

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy alkatrész élettartamáról azt tudjuk, hogy jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó 2 év várható értékkel és 2.90 év szórással. Mi a valószínűsége, hogy két ilyen alkatrész közül legalább az egyik az ötödik évben megy tönkre?

2. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciális eloszlásúnak feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?

3. Számítsa ki a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatóját, ha a (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 36, \eta = 33) = 0.23$, $P(\xi = 36, \eta = 45) = 0.13$ és $P(\xi = 48, \eta = 33) = 0.29$. Ismert, hogy ξ csak a 36 és 48, míg η csak a 33 és 45 értékeket veheti fel.

4. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} A \left(\frac{x}{10.2} + y \right), & \text{ha } 0 < x < 10.2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg $E(\xi)$ értékét!

5. Legyen $E(\xi) = 1.6$, $D(\xi) = 0.10$. Adjon alsó becslést a $P(1.220 < \xi < 1.980)$ valószínűsége.

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy csomagológép 1 kilogrammos zacskókat tölt. A zacskóba töltött cukor mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 kg várható értékkel és 0.031 kg szórással. A zacskó súlyra nézve első osztályú, ha a súlya 0.95 kg és 1.05 kg közé esik. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenül kiválasztott zacskó közül legalább az egyik első osztályú?
2. Egy TV élettartama ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó 14000 óra átlagos élettartammal. Mi a valószínűsége, hogy egy TV 20000 óránál tovább lesz jó?
3. A (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 21, \eta = 20) = 0.14$, $P(\xi = 21, \eta = 45) = 0.11$ és $P(\xi = 28, \eta = 20) = 0.13$. Ismert, hogy ξ csak a 21 és 28, míg η csak a 20 és 45 értékeket veheti fel. Számítsa ki $D(\xi + \eta)$ értékét!
4. Egy henger milliméterben mért átmérője a ξ valószínűségi változó, hossza milliméterben mérve az η valószínűségi változó. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y) = x^2 + Ay^2$, a $0 < x < 1$, $0 < y < 1.70$ tartományon és 0 egyébként. Számítsa ki az alábbi valószínűséget:
$$P(\xi > 0.5, \eta > 1.53).$$
5. Legalább hányszor kell egy szabályos pénzérmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.77 valószínűséggel 0.37 és 0.63 közé essen?

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Az első megoldás esetén bevezetünk két eseményt. Jelölje A , illetve B azokat az eseményeket, hogy az első zsákocská, illetve a második zsákocská első osztályú. Ezekkel a jelölésekkel: a szita formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{legalább az egyik első osztályú}) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.$$

2. Jelölje η a várakozási időt percben mérve. Mivel $\eta \sim \text{Exp}(\lambda)$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x > 0$).

A λ paraméter meghatározása:

$$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda},$$

amiből kapjuk, hogy $-5\lambda = \ln(0.22)$, azaz $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

3. Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 48, \eta = 45) = 1 - (0.23 + 0.13 + 0.29) = 0.35$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 33$	$y_2 = 45$	
$x_1 = 36$	0.23	0.13	0.36
$x_2 = 48$	0.29	0.35	0.64
	0.52	0.48	

A ξ eloszlása:

x_i	$x_1 = 36$	$x_2 = 48$
p_i	0.36	0.64

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\mathbb{E}(\xi) = 36 \cdot 0.36 + 48 \cdot 0.64 = 43.68,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 36^2 \cdot 0.36 + 48^2 \cdot 0.64 = 1941.12,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 33.1776,$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{33.1776} = 5.76.$$

Az η eloszlása:

y_i	$y_1 = 33$	$y_2 = 45$
p_j	0.52	0.48

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{D}^2(\eta)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 33 \cdot 0.52 + 45 \cdot 0.48 = 38.76, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 33^2 \cdot 0.52 + 45^2 \cdot 0.48 = 1538.28, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 35.9424, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{35.9424} = 5.9952.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta)$ értéket.

