\frac{\overline{\xi} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

2. A konfidencia intervallumok szerkesztésével megismert módon meg kell határoznunk azt a t értéket, amelyre

$$\mathbb{P}\left(-t\frac{\overline{\xi} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n} < t, \mid \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha,$$

azaz ha $\mathbb{F}$ jelöli egy t_{n-1} eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor keressük azt a t értéket, amelyre

$$\mathbb{F}(t) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \left(\text{illetve } G(t) = \frac{\alpha}{2}\right).$$

3. A minta alapján kiszámoljuk a

$$t_{\text{obs}} := \frac{\overline{\xi} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}$$

értéket (obs=observed).

4. A döntést úgy hozzuk meg, hogyha $|t_{\text{obs}}| < t$, akkor a H_0 alaphipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

12.2.3. Kétmintás u-próba

Adottak $\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \eta_2\sigma^2)$ és $\eta_1, \dots, \eta_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ független minták. (A ξ_i és η_j egymástól is függetlenek.)

Az egyszerű alap és ellenhipotézis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$;

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

A döntés:

1. Tudjuk, hogy $\mu = \mu_0$ feltételezésével

$$\frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

2. Megkeressük azt az u értéket, amelyre

$$\mathbb{P}\left(-u < \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} < u \,|\, \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha,$$

azaz

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

3. A minta alapján kiszámoljuk a

$$u_{\text{obs}} := \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

értéket.

4. A döntést úgy hozzuk, hogy $|u_{\text{obs}}| < u$ esetén a H_0 alaphipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

12.2.4. Kétmintás t-próba

Adottak $\xi_1, \ldots, \xi_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ és $\eta_1, \ldots, \eta_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ független minták (ahol ξ_i és η_j egymástól is függetlenek). (Fontos, hogy a minták közös szórásnégyzetű eloszlásokból származnak.)

Az egyszerű alap és ellenhipotézisek:
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$;
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

A döntés:

1. Ha $\mu_1 = \mu_2$, akkor

$$\frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{(m-1)s_m^{*} + (n-1)s_n^{*2}}{m+n-2}}}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2}.$$

2. Keressük azt a t értéket, amelyre

$$\mathbb{F}(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \left(\text{illetve } G(t) = \frac{\alpha}{2}\right).$$

3. A minta alapján számoljuk a

$$t_{\text{obs}} := \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{(m-1)s_m^* + (n-1)s_n^{*2}}{m+n-2}}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

értéket.

4. Ha $|t_{\text{obs}}| < t$, akkor a H_0 alaphipotézist elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

12.2.5. F-próba (a két minta szórásnégyzeteinek egyenlősége)

Legyen $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_m \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ és $\eta_1, \eta_2 \ldots, \eta_n \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$;
$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
Statisztika:

$$f = \frac{ns_n^2}{ms_m^2} \sim F_{m-1,n-1} \qquad \text{ha} \qquad ns_n^2 > ms_m^2.$$

Jelölje $\mathbb{F}$ az $F_{m-1,n-1}$ eloszlás eloszlásfüggvényét. Az x_a, x_f értékeket úgy határozzuk meg, hogy

$$\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

ami nehezen kivitelezhető, helyette szorítkozhatunk a

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}$$

feltételekre, illetve (táblázattól függően) a $G(x_f) = \frac{\alpha}{2}$, $G(x_a) = \frac{\alpha}{2}$ értékekre. Ha $a_a < f_{sz} < x_b$, akkor H_0-t elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

12.3. Szórásnégyzetre vonatkozó próba

12.3.1. χ^2 próba

Adott $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ független minta.
$H_0 : \sigma = \sigma_0$;
$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$.
Statisztika:

$$\frac{ns_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_m^2, \qquad \text{feltéve, hogy } \sigma = \sigma_0.$$

Jelölje $\mathbb{F}$ a χ_{n-1}^2 eloszlásfüggvényét. Meghatározzuk az x_a, x_f értékeket úgy, hogy

$$\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

amihez elég, ha

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}.$$

A táblázatban $\mathbb{F}(x) + G(x) = 1$, így $G(x_f) = \frac{\alpha}{2}$, $G(x_a) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Döntés:

Ha $x_a < \chi < x_f$, akkor H_0-t elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük.

12.4. Illeszkedésvizsgálat

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egy független minta. $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvénnyel.

$H_0 : \mathbb{F} = \mathbb{F}_0$;

$H_1 : \mathbb{F} \neq \mathbb{F}_0$.

Felosztjuk a számegyenest k részre osztópontokkal

$$-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k = +\infty$$

$$\mathbb{P}(a_{i-1} \leqslant \xi < a_i) = \mathbb{F}_0(a_i) - \mathbb{F}_0(a_{i-1}) = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

A minta alapján tudjuk, hogy az i-edik intervallumba η_i mintaelem esik bele. Ekkor

$$\chi = \mathbb{F}(1 - \alpha) = G(\alpha);$$

ahol $\mathbb{F}$ jelöli egy $k - 1$ szabadságfokú Kszi-négyzet eloszlás eloszlásfüggvényét, illetve $G(x) = 1 - \mathbb{F}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ módon van definiálva.

A

$$\chi_{\text{obs}} := \sum_{i=1}^{k} \frac{(\eta_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Döntés:

Elfogadjuk $\chi < \chi_{\text{obs}}$ esetén H_0-t, ellenkező esetben elvetjük.

13. fejezet

Függelék

13.1. Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

13.1.1. A kombinatorika 6 alapfeladatának faktorizáció-mentes tárgyalása

Az ismétlés nélküli permutáció és a variációk triviális módon tárgyalhatók (például gráfok segítségével, a leveleket kell összeszámolni, ha a gyökérből a levelek felé, vagy akár a levelekből kiindulva a gyökér felé haladunk, akkor elő is tudjuk állítani a keresett permutációkat, vagy variációkat, lásd gyakorlati jegyzet). A megmaradó 3 alapfeladatot az alábbi sorrendben célszerű ismertetni:

1. Ismétlés nélküli kombináció;
2. Ismétléses permutáció;
3. Ismétléses kombináció.

1. Tétel. $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Bizonyítás. A bizonyítás lépései a következők:

- Először megmutatjuk, hogy a C_n^k számok rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:
  1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
  2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

  1. definíció alapján triviálisan teljesül.

2. kombinatorikus eszközökkel bizonyítjuk (a megkülönböztetett elem módszere). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &:= \{1, 2, \ldots, n, x^*\} \qquad (x^* = n+1, \text{ a megkülönböztetett elem}); \\ \mathcal{A} &:= \{A \in \mathcal{P}(X_{n+1}) \mid A \ k+1 \text{ elemű halmaz}\}; \\ \mathcal{B}^* &:= \{A \in \mathcal{A} \mid x^* \in A\}; \\ \mathcal{B} &:= \{A \in \mathcal{A} \mid x^* \notin A\}. \end{aligned}$$

Szavakban: a $\mathcal{A}$ az alaphalmaz k+1 elemű részhalmazainak a halmaza; $\mathcal{B}^*$ halmazt a $\mathcal{A}$ elemei közül azok alkotják, amelyek tartalmazzák a megkülönböztetett elemet; végül a $\mathcal{B}$ halmazt azok, amelyek nem tartalmazzák.

