

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

### A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy alkatrész élettartamáról azt tudjuk, hogy jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó 2 év várható értékkel és 2.90 év szórással. Mi a valószínűsége, hogy két ilyen alkatrész közül legalább az egyik az ötödik évben megy tönkre?

2. Számítsa ki a  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók korrelációs együtthatóját, ha a  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változóról tudjuk, hogy  $P(\xi = 36, \eta = 33) = 0.23$ ,  $P(\xi = 36, \eta = 45) = 0.13$  és  $P(\xi = 48, \eta = 33) = 0.29$ . Ismert, hogy  $\xi$  csak a 36 és 48, míg  $\eta$  csak a 33 és 45 értékeket veheti fel.

3. Legyen  $(\xi, \eta)$  sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} A \left( \frac{x}{10.2} + y \right), & \text{ha } 0 < x < 10.2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg  $E(\xi)$  értékét!

4. Tekintsük az alábbi 8 elemű független mintát:

1.8, 5.1, 0.9, 7.0, 9.5, 5.4, 4.4, 5.9.

Számítsa ki mediánt és a medián abszolút eltérést (MAD)!

5. Legyen  $\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) egy független minta. Tudjuk, hogy  $\sigma_0 = 0.09$ ,  $\bar{\xi} = 0.92$ . Szerkesszük 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia-intervallumot  $\mu$  számára!

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

### B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciális eloszlásúnak feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?

2. A  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változóról tudjuk, hogy  $P(\xi = 21, \eta = 20) = 0.14$ ,  $P(\xi = 21, \eta = 45) = 0.11$  és  $P(\xi = 28, \eta = 20) = 0.13$ . Ismert, hogy  $\xi$  csak a 21 és 28, míg  $\eta$  csak a 20 és 45 értékeket veheti fel. Számítsa ki  $D(\xi + \eta)$  értékét!

3. Egy henger milliméterben mért átmérője a  $\xi$  valószínűségi változó, hossza milliméterben mérve az  $\eta$  valószínűségi változó. A  $(\xi, \eta)$  kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye  $f(x, y) = x^2 + Ay^2$ , a  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1.70$  tartományon és 0 egyébként. Számítsa ki az alábbi valószínűséget:

$$P(\xi > 0.5, \eta > 1.53).$$

4. Tekintsük az alábbi 8 elemű független mintát:

$$2.1, 6.3, 1.8, 7.5, 4.2, 5.7, 9.1, 6.0.$$

Számítsa ki az átlagot és a korrigált empirikus szórásnégyzetet.

5. Elfogadjuk-e 0.05 szignifikancia szinten a  $H_0 : \mu_0 = 1$  alaphipotézist, ha a normális eloszlásból származó 8 elemű minta esetén a  $\bar{\xi} = 0.91$ -nek adódott és  $\sigma_0 = 0.1$ .

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

### A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Jelölje  $\xi$  egy alkatrész élettartamát. Ekkor  $\xi \sim \mathcal{N}(m = 2, \sigma^2 = 0.29^2)$ . A feladatot a függetlenség feltételezése mellett oldjuk meg. Legyen  $p \doteq \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5)$ .

A  $p$  értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5) &= \mathbb{P}\left(\frac{4-2}{2.9} \leq \eta \leq \frac{5-2}{2.9}\right) = \\ &= \Phi(1.0345) - \Phi(0.6896) = 0.8485 - 0.7549 = 0.0936. \end{aligned}$$

Az ismeretlen valószínűség a szita formula alapján:  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2 = 0.1784$ .

2. Az ismeretlen  $\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45)$  értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45) = 1 - (0.23 + 0.13 + 0.29) = 0.35$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1 = 33$ | $y_2 = 45$ |      |
|-----------------------|------------|------------|------|
| $x_1 = 36$            | 0.23       | 0.13       | 0.36 |
| $x_2 = 48$            | 0.29       | 0.35       | 0.64 |
|                       | 0.52       | 0.48       |      |

A  $\xi$  eloszlása:

| $x_i$ | $x_1 = 36$ | $x_2 = 48$ |
|-------|------------|------------|
| $p_i$ | 0.36       | 0.64       |

A kapott táblázat alapján az  $\mathbb{E}(\xi)$  és  $\mathbb{D}^2(\xi)$  értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 36 \cdot 0.36 + 48 \cdot 0.64 = 43.68, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 36^2 \cdot 0.36 + 48^2 \cdot 0.64 = 1941.12, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 33.1776, \\ \mathbb{D}(\xi) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{33.1776} = 5.76. \end{aligned}$$

Az  $\eta$  eloszlása:

| $y_i$ | $y_1 = 33$ | $y_2 = 45$ |
|-------|------------|------------|
| $p_j$ | 0.52       | 0.48       |

A kapott táblázat alapján az  $\mathbb{E}(\eta)$  és  $\mathbb{D}^2(\eta)$  értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 33 \cdot 0.52 + 45 \cdot 0.48 = 38.76, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 33^2 \cdot 0.52 + 45^2 \cdot 0.48 = 1538.28, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 35.9424, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{35.9424} = 5.9952.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az  $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta)$  értéket.