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = 36 \cdot 33 \cdot 0.23 + 36 \cdot 45 \cdot 0.13 + 48 \cdot 33 \cdot 0.29 + 48 \cdot 45 \cdot 0.35 = 1699.2$$

A $\text{cov}(\xi, \eta)$:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 6.1632.$$

Az $r(\xi, \eta)$:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{6.1632}{5.76 \cdot 5.9952} = 0.1785.$$

4. Az A konstans értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = A \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= A \int_0^{10.2} \left[\frac{xy}{10.2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = A \int_0^{10.2} \left(\frac{x}{10.2} + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= A \left[\frac{x^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=10.2} = A \left(\frac{10.2^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{10.2}{2} \right) = 10.2 \cdot A,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $A = \frac{1}{10.2}$. A keresett várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 x \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{10.2} + xy \right) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left[\frac{x^2 y}{10.2} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left(\frac{x^2}{10.2} + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{10.2} \left[\frac{x^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=10.2} = \\ &= \frac{1}{10.2} \left(\frac{10.2^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{10.2^2}{4} \right) = \frac{7 \cdot 10.2}{12} = 5.95.\end{aligned}$$

5. A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(\xi) - \varepsilon < \xi < \mathbb{E}(\xi) + \varepsilon) > 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Először meghatározzuk a pontosságot.

$$\begin{aligned}1.6 - \varepsilon_1 = 1.220 &\implies \varepsilon_1 = 0.38, \\1.6 + \varepsilon_2 = 1.980 &\implies \varepsilon_2 = 0.38,\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.38$. A keresett alsó becslés:

$$1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0.1^2}{0.38^2} = 0.9370.$$

Dátum: 2019.

Gyakorlatvezető: Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Jelölje ξ a zacskóba töltött cukorka mennyiségét. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 1\sigma^2 = 0.031^2)$. Ekkor standardizálással kapjuk, hogy

$$p = \mathbb{P}(0.95 \leq \xi < 1.05) = \mathbb{P}\left(\frac{0.95 - 1}{0.031} \leq \eta < \frac{1.05 - 1}{0.031}\right) = \Phi(1.6129) - \Phi(-1.6129) = 2\Phi(1.6129) - 1 = 2 \cdot 0.9463 - 1 = 0.8926.$$

Bevezetünk két eseményt. Jelölje A , illetve B azokat az eseményeket, hogy az első zsákocská, illetve a második zsákocská első osztályú. Ekkor a szita formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{legalább az egyik első osztályú}) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 2p - p^2 = 0.9885.$$

2. Jelölje ξ a TV élettartalmát órában mérve. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = 14000 = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{14000}$ és $\xi \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{14000}\right)$. Mivel $\mathbb{F}_\xi(x) = 1 - e^{-\frac{1}{14000}x}$ tetszőleges $x > 0$ esetén, így a keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \geq 20000) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 20000) = 1 - \mathbb{F}_\xi(20000) = 1 - (1 - e^{-\frac{20000}{14000}}) = e^{-\frac{20}{14}} = 0.2397.$$

3. Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45) = 1 - (0.14 + 0.11 + 0.13) = 0.62$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$	
$x_1 = 21$	0.14	0.11	0.25
$x_2 = 28$	0.13	0.62	0.75
	0.27	0.73	1

A ξ eloszlása:

ξ	$x_1 = 21$	$x_2 = 28$
p_i	0.25	0.75

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\mathbb{E}(\xi) = 21 \cdot 0.25 + 28 \cdot 0.75 = 26.25,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 21^2 \cdot 0.25 + 28^2 \cdot 0.75 = 698.25,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 9.1875,$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{9.1875} = 3.0311.$$

Az η eloszlása:

η	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$
p_j	0.27	0.73

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{D}^2(\eta)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 20 \cdot 0.27 + 45 \cdot 0.73 = 38.25, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 20^2 \cdot 0.27 + 45^2 \cdot 0.73 = 1586.25, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 123.1875, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{123.1875} = 11.0990.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értéket.

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = 21 \cdot 20 \cdot 0.14 + 21 \cdot 45 \cdot 0.11 + 28 \cdot 20 \cdot 0.13 + 28 \cdot 45 \cdot 0.62 = 1016.75$$

A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 1016.75 - 26.25 \cdot 38.25 = 12.1875.$$

A $\mathbb{D}(\xi + \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 9.1875 + 2 \cdot 12.1875 + 123.1875 = 156.75.$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi + \eta)} = \sqrt{156.75} = 26.9452.$$

4. ujhoáuhoiéu

5. A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. Mivel az érme szabályos, $p = \frac{1}{2}$.

$$\left| \frac{k_n}{n} - p \right| < \varepsilon \iff p - \varepsilon \leq \frac{k_n}{n} \leq p + \varepsilon,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \varepsilon_1 &= 0.37 \implies \varepsilon_1 = 0.13, \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_2 &= 0.63 \implies \varepsilon_2 = 0.13,\end{aligned}$$

így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.13$. Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.13^2} \geq 0.77$$

$$n \geq \frac{1}{(1 - 0.77) \cdot 4 \cdot 0.13^2} = 64.3, \text{ azaz } n \geq 64.$$