Könnyű látni, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}^* \cup \mathcal{B}$ és az unió diszjunkt. Így

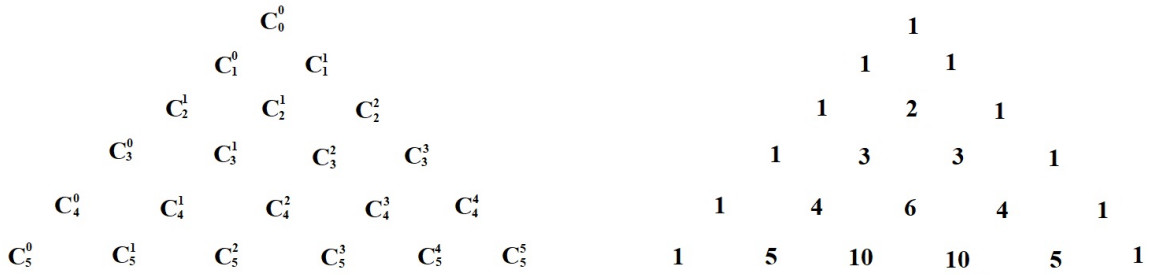
$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}^*| + |\mathcal{B}|.$$

Azt is könnyű látni, hogy

$$|\mathcal{A}| = C_{n+1}^{k+1}, \qquad |\mathcal{B}^*| = C_n^k, \qquad |\mathcal{B}| = C_n^{k+1},$$

amivel a bizonyítás teljes.

- A következő észrevételünk az, hogy a fenti 1. és 2. tulajdonságok a C_n^k számok rekurzív definícióját adják, gondoljunk csak a Pascal háromszögre.



- Végül elegendő belátni, hogy a fenti 1. és 2. tulajdonsággal az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók is rendelkeznek azaz

  1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
  2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Az 1. tulajdonság definíció alapján triviálisan teljesül.

A 2. tulajdonság megint csak definíció alapján egy kis számolással megkapható.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}.$$

A közös nevező a $(k+1)! \cdot (n-k)!$. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

⊠

2. Tétel. $\mathbb{P}_n^{k_1 \ldots k_r(i)} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!}$.

Bizonyítás. Az ismétléses permutációk számának meghatározását ismétlés nélküli kombinációk számának meghatározására vezetjük vissza. A módszert egy konkrét példával illusztráljuk:

Egy kempingben van három faház. Egy kétágyas, egy háromágyas és még egy kétágyas. Egy nap hét vendég érkezik. Hányféleképpen lehet a hét vendéget a három faházban elhelyezni, ha az egy faházba kerülő vendégek sorrendje nem számít (egymás között kitalálják).

A megoldáshoz vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje T a turisták halmazát, K az egyes faházakhoz tartozó kulcsok sorozatát.

$$T := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad K := (A, A, B, B, B, C, C).$$

Minden vendég kap egy-egy kulcsot. A kulcsok egy lehetséges kiosztását tartalmazza az alábbi táblázat:

T	1	2	3	4	5	6	7
K	A	B	A	C	B	B	C

Tehát a $P_7^{2,3,2(i)}$ értékét keressük. Ez azonban könnyen kiszámolható az ismétlés nélküli kombináció segítségével az alábbi módon:

$$P_7^{2,3,2(i)} = \binom{7}{2}\binom{7-2}{3}\binom{7-2-3}{2} = \binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

⊠

13.1.2. A Poincare formula

Feladatmegoldás *Hófehérke személyhez szóló leveleket ír n számú törpének. A leveleket n megcímzett borítékba helyezi véletlenszerűen. Jelölje p_n azt az eseményt, hogy hogy az n törpe közül van olyan, akinek a levele a neki címzett borítékba kerül. Határozza meg a $\lim_{n\to\infty} p_n$ határértéket.*
Mo.: *Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik törpe levele a saját borítékába kerül tetszőleges $(i = 1, 2, \dots, n)$ esetén. Ekkor a Poincare formula alapján kapjuk, hogy*

$$p_n = \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n-k)!}{n!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Így kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{e}$$

3. Következmény. *A Poincare-formula és a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogyha a A_1, A_2, …, A_n események olyanok, hogy $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ valahányszor $i \neq j$, akkor*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

13.2. Golyóhúzás urnából, Kolmogorov féle valószínűségi mező

13.2.1. Motiváció a Kolmogorov féle valószínűségi mező fogalmához

Már néhány egyszerű esetben sem alkalmazható a klasszikus valószínűségi mező egy esemény valószínűségének kiszámítására. Például, ha kockával dobunk, de nem szabályos a kocka, érmével dobunk, de nem szabályos az érme, illetve egy kísérletnek végtelen sok kimenetele lehet. Az ilyen esetekben **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**t alkalmazunk, ami **Nyikolajevics Kolmogorov** (1903-1987) orosz matematikus nevét őrzi.

Kolmogorov érdeme, hogy a valószínűség megalapozásában mértékelméleti módszereket alkalmaz. Eredményét 1931-ben publikálta. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező röviden egy

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármas, ahol $(\Omega, \mathcal{F})$ egy mérhető tér, $\mathbb{P}$ pedig egy egyre normált mérték ezen a mérhető téren.

A Kolmogorov féle valószínűségi mező axiómáit úgy kapjuk meg a klasszikus valószínűségi mező axiómáiból, hogy

- Az Ω halmazra nincs kikötésünk, tetszőleges nemüres halmaz lehet;
- Az $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ helyett $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ írunk, viszont megköveteljük, hogy a $\mathcal{F}$ halmazcsaládnak σ-algebrának kell lennie, azaz megköveteljük a megszámlálhatóan végtelen unióra való zártságot;
- A $\mathbb{P}$ véges additivitását σ-additivitásra cseréljük;
- A $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\})$ minden ω_1, $\omega_2 \in \Omega$ feltételt egyszerűen elhagyjuk.

Könnyű látni, hogy a klasszikus valószínűségi mező a Kolmogorov félének speciális esete.

4. Példa. *Megszámlálhatóan végtelen halmazra példa a pozitív egész számok halmaza, de a Cantor-féle átlós módszerrel megmutatható, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza is megszámlálhatóan végtelen. Szintén könnyű látni, hogy a valós számok tetszőleges legalább kételemű részhalmaza végtelen számosságú, de nem megszámlálható, hanem annál nagyobb számosságú. Így az is könnyen látható, hogy sokkal több irracionális szám van, mint racioinális.*

13.2.2. A valószínűség folytonossága, és a tétel következményei

először megmutatjuk, hogy hogyan jön ki a véges additivitásból és a valószínűség folytonosságából a valószínűség σ-additivitása. Ehhez legyen A_1, A_2, ... események páronként diszjunkt sorozata. Ekkor a valószínűség véges additivitása és folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

5. Tétel. ***A valószínűség folytonossága***

1. *Ha (B_n) események csökkenő sorozata, azaz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.*
2. *Ha (B_n) események csökkenő sorozata, azaz $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.*
3. *Ha (B_n) események növekvő sorozata, azaz $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$.*

Bizonyítás.

