

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy csomagoló gép piros, kék és zöld cukorkákat csomagol véletlenszerűen. Egy zacskóba 4 db cukorkát rak.

- Tartalmuk alapján hányféle zsákocska van?
- Véletlenszerűen kiválasztunk egy zsákocskát. Mennyi a valószínűsége, hogy van benne piros?

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31$, $\mathbb{P}(B) = 0.43$, $\mathbb{P}(C) = 0.68$.

- Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan kettő bekövetkezik?
- Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom esemény bekövetkezik?

3. Egy urnában van 8 fehér és 15 piros golyó. Kihúzzunk egy golyót, megnézzük és visszatesszük. Ha fehéret húzzunk, belerakunk az urnába még 13 fehéret, ha pirosat húzzunk, még 28 pirosat. Ezt követően megint húzzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal azonos színű golyót húztunk?

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

B_1 = fehéret húzzunk

B_2 = pirosat húzzunk

A = másodszor pirosat húzzunk.

- A keresett valószínűségeket írjuk fel a A, B_1, B_2 események segítségével.
- Számoljuk ki a valószínűségeket.

4. Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} A(1 - x^2), & \text{ha } x \in (-1, 1); \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel.

- Határozzuk meg az A paraméter értékét.
- Határozza meg a $\mathbb{E}(2\xi + 3)$ várható értékét.

5. Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású, $\lambda = 3.5$ paraméterrel. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(2\xi^2 + 3\xi + 1)$ várható értéket.

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

A csoport

1.

a. $n = 3, k = 4 \quad C_n^{k(i)} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$

b. $n = 2, k = 4 \quad C_n^{k(i)} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$

Így a komplementer esemény valószínűsége alapján: $p = 1 - \frac{5}{15} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31, \mathbb{P}(B) = 0.43, \mathbb{P}(C) = 0.68. \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.69, \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.57, \mathbb{P}(\bar{C}) = 0.32.$

a. $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{C}) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.32 + 0.31 \cdot 0.57 \cdot 0.68 + 0.69 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.3646.$

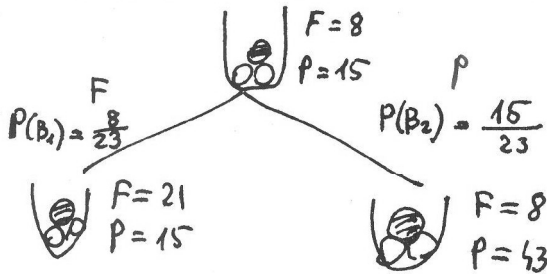
b. $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.0506.$

3.

$B_1 =$ fehérét húzunk

$B_2 =$ pirosat húzunk

$A =$ másodszor pirosat húzunk.



a.

b. $\mathbb{P}(B_1 \cap \bar{A}) + \mathbb{P}(B_2 \cap A) = \mathbb{P}(\bar{A}|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{21}{36} \cdot \frac{8}{23} + \frac{43}{51} \cdot \frac{15}{23} = 0.7528.$

4.

$$f(x) = \begin{cases} A(1-x^2), & \text{ha } x \in (-1, 1); \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

a. $1 = A \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = A \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = A2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = A \cdot \frac{4}{3}.$ Ebből: $A = \frac{3}{4}.$

b. $\mathbb{E}(\xi) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x(1-x^2) dx = \int_{-1}^1 (x-x^3) dx = 0.$ Ebből $\mathbb{E}(2\xi + 3) = 2\mathbb{E}(\xi) + 3 = 3.$

5. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda = 3.5).$ $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3.5}$ $\mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{3.5^2}$ Így kapjuk, hogy $\frac{1}{3.5^2} = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \frac{1}{3.5^2}.$ Ebből $\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{3.5^2}.$ Így $\mathbb{E}(2\xi^2 + 3\xi + 1) = 2 \cdot \frac{2}{3.5^2} + 3 \cdot \frac{1}{3.5} + 1 = \frac{107}{49} = 2.1837.$

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

B csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy csomagoló gép piros, kék és zöld cukorkákat csomagol véletlenszerűen. Egy zacskóba 6 db cukorkát rak.

- Tartalmuk alapján hányféle zsákocska van?
- Véletlenszerűen kiválasztunk egy zsákocskát. Mennyi a valószínűsége, hogy van benne piros?

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.38$, $\mathbb{P}(B) = 0.46$, $\mathbb{P}(C) = 0.13$.

- Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közül legalább kettő bekövetkezik?
- Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy következik be közülük?

3. Egy urnában van 8 fehér és 15 piros golyó. Kihúzzunk egy golyót, megnézzük és visszatesszük. Ha fehéret húzzunk, belerakunk az urnába még 13 fehéret, ha pirosat húzzunk, még 28 pirosat. Ezt követően megint húzzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal ellentétes színű golyót húztunk?

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

B_1 = fehéret húzzunk

B_2 = pirosat húzzunk

A = másodszor pirosat húzzunk.

- A keresett valószínűségeket írjuk fel a A, B_1, B_2 események segítségével.
- Számoljuk ki a valószínűségeket.

4. Legyen ξ egy abszolút folytonos valószínűségi változó

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -2; \\ B\left(\frac{x}{2} + 1\right), & \text{ha } x \in [-2, 2]; \\ 1, & \text{ha } x > 2; \end{cases}$$

eloszlásfüggvénnyel.

- Határozzuk meg az B paraméter értékét.
- Határozza meg a $\mathbb{E}(2\xi + 3)$ várható értékét.

5. Egy ξ valószínűségi változó Poisson eloszlású, 1.6 várható értékkel. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(2\xi^2 + 3\xi + 1)$ várható értéket.

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

B csoport

1.

a. $n = 3, k = 6 \quad C_n^{k(i)} = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$

b. $n = 2, k = 6 \quad C_n^{k(i)} = \binom{2+6-1}{6} = \binom{7}{6} = 7$

Így a komplementer esemény valószínűsége alapján: $p = 1 - \frac{7}{28} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.38, \mathbb{P}(B) = 0.46, \mathbb{P}(C) = 0.13. \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.62, \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.54, \mathbb{P}(\bar{C}) = 0.87.$

a. $\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.38 \cdot 0.46 + 0.38 \cdot 0.13 + 0.46 \cdot 0.13 - 2 \cdot 0.38 \cdot 0.46 \cdot 0.13 = 0.2386.$

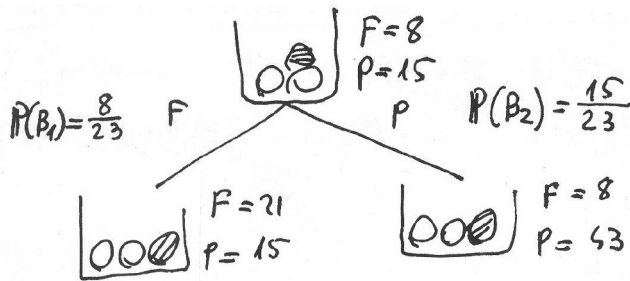
b. $1 - 0.2386 = 0.7614.$

3.

$B_1 =$ fehéret húzunk

$B_2 =$ pirosat húzunk

$A =$ másodszor pirosat húzunk.



a.

b. $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(\bar{A}|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{15}{36} \cdot \frac{8}{23} + \frac{8}{51} \cdot \frac{15}{23} = 0.2472.$

4.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -2; \\ B\left(\frac{x}{2} + 1\right), & \text{ha } x \in [-2, 2]; \\ 1, & \text{ha } x > 2; \end{cases}$$

Az F a 2-höz folytonosan csatlakozik. $1 = F(2) = 2B$. Így $B = \frac{1}{2}$. $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x+2}{4}$ ($x \in [-2, 2]$). Már látszik, hogy $\xi \sim U[-2, 2]$. Így $\mathbb{E}(\xi) = 0$. Azonban kiintegrálni sem nehéz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha } x \in [-2, 2]; \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Így $\mathbb{E}(\xi) = \int_{-2}^2 x \cdot \frac{1}{4} dx = 0$. mivel az integrandus páratlan és a tartomány szimmetrikus az origóra. Így $\mathbb{E}(2\xi + 3) = 2\mathbb{E}(\xi) + 3 = 3.$

5. $\xi \sim \text{Pois}(\lambda = 1.6)$. Ekkor $\mathbb{E}(\xi) = 1.6 \quad \mathbb{D}^2(\xi) = 1.6$ Így kapjuk, hogy $1.6 = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - 1.6^2$. Ebből $\mathbb{E}(\xi^2) = 1.6 + 1.6^2 = 4.16$. $\mathbb{E}(2\xi^2 + 3\xi + 1) = 2\mathbb{E}(\xi^2) - 3\mathbb{E}(\xi) + 1 = 2(1.6 + 1.6^2) - 3 \cdot 1.6 + 1 = 4.52$

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

C csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Van egy piros és egy kék dobókockánk. A piros dobókocka lapjaira az 1, 3, 5, 7, 9, 11; a kék dobókocka lapjaira 2, 4, 6, 8, 10, 12 számok vannak írva.

