

Dátum:

Gyakorlatvezető:

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

A csoport

A végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítve kérem!

1. Egy alkatrész élettartamáról azt tudjuk, hogy jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó 2 év várható értékkel és 2.90 év szórással. Mi a valószínűsége, hogy két ilyen alkatrész közül legalább az egyik az ötödik évben megy tönkre?

2. A (ξ, η) valószínűségi változóról tudjuk, hogy $P(\xi = 21, \eta = 20) = 0.14$, $P(\xi = 21, \eta = 45) = 0.11$ és $P(\xi = 28, \eta = 20) = 0.13$. Ismert, hogy ξ csak a 21 és 28, míg η csak a 20 és 45 értékeket veheti fel. Számítsa ki $D(\xi + \eta)$ értékét!

3. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} A \left(\frac{x}{10.2} + y \right), & \text{ha } 0 < x < 10.2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg $E(\xi)$ értékét!

4. Tekintsük az alábbi 8 elemű független mintát:

1.8, 5.1, 0.9, 7.0, 9.5, 5.4, 4.4, 5.9.

Számítsa ki az alábbi statisztikákat: átlag, korrigált empirikus szórásnégyzet, medián, medián abszolút eltérés (MAD)!

5. Legyen $\xi_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) egy független minta. Tudjuk, hogy $\sigma_0 = 0.09$, $\bar{\xi} = 0.92$. Szerkesszük 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia-intervallumot μ számára!

Dátum:

Gyakorlatvezető:

Gyakorlat időpontja:

Név:

Neptunkód:

Tankör:

A csoport

1. Megoldás. Jelölje ξ egy alkatrész élettartamát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(m = 2, \sigma^2 = 0.29^2)$. A feladatot a függetlenség feltételezése mellett oldjuk meg. Legyen $p \doteq \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5)$.

A p értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(4 \leq \xi < 5) &= \mathbb{P}\left(\frac{4-2}{2.9} \leq \eta \leq \frac{5-2}{2.9}\right) = \\ &= \Phi(1.0345) - \Phi(0.6896) = 0.8485 - 0.7549 = 0.0936. \end{aligned}$$

Az ismeretlen valószínűség a szita formula alapján: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2 = 0.1784$.

2. Megoldás. Az ismeretlen $\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45)$ értékét a megadott adatokból

$$\mathbb{P}(\xi = 28, \eta = 45) = 1 - (0.14 + 0.11 + 0.13) = 0.62$$

módon számolható ki. Foglaljuk táblázatba az együttes és a marginális eloszlásokat.

$\xi \setminus \eta$	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$	
$x_1 = 21$	0.14	0.11	0.25
$x_2 = 28$	0.13	0.62	0.75
	0.27	0.73	1

A ξ eloszlása:

ξ	$x_1 = 21$	$x_2 = 28$
p_i	0.25	0.75

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{D}^2(\xi)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 21 \cdot 0.25 + 28 \cdot 0.75 = 26.25, \\ \mathbb{E}(\xi^2) &= 21^2 \cdot 0.25 + 28^2 \cdot 0.75 = 698.25, \\ \mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 9.1875, \\ \mathbb{D}(\xi) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{9.1875} = 3.0311. \end{aligned}$$

Az η eloszlása:

η	$y_1 = 20$	$y_2 = 45$
p_j	0.27	0.73

A kapott táblázat alapján az $\mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{D}^2(\eta)$ értékek a tanult módon könnyen számolhatók:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= 20 \cdot 0.27 + 45 \cdot 0.73 = 38.25, \\ \mathbb{E}(\eta^2) &= 20^2 \cdot 0.27 + 45^2 \cdot 0.73 = 1586.25, \\ \mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 123.1875, \\ \mathbb{D}(\eta) &= \sqrt{\mathbb{D}^2(\eta)} = \sqrt{123.1875} = 11.0990.\end{aligned}$$

Az együttes eloszlás-táblázatból kiszámoljuk az $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta)$ értéket.

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = 21 \cdot 20 \cdot 0.14 + 21 \cdot 45 \cdot 0.11 + 28 \cdot 20 \cdot 0.13 + 28 \cdot 45 \cdot 0.62 = 1016.75$$

A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 1016.75 - 26.25 \cdot 38.25 = 12.1875.$$

A $\mathbb{D}(\xi + \eta)$ értékének a meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 9.1875 + 2 \cdot 12.1875 + 123.1875 = 156.75.$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi + \eta)} = \sqrt{156.75} = 26.9452.$$

3. Megoldás. Az A konstans értékének a meghatározása:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = A \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= A \int_0^{10.2} \left[\frac{xy}{10.2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = A \int_0^{10.2} \left(\frac{x}{10.2} + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= A \left[\frac{x^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=10.2} = A \left(\frac{10.2^2}{2 \cdot 10.2} + \frac{10.2}{2} \right) = 10.2 \cdot A,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $A = \frac{1}{10.2}$. A keresett várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 x \left(\frac{x}{10.2} + y \right) dy dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{10.2} + xy \right) dy dx = \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left[\frac{x^2 y}{10.2} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{1}{10.2} \int_0^{10.2} \left(\frac{x^2}{10.2} + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{10.2} \left[\frac{x^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=10.2} = \\ &= \frac{1}{10.2} \left(\frac{10.2^3}{3 \cdot 10.2} + \frac{10.2^2}{4} \right) = \frac{7 \cdot 10.2}{12} = 5.95.\end{aligned}$$

4. Megoldás. $\boxed{\bar{\xi} = 5}$, $m_2 = 31.58$, $s_n^2 = m_2 - \bar{\xi}^2 = 6.58$, $s_n^{*2} = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{8}{7} \cdot 6.58 = 7.52$, $\boxed{s_n^{*2} = 7.52}$

Rendezett minta: 0.9, 1.8, 4.4, $\boxed{5.1, 5.4}$, 5.9, 7.0, 9.5

med = $\frac{5.1+5.4}{2} = 5.25$, $\boxed{\text{med} = 5.25}$

$|\xi_i^* - \text{med}|$: 4.35, 3.45, 0.85, 0.15, 0.15, 0.65, 1.75, 4.25

MAD = $\frac{0.85+1.75}{2} = 1.3$, $\boxed{\text{MAD} = 1.3}$

5. Megoldás.

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$$

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < u_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$0.92 - \frac{0.09 \cdot 1.960}{\sqrt{8}} < \mu < 0.92 + \frac{0.09 \cdot 1.960}{\sqrt{8}},$$

$$0.8576 < \mu < 0.9824.$$