- ggigéigh

⊠

6. Tétel. ***A valószínűség folytonossága***

1. *Ha* (B_n) *események csökkenő sorozata, azaz* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ *és* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$*.*
2. *Ha* (B_n) *események csökkenő sorozata, azaz* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ *és* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$*.*
3. *Ha* (B_n) *események növekvő sorozata, azaz* $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ *és* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$*.*

Bizonyítás.

1. Már láttuk.
2. Legyen $C_n := B_n \setminus B$ tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Ekkor a (C_n) eseménysorozat monoton csökkenő és $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, ugyanis
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cap \overline{B}\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap \overline{B} = B \cap \overline{B} = \emptyset,$$
így az 1. állítás alapján kapjuk, hogy
$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B)) = \left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)\right) - \mathbb{P}(B),$$
és ezt kellett bizonyítanunk.
3. Legyen $C_n := B \setminus B_n$ tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Ekkor a (C_n) eseménysorozat monoton csökkenő és
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \cap \overline{B}_n) = B \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = B \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = B \cap \overline{B} = \emptyset,$$
Így az 1. állítás alapján kapjuk, hogy
$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \setminus B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B_n)) = \mathbb{P}(B) - \left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)\right),$$
amivel a bizonyítás teljes.

⊠

13.2.3. A valószínűség σ-szubadditivitása

7. Tétel. *Legyenek A_1, A_2, ... tetszőleges események.*

1. ***Véges σ-szubadditivitás*** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$;
2. ***σ-szubadditivitás*** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Bizonyítás.
1. A bizonyításhoz diszjunktálni kell, majd alkalmazni a valószínűség monotonitását. Definiáljuk a B_1, B_2, ..., B_n eseményeket

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$$

módon. Ekkor $B_i \subseteq A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, továbbá $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha $j \neq k$. Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

2. A valószínűség folytonossága és monotonitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

⊠

13.3. Feltételes valószínűség, Bayes tétel,Események függetlensége

13.3.1. A feltételes valószínűség tulajdonságai

A feltételes valószínűségnek hasonló tulajdonságai vannak, mint a valószínűségnek.

8. Tétel. *A feltételes valószínűség tulajdonságai: Tetszőlegesen rögzített $B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$ esemény esetén a $\mathbb{P}(\big|B) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. ***Nemnegativitás:*** $\mathbb{P}(A|B) \geqslant 0$ *minden $A \in \mathcal{F}$ esetén;,*
2. ***1-re normáltság:*** $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.

3. σ***-additivitás:*** *Ha* A_1*,* $A_2, \ldots$ *események páronként diszjunkt sorozata, akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B);$$

Bizonyítás.

1. A valószínűség nemnegativitásának a következménye.

2. Definíció alapján triviális, ugyanis

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

3. A valószínűség σ-additivitásának a következménye.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}\left(A_i \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B).$$

⊠

A fenti állítások általánosabb körülmények között is érvényesek.

9. Tétel. *Legyen* $B \in \mathcal{F}$ *egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor*

1. Ha az $A \in \mathcal{F}$ *esemény olyan, hogy* $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$*, akkor* $\mathbb{P}(A|B) = 1$*.*

2. Ha az A_1*,* $A_2 \in \mathcal{F}$ *olyanok, hogy* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B) = 0$*, akkor* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$*.*

3. Ha A_1*,* A_2*, ... események olyan sorozata, amelyre* $\mathbb{P}(A_j \cap A_k \cap B) = 0$*, valahányszor* $j \neq k$*, akkor* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B)$*.*

Bizonyítás.
1. Mivel $B \setminus A \subseteq A \triangle B$ és $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$, így $\mathbb{P}(B \setminus A) = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

1. A két halmazra vonatkozó szita-formula alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$$
$$= \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B).$$

1. Az előző pont és a valószínűség additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| B\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big| B\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B).$$

⊠

Feladatok

1. *Egy urnában van valamennyi piros és valamennyi fehér golyó (más színű golyó nincs az urnában). Kihúzunk egy golyót, amelyet a húzást követően vissza is rakunk az urnába. Ha pirosat húzunk, akkor belerakunk az urnába még k db piros golyót, ha fehéret húzunk, akkor még k db fehér golyót. Igazolja, hogy annak a valószínűsége, hogy először pirosat húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy másodszor pirosat húzunk.*

Megoldás: *Az urnában van s piros és $N - s$ fehér golyó. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy először piros golyót, B_2 azt az eseményt, hogy először fehér golyót, A azt az eseményt, hogy másodszor piros golyót húzunk. Ekkor*

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{s}{N}, \qquad \mathbb{P}(B_2) = \frac{N-s}{N},$$
$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{s+k}{N+k}, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = \frac{s}{N+k},$$

Így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{s+k}{N+k}\frac{s}{N} + \frac{s}{N+k}\frac{N-s}{N} = \frac{s}{N}.$$

13.3.2. Valószínűségi változók függetlensége

Feladat *Bizonyítsa be, hogy 1-nél kisebb valószínűségű események teljesen független véges rendszere nem fedi le az Ω-t.*

Megoldás: Legyen ilyen eseményrendszer $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy lefedik Ω-t. Ekkor

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = \mathbb{P}(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) =$$
$$= \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{A_n}) = (1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdots (1 - \mathbb{P}(A_n)) > 0.$$

A kapott ellentmondás bizonyítja állításunkat.

13.4. Valószínűségi változók

13.4.1. Motiváció a valószínűségi változó és a várható érték fogalmához

- Egy $(X, \mathcal{A})$ párt **mérhető tér**nek nevezünk, ha X egy nemüres halmaz, $\mathcal{A}$ egy σ-algebra X-en.

- Ha $(X, \mathcal{A}_X)$, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ mérhető terek, $f : X \to Y$ egy függvény úgy, hogy

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X \qquad (B \in \mathcal{A}_Y),$$

  akkor f-et **mérhető függvény**nek nevezzük.

- Jelölje $\mathcal{B}$ a valós számegyenes korlátos nyílt intervallumai által generált σ-algebrát. A $\mathcal{B}$ halmazt **Borel-mérhető halmaz**nak nevezzük. (**Émile Borel** (1871-1956) francia matematikus után). Az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ egy mérhető tér.

- Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy függvény úgy, hogy

$$(\xi \in B) := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \qquad (B \in \mathcal{B}),$$

  akkor a ξ függvényt **valószínűségi változó**nak nevezzük.