- Mennyi a piros és mennyi a kék dobókockával dobott szám várható értéke?
- Mennyi a piros és a kék dobókockával dobott számok összegének várható értéke?

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31$, $\mathbb{P}(B) = 0.43$, $\mathbb{P}(C) = 0.68$.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább egy bekövetkezik?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindhárom esemény bekövetkezik?

3. Egy pakli magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzunk két lapot. (Ezek nem kerülnek vissza a pakliba.) Ezután megint kihúzunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezúttal pirosat húzunk?

4. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - x^2), & \text{ha } x \in (0, 4); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Határozzuk meg az C paraméter értékét.
- Mennyi a valószínűsége, hogy ξ beleesik a $(0, 3)$ intervallumba?

5. Egy buszjáratra váró várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább 2 percet kell várni 0.92. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 4 percet várunk a buszra?

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

C csoport

1. ξ jelöli a hagyományos dobókockával dobott számot. $\mathbb{E}(\xi) = 3.5$. ξ_1 jelöli a piros, ξ_2 a kék kockával dobott számot.

a. $\xi_1 = 2\xi - 1$. Így $\mathbb{E}(\xi_1) = 2 \cdot 3.5 - 1 = 6$. $\xi_2 = 2\xi$. Így $\mathbb{E}(\xi_2) = 7$.

b. $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = 6 + 7 = 13$.

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31$, $\mathbb{P}(B) = 0.43$, $\mathbb{P}(C) = 0.68$.

a. Legalább egy bekövetkezik. $\mathbb{P}((A \cap B \cup C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 + 0.43 + 0.68 - 0.31 \cdot 0.43 - 0.31 \cdot 0.68 + 0.43 \cdot 0.68 + 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.8741$.

b. $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.0906$.

3.

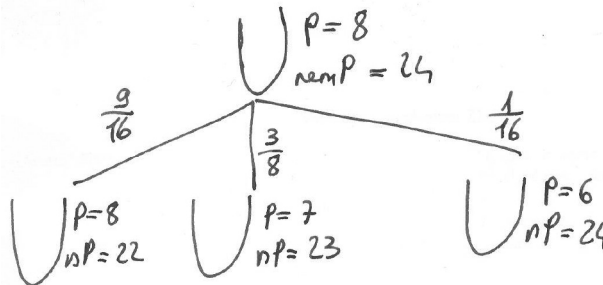
B_0 = a piros lapok száma 0

B_1 = a piros lapok száma 1

B_2 = a piros lapok száma 2

$\mathbb{P}(\text{pirosat húzunk}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. $\xi \sim B(n=2, p=\frac{1}{4})$

$\mathbb{P}(B_0) = \binom{2}{0} \binom{1}{4}^0 \binom{3}{4}^2 = \frac{9}{16}$, $\mathbb{P}(B_1) = \binom{2}{1} \binom{1}{4}^1 \binom{3}{4}^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(B_2) = \binom{2}{2} \binom{1}{4}^2 \binom{3}{4}^0 = \frac{1}{16}$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_0)\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{8}{30} \cdot \frac{9}{16} + \frac{7}{30} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{30} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.

4. $1 = C \int_0^4 (4x - x^2) dx = C \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=4} = C \left(\frac{4^3}{2} - \frac{4^3}{3} \right) = \frac{32}{2} \cdot C$ Így $C = \frac{3}{32}$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{3}{32} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right), & \text{ha } 0 < x \leq 4; \\ 1, & \text{ha } x > 4; \end{cases}$$

$\mathbb{P}(\xi \in (0, 3)) = F_\xi(3) - F_\xi(0) = \frac{3}{32} \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} \right) = \frac{27}{32} = 0.8438$.

5. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$.

a. $\mathbb{P}(\xi > 2) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 2) = e^{-2\lambda} = 0.92$. $\lambda = \frac{\ln(0.92)}{-2} = 0.0416$.

b. $\mathbb{P}(\xi < 4) = 1 - e^{-4\lambda} = 1 - e^{-4 \cdot \frac{\ln(0.92)}{-2}} = 1 - e^{\ln(0.92^2)} = 1 - 0.92^2 = 0.1536$.