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = 36 \cdot 33 \cdot 0.23 + 36 \cdot 45 \cdot 0.13 + 48 \cdot 33 \cdot 0.29 + 48 \cdot 45 \cdot 0.35 = 1699.2$$

A  $\text{cov}(\xi, \eta)$ :

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 6.1632.$$

Az  $r(\xi, \eta)$ :

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{6.1632}{5.76 \cdot 5.9952} = 0.1785.$$

**3.** Az  $A$  konstans értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = A \int_0^{10.2} \int_0^1 \left( \frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= A \int_0^{10.2} \left[ \frac{xy}{10.2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = A \int_0^{10.2} \left( \frac{x}{10.2} + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= A \left[ \frac{x^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=10.2} = A \left( \frac{10.2^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{10.2}{2} \right) = 10.2 \cdot A,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy  $A = \frac{1}{10.2}$ . A keresett várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 x \left( \frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 \left( \frac{x^2}{10.2} + xy \right) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left[ \frac{x^2 y}{10.2} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left( \frac{x^2}{10.2} + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{10.2} \left[ \frac{x^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=10.2} = \\ &= \frac{1}{10.2} \left( \frac{10.2^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{10.2^2}{4} \right) = \frac{7 \cdot 10.2}{12} = 5.95.\end{aligned}$$

**4.** Tekintsük az alábbi 8 elemű független mintát:

$$1.8, 5.1, 0.9, 7.0, 9.5, 5.4, 4.4, 5.9.$$

Számítsa ki mediánt és a medián abszolút eltérést (MAD)!

**5.** Legyen  $\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) egy független minta. Tudjuk, hogy  $\sigma_0 = 0.09$ ,  $\bar{\xi} = 0.92$ . Szerkesszük 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia-intervallumot  $\mu$  számára!

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

## B csoport Javítókulcs

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Jelölje  $\eta$  a várakozási időt percben mérve. Mivel  $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$ , így  $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ).  
A  $\lambda$  paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy  $-5\lambda = \ln(0.22)$ , azaz  $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$ . A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

2. Az ismeretlen  $\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45)$  értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45) = 1 - (0.14 + 0.11 + 0.13) = 0.62$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

| $\xi \backslash \eta$ | $y_1 = 20$ | $y_2 = 45$ |      |
|-----------------------|------------|------------|------|
| $x_1 = 21$            | 0.14       | 0.11       | 0.25 |
| $x_2 = 28$            | 0.13       | 0.62       | 0.75 |
|                       | 0.27       | 0.73       | 1    |

A  $\xi$  eloszlása:

| $\xi$ | $x_1 = 21$ | $x_2 = 28$ |
|-------|------------|------------|
| $p_i$ | 0.25       | 0.75       |

A kapott táblázat alapján az  $\mathbb{E}(\xi)$  és  $\mathbb{D}^2(\xi)$  értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\mathbb{E}(\xi) = 21 \cdot 0.25 + 28 \cdot 0.75 = 26.25,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 21^2 \cdot 0.25 + 28^2 \cdot 0.75 = 698.25,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 9.1875,$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{9.1875} = 3.0311.$$

Az  $\eta$  eloszlása:

| $\eta$ | $y_1 = 20$ | $y_2 = 45$ |
|--------|------------|------------|
| $p_j$  | 0.27       | 0.73       |

A kapott táblázat alapján az  $\mathbb{E}(\eta)$  és  $\mathbb{D}^2(\eta)$  értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 20 \cdot 0.27 + 45 \cdot 0.73 = 38.25, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 20^2 \cdot 0.27 + 45^2 \cdot 0.73 = 1586.25, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 123.1875, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{123.1875} = 11.0990.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az  $\mathbb{E}(\xi\eta)$  értéket.

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = 21 \cdot 20 \cdot 0.14 + 21 \cdot 45 \cdot 0.11 + 28 \cdot 20 \cdot 0.13 + 28 \cdot 45 \cdot 0.62 = 1016.75$$

A  $\text{cov}(\xi, \eta)$  értékének a meghatározása:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 1016.75 - 26.25 \cdot 38.25 = 12.1875.$$

A  $\mathbb{D}(\xi + \eta)$  értékének a meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 9.1875 + 2 \cdot 12.1875 + 123.1875 = 156.75.$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi + \eta)} = \sqrt{156.75} = 26.9452.$$

**3.** ujhoáuhoiéu

**4.** Tekintsük az alábbi 8 elemű független mintát:

$$2.1, 6.3, 1.8, 7.5, 4.2, 5.7, 9.1, 6.0.$$

Számítsa ki az átlagot és a korrigált empirikus szórásnégyzetet.

**5.** Elfogadjuk-e 0.05 szignifikancia szinten a  $H_0 : \mu_0 = 1$  alaphipotézist, ha a normális eloszlásból származó 8 elemű minta esetén a  $\bar{\xi} = 0.91$ -nek adódott és  $\sigma_0 = 0.1$ .