- Ha ξ egy valószínűségi változó, akkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_\Omega \xi d\mathbb{P}$$

  integrált a ξ valószínűségi változó **várható érték**ének nevezzük (amennyiben az integrál létezik).

  Ebből a definícióból már rögtön következnek a várható érték fontosabb tulajdonságai, nevezetesen, a várható érték additív és homogén. A várható érték additivitását ezért a későbbiekben nem bizonyítjuk.

13.4.2. Intervallumba esés valószínűsége

10. Tétel (Intervallumba esés valószínűsége eloszlásfüggvénnyel kifejezve)**.** *Ha ξ egy valószínűségi változó, $a < b$, akkor*

1. $\mathbb{P}(\xi \in]a,b[) = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a+0)$;
2. $\mathbb{P}(\xi \in [a,b]) = \mathbb{F}_\xi(b+0) - \mathbb{F}_\xi(a)$;
3. $\mathbb{P}(\xi \in [a,b[) = \mathbb{F}_\xi(b) - \mathbb{F}_\xi(a)$;
4. $\mathbb{P}(\xi \in]a,b]) = \mathbb{F}_\xi(b+0) - \mathbb{F}_\xi(a+0)$;

Bizonyítás. Könnyen kijön a

$$\mathbb{P}(\xi \in [a,b[) = \mathbb{F}(b) - \mathbb{F}(a) \quad \text{és az} \quad \mathbb{P}(\xi = x_0) = \mathbb{F}(x_0+0) - \mathbb{F}(x_0)$$

összefüggésekből. ⊠

13.4.3. Folytonos függvények fajtái

A folytonosság pontbeli tulajdonság. Azt mondjuk, hogy egy $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

1. **Folytonos**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 \forall y \in D : |x-y| < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

2. **Egyenletesen folytonos**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in D \forall u \in D : |x-u| < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(u)| < \varepsilon.$$

   Formálisan annyi történik mindössze, hogy a definícióban egy univerzális és egy egzisztenciális kvantort megcserélünk. Ez azt eredményezi, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ esetén nem kell minden $x \in D$-hez δ-t keresni, hanem ha találunk egy δ-t, akkor az minden $x \in D$-hez jó lesz.

3. Legyen I az $\mathbb{R}$ egy nemelfajuló intervalluma. Azt mondjuk, hogy az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény **abszolút folytonos** ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy valahányszor $]x_1, y_1[$, $]x_2, y_2[, \ldots$ $]x_n, y_n[$ olyan páronként diszjunkt részintervallumai az I intervallumnak, hogy $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$, mindannyiszor $\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon$.

Ha egy függvény abszolút folytonos, akkor egyenletesen folytonos és így folytonos.

Érdemes megjegyezni, hogy egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, és így folytonos.

13.4.4. A valószínűségi változók fajtái

A valószínűségi változóknak 4 fajtája van. Ezek a következők:

- Diszkrétek (azok amelyek egy megszámlálhatóan végtelen sorozatra koncentrálódnak);
- Abszolút folytonosak (azok, amelyeknek van eloszlásfüggvényük. Ezeknek az eloszlásfüggvényük folytonos.);
- Folytonos szinguláris (amelyek eloszlásfüggvénye folytonos, de Lebesgue nullmértékű halmazra koncentrálódnak);
- Minden eloszlás a fenti három keverékeként állnak elő.

Egy egyszerűbb felosztáshoz jutunk ha azt mondjuk, hogy háromféle van, amelyek a következők:

- Diszkrétek;
- Folytonosak (amelyek eloszlásfüggvénye folytonos, illetve ekvivalens módon minden értéket nulla valószínűséggel vesznek fel);
- Kevertek abban az értelemben, hogy a fenti kettő keverékeként állnak elő.

Ha ezt az utóbbi felosztást vesszük alapul, akkor kétféle folytonos eloszlás van, amelyeknek van sűrűségfüggvényük és amelyeknek nincs. Az előzőek az abszolút folytonosak, az utóbbiak a folytonos nemszinguláris eloszlások.

11. Megjegyzés.
- *Ha ξ egy diszkrét valószínűségi változó x_1, x_2, ... értékekkel, akkor a ξ ezeket az értékeket pozitív valószínűséggel veszi fel, minden más értéket nulla valószínűséggel vesz fel, tehát a ξ nem folytonos valószínűségi változó.*
- *Ha ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, tehát minden értéket nulla valószínűséggel vesz fel. Így az abszolút folytonos valószínűségi változók a folytonos valószínűségi változók osztályába esnek, azonban vannak olyan folytonos valószínűségi változók, amelyek nem abszolút folytonosak.*
- *Ha ξ egy kevert valószínűségi változó úgy, hogy létezik egy ξ_1 diszkrét valószínűségi változó $\mathbb{F}_1$ eloszlásfüggvénnyel, és egy ξ_2 valószínűségi változó $\mathbb{F}_2$ eloszlásfüggvénnyel és létezik egy $\lambda \in]0,1[$ szám úgy, hogy a ξ valószínűségi változó qmathbbF eloszlásfüggvénye előáll $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ alakban, akkor a ξ valószínűségi változó se nem diszkrét, se nem abszolút folytonos, de még folytonos sem.*

12. Definíció. *Legyenek ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ eloszlásfüggvényekkel. Legyenek $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 > 0$ úgy, hogy $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Definiáljuk a G függvényt*

$$G(x) = \lambda_1 \mathbb{F}_1(x) + \lambda_2 \mathbb{F}_2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Azt a ξ valószínűségi változót, amelynek G az eloszlásfüggvénye, a ξ_1-ből és ξ_2-ből λ_1, λ_2 ***keverési aránnyal előállított valószínűségi változó****nak nevezzük.*

13. Példa. *Legyen ξ_1 egyenletes eloszlású a $[0,1]$ halmazon, ξ_2 egyenletes eloszlású a $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ halmazon. Határozzuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlásfüggvényét, amely ξ_1 és ξ_2 keverésből származik $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ keverési aránnyal.*

A megfordítás is egyszerű, ha egy ξ valószínűségi változó egy ξ_1 diszkrét és egy ξ_2 abszolút folytonos valószínűségi változó keveréséből származik, akkor a ξ eloszlásfüggvényéből könnyű konstruálni a ξ_1 és ξ_2 eloszlások eloszlásfüggvényeit és a $\lambda_1 - \lambda_2$ keverési arányt.

