

Dátum: 2022.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás
Gyakorlat időpontja:
Név:
Neptunkód:
Tankör:

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy gép négyféle cukorkát tölt zsákocskákba. Egy zsákocskába 5 db cukorka kerül. Tartalmuk szerint hány zsákocska készülhet? (Két zsákocska azonos tartalmú, ha ugyanazokat a cukorkaféleségeket tartalmazza azonos összetételben.)

Megoldás: $n = 4$, $k = 5$,

$$C_n^k(i) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.45$, $\mathbb{P}(B) = 0.29$, $\mathbb{P}(C) = 0.36$. Mennyi a valószínűsége, hogy A, B, C közül legalább kettő teljesül?

Megoldás: A szita-formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) &= \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \\ &= 0.45 \cdot 0.29 + 0.45 \cdot 0.36 + 0.29 \cdot 0.36 - 2 \cdot 0.45 \cdot 0.29 \cdot 0.36 = \\ &= 0.3029. \end{aligned} \tag{1}$$

3. $\mathbb{P}(A|B) = 0.45$, $\mathbb{P}(B|A) = 0.29$, $\mathbb{P}(A) = 0.48$. Mennyi a valószínűsége, hogy sem A , sem B nem teljesül?

Megoldás:

$$0.29 = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.48}$$

$$\text{így } \mathbb{P}(A \cap B) = 0.29 \cdot 0.48 = 0.1392$$

$$0.45 = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.29 \cdot 0.48}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\text{így } \mathbb{P}(B) = \frac{0.29 \cdot 0.48}{0.45} = 0.3093$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.48 + \frac{0.29 \cdot 0.48}{0.45} - 0.29 \cdot 0.48$$

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.3499.$$

4. Legyen ξ egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 + \frac{1}{12}, & \text{ha } x \in (0, 6); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a C paraméter értékét és a $\mathbb{P}(1 < \xi < 5)$ valószínűséget.

Megoldás:

$$1 = \int_0^6 \left(Cx^2 + \frac{1}{12} \right) dx = \left[\frac{Cx^3}{3} + \frac{x}{12} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{C6^3}{3} + \frac{6}{12} = \frac{C6^3}{3} + \frac{1}{2}.$$

így

$$C \frac{6^3}{3} = \frac{1}{2} \quad \implies \quad C = \frac{3}{6^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{144}$$

$$\mathbb{P}(1 < \xi < 5) = \left[\frac{1}{144} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x}{12} \right]_{x=1}^{x=5} = \left(\frac{1}{144} \cdot \frac{5^3}{3} + \frac{5}{12} \right) - \left(\frac{1}{144} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{67}{108} = 0.6204.$$

5. Egy rovar élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 3 hét átlagos élettartammal. Mennyi a valószínűsége, hogy két ilyen rovar közül legalább 1 megéri a negyedik hetet?

Megoldás: $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{3})$.

$$p = \mathbb{P}(\xi \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (1 - e^{-\frac{3}{3}}) = e^{-1} = 0.3679.$$

A = egyik rovar megéri a negyedik hetet, B = a másik rovar megéri a negyedik hetet.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 2p - p^2 = 2 \cdot e^{-1} - e^{-2} = 0.6004.$$

Dátum: 2022.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy urnában van 13 piros és 25 fehér golyó. Kihúzzunk egyet, megnézzük és visszaradjuk. Ha a kihúzott golyó piros volt, akkor berakunk az urnába még 5 pirosat, ha fehér volt, akkor még 3 fehér golyót. Ezt követően megint húzzunk egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy másodszorra piros golyót húzzunk?

Megoldás:

A = másodszorra pirosat húzzunk,
 B_1 = előszörre pirosat húzzunk,
 B_2 = másodszorra pirosat húzzunk.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{18}{43} \cdot \frac{13}{38} + \frac{13}{41} \cdot \frac{25}{38} = 0.3518.$$

2. Egy urnában van 8 piros és 25 fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzzunk 5 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül legfeljebb 2 piros?

Megoldás:

$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{\binom{8}{0}\binom{25}{5}}{\binom{33}{5}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{25}{4}}{\binom{33}{5}} + \frac{\binom{8}{2}\binom{25}{3}}{\binom{33}{5}} = \frac{\binom{25}{5} + 8 \cdot \binom{25}{4} + 28 \cdot \binom{25}{3}}{\binom{33}{5}} = 0.9216.$$

3. Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson eloszlású valószínűségi változó 3.2 átlagos értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 szeletet kiválasztva (függetlenséget feltételezve) egyikben sincs 2 szemnél több mazsola?

Megoldás:

$$p = p_0 + p_1 + p_2 = \frac{3.2^0}{0!}e^{-3.2} + \frac{3.2^1}{1!}e^{-3.2} + \frac{3.2^2}{2!}e^{-3.2} = \left(1 + 3.2 + \frac{3.2^2}{2}\right)e^{-3.2} = 0.3799$$

Így a keresett valószínűség: $0.4199^2 = 0.1443$.

4. Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ C(x^2 + 3x), & \text{ha } 0 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } x > 6; \end{cases}$$

Határozzuk meg a C konstans értékét és a $\mathbb{E}(3.1\xi - 6)$ értéket.

Megoldás: Mivel ξ folytonos, így $\mathbb{F}$ folytonos, amiből kapjuk, hogy

$$1 = \mathbb{F}(6) = c(6^2 + 3.6) = 54C \quad \text{azaz} \quad C = \frac{1}{54}.$$

A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin (0, 6); \\ \frac{1}{54}(2x + 3), & \text{ha } x \in (0, 6); \end{cases}$$

A ξ várható értéke:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{54} \int_0^6 (2x^2 + 3x) dx = \frac{1}{54} \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{1}{54} \left(\frac{2 \cdot 6^3}{3} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} \right) = \frac{11}{3} = 3.66677 = \mathbb{E}(\xi)$$

Így

$$\mathbb{E}(3.1\xi - 6) = 3.1\mathbb{E}(\xi) - 6 = 3.1 \cdot \frac{11}{3} - 6 = \frac{161}{30} = 5.3667.$$

5. Egy rovar élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy egy rovar legfeljebb 3 hétig él 0.62. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 2 hétig él?

Megoldás: ξ jelöli egy rovar élettartamát (hetekben mérve). Ekkor $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$0.62 = \mathbb{P}(\xi < 3) = \mathbb{F}_\xi(3) = 1 - e^{-3\lambda}$$

Így $e^{-3\lambda} = 0.38$.

$$\lambda = \frac{\ln(0.38)}{-3} = 0.3225.$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 2) = 1 - \mathbb{F}_\xi(2) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 0.3225}) = e^{-0.645} = 0.5253.$$