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

D csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Van egy piros és egy kék dobókockánk. A piros dobókocka lapjaira az 7, 8, 9, 10, 11, 12; a kék dobókocka lapjai 1, 3, 5, 7, 9 számok vannak írva.

- Mennyi a piros és mennyi a kék dobókockával dobott szám várható értéke?
- Mindkét dobókockával dobunk, majd a pirossal dobott számból levonjuk a késsel dobott számot. Mennyi az így kapott szám várható értéke?

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31$, $\mathbb{P}(B) = 0.43$, $\mathbb{P}(C) = 0.68$.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül legfeljebb egy bekövetkezik?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindhárom esemény bekövetkezik?

3. Egy pakli magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzzunk 10 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között

- legfeljebb 2 piros lap van?
- legalább 3 piros lap van?

4. Legyen a ξ abszolút konvergens valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2; \\ D(x-2)^2, & \text{ha } 2 < x \leq 6 \\ 1, & \text{ha } 6 < x; \end{cases}$$

- Határozza meg a D paraméter értékét!
- Mennyi a valószínűsége, hogy ξ nem esik bele a $(2, 5)$ intervallumba?

5. Egy buszjáratra váró várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 6 percet kell várni 0.8. Átlagosan mennyit kell várunk a buszra?

Dátum: 2021.

Gyakorlatvezető: Dr. Glavosits Tamás

D csoport

1. ξ jelöli a hagyományos dobókockával dobott számot. $\mathbb{E}(\xi) = 3.5$. ξ_1 jelöli a piros, ξ_2 a kék kockával dobott számot. $\mathbb{E}(\xi) = 3.5$. $\xi_1 = \xi + 6$, $\xi_2 = 2\xi - 1$.

a. $\mathbb{E}(\xi_1) = 3.5 + 6 = 9.5$, $\mathbb{E}(\xi_2) = 2 \cdot 3.5 - 1 = 6$.

b. $\mathbb{E}(\xi_1 - \xi_2) = 9.5 - 6 = 3.5$.

2. Az A, B, C események teljesen függetlenek. $\mathbb{P}(A) = 0.31$, $\mathbb{P}(B) = 0.43$, $\mathbb{P}(C) = 0.68$.

a. Legfeljebb egy bekövetkezik $= 1 - \mathbb{P}(\text{legalább 2})$.

$$\mathbb{P}(\text{legalább 2}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 \cdot 0.43 + 0.31 \cdot 0.68 + 0.43 \cdot 0.68 - 2 \cdot 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.4552.$$

Így $\mathbb{P}(\text{legfeljebb 1}) = 0.5448$.

b. $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.31 \cdot 0.43 \cdot 0.68 = 0.0906$.

3. ξ a kihúzott piros lapok száma, ξ hipergeometrikus eloszlás. $N = 32$, $s = 8$, $N - x = 24$, $n = 10$.

a. $\mathbb{P}(\text{legfeljebb 2 piros}) = \left(\frac{\binom{8}{0}\binom{24}{10}}{\binom{32}{10}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{9}}{\binom{32}{10}} + \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{8}}{\binom{32}{10}} \right) = 0.5118$

b. $\mathbb{P}(\text{legalább 3 piros}) = 1 - \mathbb{P}(\text{legfeljebb 2 piros}) = 1 - 0.5118 = 0.4882$

4. $\mathbb{F}$ folytonos $D(6 - 2)^2 = 1$. Így $16D = 1$, azaz $D = \frac{1}{16}$.

$$\mathbb{P}(\xi \in (2, 5)) = \mathbb{F}_\xi(5) - \mathbb{F}_\xi(2) = \mathbb{F}_\xi(5) = \frac{1}{16}(5 - 2)^2 = \frac{9}{16}, \text{ így } \mathbb{P}(\xi \notin (2, 5)) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0.4275.$$

5. $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$.

a. $0.8 = \mathbb{P}(\xi < 6) = \mathbb{P}_\xi(6) = 1 - e^{-6\lambda}$. Így $e^{-6\lambda} = 0.2$, $\lambda = \frac{\ln(0.2)}{-6} = 0.2682$.

b. $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.2682} = 3.7280$.