Tetszőleges $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény előállítható

$$\mathbb{F}(x) = \lambda_1 \mathbb{F}_1(x) + \lambda_2 \mathbb{F}_2(x) + \lambda_3 \mathbb{F}_3(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol $\mathbb{F}_1$ egy diszkrét, $\mathbb{F}_2$ egy abszolút folytonos, $\mathbb{F}_3$ egy folytonos szinguláris eloszlásfüggvény, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ úgy, hogy $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

14. Definíció. *Egy ξ* ***valószínűségi változót folytonos****nak nevezünk, ha minden értéket nulla valószínűséggel vesz fel, azaz az eloszlásfüggvénye folytonos.*

15. Definíció. *A valós számok egy H részhalmazát Lebesgue-nullmértékűnek nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik intervallumnak egy $(]a_n, b_n[)$ sorozata, amelyre $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$, (azaz az intervallumsorozat lefedi a H halmazt és összhosszúságuk kisebb ε-nál.)*

16. Példa.

1. *Könnyű látni, hogy egy megszámlálható számosságú halmaz Lebesgue-nullmértékű.*
2. *Egy Lebesgue-nullmértékű halmaz bármely részhalmaza szintén Lebesgue-nullmértékű.*
3. *Lebesgue nullmértékű halmazok megszámlálható uniója szintén Lebesgue nullmértékű.*
4. *A C Cantor halmaz (lásd később) kontinuum számosságú, Lebesgue-nullmértékű halmaz. Ez a Cantor halmaz paradox tulajdonsága, ugyanis az, hogy a C halmaz kontinuum számosságú, azt jelenti, hogy létezik egy $\varphi : C \to \mathbb{R}$ bijekció, azon a C halmaz Lebesgue-nullmértékű, de az $\mathbb{R}$ halmaz Lebesgue mértéke ∞.*

17. Definíció. *Egy ξ valószínűségi változót folytonos* ***szinguláris folytonos valószínűségi változó****nak nevezünk, ha folytonos, de az értékkészlete egy Lebesgue-nullmértékű halmazra koncentrálódik.*

18. Példa. ***A Cantor halmaz és a Cantor eloszlás.***

A Cantor halmazhoz az alábbi iteráció révén jutunk el.

Legyen

$$C_0 = [0, 1].$$

A C_1 halmazhoz úgy jutunk, hogy eltávolítjuk a $[0, 1]$ középső nyílt harmadát, tehát

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Az eljárást iteráljuk, azaz minden lépésben eltávolítjuk a megmaradt zárt intervallumok középső nyílt harmadát,így kapjuk, hogy

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

A Cantor-halmazt $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ módon definiáljuk.

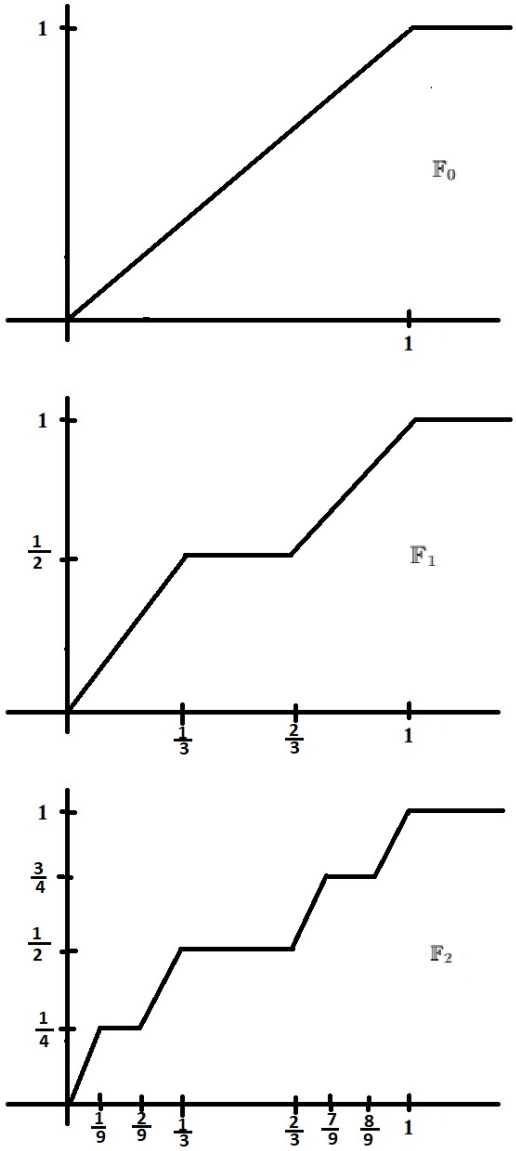
A Cantor-halmaz tulajdonságai:

- ***Zárt**, mivel zárt halmazok metszete zárt. Így tartalmazza a torlódási pontjait, azaz $C' \subseteq C$.*
- ***Kompakt**, mivel korlátos és zárt.*
- ***Perfekt**, azaz $C = C'$ is teljesül.*
- ***Seholsem sűrű**, azaz a belseje üres, mivel nem tartalmaz nyílt intervallumot.*
- ***Lebesgue-nullmértékű**, mivel mérhető és az eltávolított diszjunkt nyílt intervallumok halmazainak összege:*

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\cdots = \frac{1}{3}+\frac{2^1}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots = \frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

- ***Kontinuum számosságú**: A bizonyítás gondolata, hogy egy pont akkor és csakis akkor tartozik hozzá a Cantor-halmazhoz, ha a hármas számrendszerben felírva csupa 0 és 2 számjegyeket kapunk. Ha a 2 jegyeket átírjuk 1-re, akkor egy $[0, 1]$ intervallumbeli szám kettes számrendszerbeli felírását kapjuk. Tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a Cantor halmaz pontjai és a $[0, 1]$ intervallum pontjai között (Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen ponttól eltekintve).*

A Cantor-eloszláshoz úgy jutunk, hogy minden C_n halmazhoz hozzárendelünk egy $\mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényt úgy, hogy véletlenszerűen ledobunk egy pontot C_n-re. Tehát a ledobott pont az eltávolított intervallumokra nem eshet. Ekkor az $(\mathbb{F}_n)$ függvénysorozat egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények sorozata. Az $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$ eloszlásfüggvényeket az alábbi ábrák tartalmazzák:



A második ábráról leolvasható, hogy

$$|\mathbb{F}_2(x) - \mathbb{F}_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \qquad (x \in [0,1])\,.$$

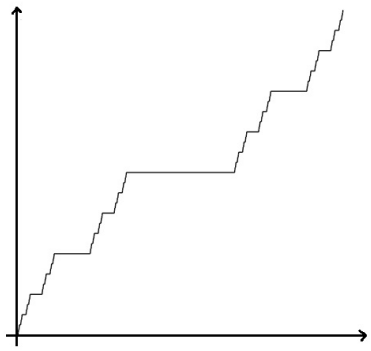
Így tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$|\mathbb{F}_n(x) - \mathbb{F}_{n-1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \qquad (x \in [0,1])\,.$$

Legyen $n < m$. ekkor

$$\begin{aligned}|\mathbb{F}_m(x) - \mathbb{F}_n(x)| &\leqslant |\mathbb{F}_m(x) - \mathbb{F}_{m-1}(x)| + |\mathbb{F}_{m-1}(x) - \mathbb{F}_{m-2}(x)| + \cdots + |\mathbb{F}_{n+1}(x) - \mathbb{F}_n(x)| < \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{6} < \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{2} + \cdots\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1}{5} < \varepsilon, \qquad \textit{ha } n \textit{ elég nagy.}\end{aligned}$$

Így a Cauchy-kritérium alapján kapjuk, hogy az $(\mathbb{F}_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál egy $\mathbb{F}$ határfüggvényhez, amely monoton növekvő és folytonos. Az alábbi ábrán látható a kapott függvény:



Az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvény egy olyan ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amelyre $\mathbb{F}_C$ folytonos $\mathbb{P}(\xi \in C) = 1$ (mivel $\mathbb{P}(\xi \in \overline{C}) = 0$) és $\lambda(C) = 0$. Az ilyen eloszlásokat folytonos szinguláris eloszlásnak nevezzük.

13.4.5. Diszkrét valószínűségi változók

13.4.6. Valószínűségi mezők szorzata

Egymás után dobunk egy szabályos érmével, aztán egy dobókockával. Jelölje A azt az eseményt, hogy fejet dobunk az érmével, B pedig azt az eseményt, hogy hatost dobunk a kockával. Nyilván mindenki úgy érzi, hogy a két esemény független, azaz $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, azonban az A

és B események más más valószínűségi mezőn vannak értelmezve. Most mutatunk egy olyan konstrukciót, amely alkalmas független kísérletek leírására. Ez a konstrukció a valószínűségi mezők szorzata.

Ez a konstrukció segít a binomiális, geometriai eloszlások megértésében

Véges sok valószínűségi mező szorzata Legyenek K_i független kísérletek (i=1,...,n). Ezeket kísérleteket rendre az $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mezők írják le. Legyenek $A_i \in \mathcal{F}_i$ események, megadunk egy olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, amely leírja a K_i független kísérleteket és a kimeneteleikkel kapcsolatos eseményeket. Legyen

$$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P}_1) \times \cdots \times (\Omega_n, \mathbb{F}_n, \mathbb{P}_n),$$

Ez azt jelenti, hogy

1. $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ Descartes szorzat. Tehát az Ω minden eleme $\omega = (x_1, x_2, \dots x_n)$ alakú, ahol $x_i \in \Omega_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

2. $\mathcal{F}$ a téglák által generált σ-algebra. Téglának az $T = A_1 \times \cdots \times A_n$ alakú halmazokat nevezzük, ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

3. A $\mathbb{P}$ valószínűséget először téglákon definiáljuk. Ha $T = A_1 \times \cdots \times A_n$, akkor $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_1(A_1) \dots \mathbb{P}_n(A_n)$. Megmutatható, hogy ez a $\mathbb{P}$ függvény a téglák halmazáról kiterjeszthető az $\mathcal{F}$ minden elemére. Ha adott egy $F \in \mathcal{F}$ esemény és F-et fel tudjuk bontani téglák diszjunkt uniójára, mondjuk $F = T_1 \cup \cdots \cup T_l$ módon, akkor $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(T_1) + \cdots + \mathbb{P}(T_l)$ módon számolható.

Legyenek az A_i események K_i független kísérletek kimeneteivel kapcsolatos események. A_i eseményeknek az $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov féle valószínűségi mezőben feletessük meg a

$$\widetilde{A}_i \doteq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

Ekkor $\mathbb{P}(\widetilde{A}_i) = \mathbb{P}_i(A)$.

Legyenek $1 \leqslant i < j \leqslant n$, és $A_i \in \mathcal{F}_i$, $A_j \in \mathcal{F}_j$. Ekkor ezeknek az eseményeknek megfeleltetett $\widetilde{A}_i$ és $\widetilde{A}_j$ események függetlenek, ugyanis

$$\mathbb{P}(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j) = \mathbb{P}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n) = \\ = \mathbb{P}_i(A_i)\mathbb{P}_j(A_j) = \mathbb{P}(\widetilde{A}_i)\mathbb{P}(\widetilde{A}_j)$$

Hasonlóképpen látható, hogyha $A_i \in \mathcal{F}_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor a $\{\widetilde{A}_i | i = 1, \dots, n\}$ eseményrendszer teljesen független.

Megszámlálhatóan végtelen sok valószínűségi mező szorzata Legyenek K_i független kísérletek (i=1,2...). Ezeket kísérleteket rendre az $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mezők írják le. Legyenek $A_i \in \mathcal{F}_i$ események, megadunk egy olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, amely leírja a K_i független kísérleteket és a kimeneteleikkel kapcsolatos eseményeket. Legyen

$$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P}_1) \times (\Omega_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{P}_2) \times \dots$$

Ez azt jelenti, hogy

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots$ Descartes szorzat. Tehát az Ω minden eleme $\omega = (x_1, x_2, \dots)$ alakú, ahol $x_i \in \Omega_i$ minden $i = 1, 2, \times$ esetén.

2. $\mathcal{F}$ a téglák által generált σ-algebra. Téglának az

$$T = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{13.1}$$

   alakú halmazokat nevezzük, ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

3. A $\mathbb{P}$ valószínűséget először téglákon definiáljuk. Ha a T tégla (13.1) alakú, akkor akkor $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_1(A_1) \dots \mathbb{P}_n(A_n)$. Mértékelméleti eszközökkel megmutatható, hogy ez a $\mathbb{P}$ függvény a téglák halmazáról kiterjeszthető az $\mathcal{F}$ minden elemére. Ha adott egy $F \in \mathcal{F}$ esemény és F-et fel tudjuk bontani téglák diszjunkt uniójára, mondjuk $F = T_1 \cup \dots \cup T_l$ módon, akkor $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(T_1) + \dots + \mathbb{P}(T_l)$ módon számolható.

Legyenek az A_i események K_i független kísérletek kimeneteivel kapcsolatos események. A_i eseményeknek az $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőben feletessük meg a

$$\widetilde{A}_i \doteq \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \times \Omega_{i+2} \dots$$

Ekkor $\mathbb{P}(\widetilde{A}_i) = \mathbb{P}_i(A)$. Könnyű látni, hogyha, hogyha $A_i \in \mathcal{F}_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor a $\{\widetilde{A}_i | i = 1, \dots, n\}$ eseményrendszer teljesen független.

13.4.7. A hipergeometrikus eloszlás

19. Tétel. *Ha ξ egy **hipergeometrikus eloszlás**ú valószínűségi változó N, s, n paraméterekkel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{ns}{N}$, $\mathbb{D}^2(\xi) = n\frac{N-n}{N-1}\frac{s}{N}(1 - \frac{s}{N})$.*

Bizonyítás. A bizonyítás esetszétválasztós és számolásigényes. A számolást a generátorfüggvényekre vonatkozó azonosságok segítségével végezzük el.

3 esetet vizsgálunk: $s = 1$, $s = 2$, $s > 2$.

$\boxed{s=1}$ Mivel a $n=N$ eset triviális, így elegendő a $n \leqslant N-1$ esetet vizsgálni. Tudjuk, hogy a a ξ eloszlása

$$\mathbb{P}(\xi=1)=\frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n}{N}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi)&=\frac{n}{N}=\frac{ns}{N},\\ \mathbb{D}^2(\xi)&=\mathbb{E}(\xi^2)-(\mathbb{E}(\xi))^2=\frac{n}{N}-\left(\frac{n}{N}\right)^2=\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right),\end{aligned}$$

Másrészt azonban

$$n\frac{N-n}{N-1}\frac{s}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)=n\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

$\boxed{s=2}$ Mivel a $n=N$ eset triviális, így elegendő a $n \leqslant N-1$ esetet vizsgálni. A ξ eloszlása:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi=1)&=\frac{\binom{2}{1}\binom{N-2}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{2(N-2)_{n-1}n!}{(N)_n(n-1)!}=\frac{2(N-2)_{n+1}n!}{N(N-1)(N)_n(n-1)!}=\frac{2(N-n)n}{N(N-1)},\\ \mathbb{P}(\xi=2)&=\frac{\binom{2}{2}\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)},\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi)=&1\cdot\frac{2(N-n)n}{N(N-1)}+2\cdot\frac{n(n-1)}{N(N-1)}=\frac{2n(N-n+n-1)}{N(N-1)}=\frac{2n}{N}=\frac{sn}{N},\\ \mathbb{E}(\xi^2)=&1\cdot\frac{2(N-n)n}{N(N-1)}+4\cdot\frac{n(n-1)}{N(N-1)}=\frac{2n(N+n-2)}{N(N-1)},\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(\xi)=\mathbb{E}(\xi^2)-[\mathbb{E}(\xi)]^2&=\frac{2n(N+n-2)}{N(N-1)}-\left(\frac{sn}{N}\right)^2=\\ &=\frac{2n(N^2-Nn-2N+2n)}{N^2(N-1)}=\frac{2n(N-n)(N-2)}{N^2(N-1)}=n\frac{N-n}{N-1}\frac{s}{N}\left(1-\frac{s}{N}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{s>2}$ Használni fogjuk a $\sum^*_{k(s,n,N)}$jelölést abban az értelemben, hogy az összegzés azokra a k pozitív egész indexekre terjed ki, amelyekre $\max\{s,n-(N-s)\} \leqslant k \leqslant \min\{s,n\}$, illetve

használni fogjuk az $\sum^*_{k(s,n,N)} \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$ összefüggést is.

$$G'_\xi(1) = \sum_{k(s,n,N)}^{*} \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} k = \sum_{k(s,n,N)}^{*} \frac{\frac{s}{k}\binom{s-1}{k-1}\binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-(k-1)} k}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} =$$

$$= \frac{sn}{N} \sum_{l(s-1,n-1,N-1)}^{*} \frac{\binom{s-1}{l}\binom{(N-1)-(s-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{sn}{N},$$

$$G''_\xi(1) = \sum_{k(s,n,N)}^{*} \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} k(k-1) = \sum_{k(s,n,N)}^{*} \frac{\frac{s(s-1)}{k(k-1)}\binom{s-2}{k-2}\binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-(k-2)} k}{\frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}} =$$

$$= \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{l(s-2,n-2,N-2)}^{*} \frac{\binom{s-2}{l}\binom{(N-2)-(s-2)}{(n-2)-l}}{\binom{N-2}{n-2}} = \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1) = \frac{sn}{N},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \left(G'_\xi(1)\right)^2 = \frac{s(s-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{sn}{N} - \left(\frac{sn}{N}\right)^2 =$$

$$= \frac{sn}{N} \frac{-sN - nN + N^2 + sn}{N(N-1)} = n\frac{s}{N}\frac{N-n}{N-1}\left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

⊠

13.4.8. A negatív binomiális eloszlás

Független kísérletek sorozatát végezzük. Jelölje ξ azt a számot, hogy egy p valószínűségű A esemény hányadik kísérlet során következik be az r. alkalommal. Ekkor ξ valószínűségi változó eloszlását **r rendű p paraméterű negatív binomiális eloszlás**nak nevezzük. Az A esemény figyelése helyett most is érmét dobunk fel. Két modell is alkalmas a ξ valószínűségi változó eloszlásának, várható értékének és a szórásának a meghatározására.

Az első modell a geometriai eloszlás leírásában szereplő $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, amely megszámlálhatóan végtelen sok Bernoulli-féle valószínűségi mező Descartes szorzata. Könnyű látni, hogy ekkor

$$(\xi = k + r) = \bigcup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_{k+r}\} \times \Omega_{k+r+1} \times \Omega_{k+r+2} \times \ldots \qquad (k = 0, 1, 2),$$

ahol az únió azokra az eseményekre terjed ki, ahol $x_{k+r} = F$, továbbá az $x_1, \ldots, x_{k+r-1}$ között pontosan $r-1$ fej van. Ez az unió $\binom{k+r-1}{r-1}$ páronként diszjunkt tégla uniója. Az unióban

szereplő minden egyes tégla valószínűsége $p^r q^k$, így kapjuk, hogy

$$p_{r+k-1} = \mathbb{P}(\xi = r+k-1) = \binom{r+k-z}{r-1} p^r q^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{13.2}$$

Ebben a modellben a várható érték és a szórásnégyzet nem számolhat könnyen. Ezért inkább egy olyan modellt használunk, amely a ξ eloszlására (13.2) eredményt szolgáltatja.

A ξ leírásának a leírására a

$$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P}_1) \times \cdots \times (\Omega_r, \mathbb{F}_r, \mathbb{P}_r),$$

ahol $(\Omega_i, \mathbb{F}_i, \mathbb{P}_i)$ egy olyan Kolmogorov féle valószínűségi mező, amelyet a geometriai eloszlás leírására használtunk, azaz az $(\Omega_i, \mathbb{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mező megszámlálhatóan végtelen sok Bernoulli-féle valószínűségi mező Descartes szorzata minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén. Minden ilyen $(\Omega_i, \mathbb{F}_i, \mathbb{P}_i)$ valószínűségi mezőn értelmezünk egy $\xi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót a geometriai eloszlás leírásában szereplő módon. Ekkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_r$, amiből a várható értek közvetlenül, a szórásnégyzet a ξ_i valószínűségi változók függetlensége alapján könnyen megkapható:

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1 + \cdots + \xi_r) = \mathbb{E}(\xi_1) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_r) = \frac{r}{p},$$
$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{D}^2(\xi_1 + \cdots + \xi_r) = \mathbb{D}^2(\xi_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(\xi_r) = \frac{rq}{p^2}.$$

Szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy a ξ eloszlása a kétféle modellben ugyanaz, azonban ez egy kis számolással is kiügyeskedhető. Megmutatjuk, hogy a második modell is ugyanazt az eloszlást eredményezi. Most összegyűjtjük a szükséges előismereteket.

A geometriai eloszlásra vonatkozó ismeretek:

- Generátorfüggvénye: $G(z) = \frac{pz}{1-q^z}$,
- Eloszlása: $p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$,
- Kapcsolat az eloszlás és a generátorfüggvény között $\frac{G^{(k)}(0)}{k!} = pq^{k-1}$ minden $k = 1, 2, \dots$ esetén, illetve $G(0) = 0$;
- Szorzatfüggvény magasabb rendű deriváltjai:

$$(f_1(z) \dots f_m(z))^{(n)} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1 \geqslant 0, \dots k_m \geqslant 0}} \binom{n}{k_1, \dots k_m} f^{(k_1)}(z) \dots f^{(k_m)}(z)$$

Ez az összefüggés analógiát mutat a polinomiális tétellel és ahhoz hasonlóan bizonyítható:

– a Newton-Leibnitz szabályból kell kiindulni, mely szerint $(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$,

– ebből n szerinti teljes indukcióval kapjuk a $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x)^{(n-k)} g(x)^{(k)}$,

– amiből m szerinti teljes indukcióval kapjuk a bizonyítandó képletet.

- Az (r,p) paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye $G_\xi(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r$. A generátorfüggvény segítségével meghatározható az eloszlás: $p_{r+k-1} = \mathbb{P}(\xi = r+k-1) = \binom{r+k-z}{r-1} p^r q^{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$.

$$
\begin{aligned}
p_{r+k-1} &= \frac{1}{(r+k-1)!} \left[\left(\frac{pz}{1-qz} \right)^r \right]^{(r+k-1)} \Bigg|_{z=0} = \\
&= \frac{1}{(r+k-1)!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 \geqslant 0, \dots, k_r \geqslant 0}} \binom{r+k-1}{k_1 \dots k_r} G^{(k_1)}(0) \dots G^{(k_r)}(0) = \\
&= \frac{1}{(r+k-1)!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 > 0, \dots, k_r > 0}} \frac{(r+k-1)!}{k_1! \dots k_r!} k_1! p q^{k_1-1} \dots k_r! p q^{k_r-1} = \\
&= p^r q^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=r+k-1 \\ k_1 > 0, \dots, k_r > 0}} 1 = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^{k-1}.
\end{aligned}
$$

13.4.9. Nevezetes diszkrét eloszlás-sorozatok határeloszlásai

20. Tétel. *Ha* (ξ_i) $(i \in \mathbb{Z}_+)$ *hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változók* N_i, s_i, $n_i = n$ *paraméterekkel úgy hogy* $\lim_{i\to\infty} N_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} s_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} \frac{s_i}{N_i} = p$, *akkor* $\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Bizonyítás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_i = k) &= \frac{\binom{s_i}{k}\binom{N_i - s_i}{n-k}}{\binom{N_i}{n}} = \frac{\frac{(s_i)_k}{k!} \frac{(N_i - s_i)_{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(N_i)_n}{n!}} = \\
&= \binom{n}{k} \frac{(s_i)_k (N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i)_{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{(s_i)_k (N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i)_k (N_i - k)_{n-k}},
\end{aligned}
$$

továbbá,

$$
\lim_{i\to\infty} \frac{(s_i)_k}{(N_i)_k} = p^k, \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{(N_i - s_i)_{n-k}}{(N_i - k)_{n-k}} = (1-p)^{n-k}
$$

így valóban teljesül, hogy

$$\lim_{i\to\infty}(\xi_i = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

⊠

21. Tétel. *Megmutatjuk, hogyha* (ξ_i) $(i \in \mathbb{Z}_+)$ *binomiális eloszlású valószínűségi változók* n_i, p_i *paraméterekkel úgy hogy* $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} p_i = 0$, $\lim_{i\to\infty} n_i p_i = \lambda > 0$, *akkor* $\lim_{i\to\infty}\mathbb{P}(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Bizonyítás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\xi_i = k) = \binom{n_i}{k}p_i^k(1-p_i)^{n_i-k} = \frac{(n_i)_k}{k!}p_i^k(1-p_i)^{n_i-k},$$

azonban

$$\lim_{i\to\infty}(n_i)_k(p_i)^k = \lambda^k$$

$$\lim_{i\to\infty}(1-p_i)^{n_i-k} = \lim_{i\to\infty}\left(1-\frac{n_i p_i}{n_i}\right)^{n_i}\lim_{i\to\infty}(1-p_i)^{-k} = e^{-\lambda}$$

így valóban teljesül, hogy

$$\lim_{i\to\infty}\mathbb{P}(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

⊠

13.4.10. Egy abszolút folytonos valószínűségi változónak sok sűrűségfüggvénye van

Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel. Legyen g egy olyan függvény, amely egy majdnem mindenütt egyenlő az f függvénnyel, azaz $\lambda(x \in \mathbb{R}|f(x) \neq g(x)) = 0$ (λ jelöli a Lebesque mértéket), akkor a g is sűrűségfüggvénye a ξ-nek. Így ha a ξ valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, akkor nagyon sok van.

Ha f, g, h olyan függvények, amelyekre f a g-től egy N halmaz pontjaiban különbözik, a g a h-tól egy M halmaz pontjaiban különbözik, akkor az f a h-tól legfeljebb az $N \cup M$ halmaz pontjaiban különbözik. Ha N és M Lebesque-nullmértékűek, akkor az $N \cup M$ halmaz is az, ugyanis a mérték nemnegativitása és szubadditivitása alapján kapjuk, hogy $0 \leqslant \lambda(N \cup M) \leqslant \lambda(N) + \lambda(M) = 0 + 0 = 0$.

13.4.11. A standard normális eloszlásról

Helyettesítéses integrálás két dimenzióban: Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to A$ úgy, hogy $g^{-1}(A) = B$ továbbá

$$x = g_1(u, v), \qquad y = g_2(u, v)$$

$$\int\int_A f(x, y)dydx = \int\int_B f(u, v)\mathcal{J}(u, v)dvdu$$

ahol $\mathcal{J}(u, v)$ az (u, v) pontbeli Jacobi determináns

$$\mathcal{J}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} g_1(u, v) & \dfrac{\partial}{\partial v} g_1(u, v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u} g_2(u, v) & \dfrac{\partial}{\partial v} g_2(u, v) \end{pmatrix}$$

22. Tétel. *A* $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ *módon definiált függvény egy sűrűségfüggvény.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dydx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dydx.$$

Polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk Legyen $A = \mathbb{R}^2$,

$$x = g_1(r, \varphi) = r\cos(\varphi) \qquad y = g_2(r, \varphi) = r\sin(\varphi).$$

Ekkor $B = [0, +\infty[\times[0, 2\pi[$,

$$f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = e^{-\frac{r^2(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)}{2}} = e^{-\frac{r^2}{2}},$$

$$\mathcal{J}(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos(\varphi) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\cos(\varphi) \\ \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin(\varphi) & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r.$$

Így kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dydx = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}d\varphi dr = \\ = \int_0^{+\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}dr = 2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_{r=0}^{r=+\infty} = 2\pi,$$

amivel a bizonyítás teljes. ⊠

13.5. A várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságai