Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

9. gyakorlat

Egyenlőtlenségek, a nagy számok törvényei központi határeloszlás tétel

1. Csebisev egyenlőtlenség

1. Feladat

Legyen $\mathbb{E}(\xi) = 1.6$, $\mathbb{D}(\xi) = 0.1$.
Adjon alsó becslést a $\mathbb{P}(0.220 < \xi < 1.980)$ valószínűségre.

1. Feladat megoldása

A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(\xi) - \varepsilon < \xi < \mathbb{E}(\xi) + \varepsilon) > 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Először meghatározzuk a pontosságot.

$$\begin{aligned} 1.6 - \varepsilon_1 &= 1.220 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_1 = 0.38, \\ 1.6 + \varepsilon_2 &= 1.980 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 = 0.38, \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.38$. A keresett alsó becslés:

$$1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0.1^2}{0.38^2} = 0.9370.$$

2. Bernoulli-féle nagy számok törvénye

2. Feladat

Legalább hányszor kell egy szabályos pénzérmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.7, valószínűséggel 0.37 és 0.63 közé essen?

2. Feladat megoldása

A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. Mivel az érme szabályos, $p = \frac{1}{2}$.

$$\left|\frac{k_n}{n} - p\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad p - \varepsilon \leqslant \frac{k_n}{n} \leqslant p + \varepsilon,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} - \varepsilon_1 = 0.37 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_1 = 0.13,$$
$$\frac{1}{2} + \varepsilon_2 = 0.63 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 = 0.13,$$

így kapjuk, hogy $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.13$. Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.13^2} \geqslant 0.77$$

$$n \geqslant \frac{1}{(1-0.77) \cdot 4 \cdot 0.13^2} = 64.3, \text{ azaz } n \geqslant 64.$$

3. Feladat

Legalább hány elemű mintát kell vennünk, ha a visszatevéses mintavételnél a selejtarányt 0.11 pontossággal (legfeljebb ennyi eltéréssel) és 0.83 megbízhatósággal akarjuk becsülni?

3. Feladat megoldása

A Bernoulli-féle nagy számok törvényét alkalmazzuk. $\varepsilon = 0.11$. A megbízhatóság:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geqslant 0.83 \qquad \Longrightarrow \qquad n \geqslant \frac{1}{(1-0.83)\cdot 4 \cdot 0.11^2} = 121.5.$$

Így kapjuk, hogy $n \geqslant 122$.

3. Moivre-Laplace tétel

4. Feladat

Egy urna 123 golyót tartalmaz, melyek közül 103 piros és 20 fehér. Visszatevéssel kihúzunk 600 golyót. Adjon közelítést annak a valószínűségére, hogy a kihúzott piros golyók száma az $[478, 526]$ intervallumba esik.

4. Feladat megoldása

Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim B\left(n = 600, p = \frac{103}{123}\right)$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\xi \in [478, 526]) = \sum_{k=478}^{526} \binom{600}{k} \left(\frac{103}{123}\right)^k \left(\frac{20}{123}\right)^{600-k}$$

módon számolható. Ez a szumma azonban nem számolható könnyen, mivel túl sok tagból áll és a tagokban nagyon nagy számokat kell nagyon kicsi számokkal szorozni. Helyette a Moivre-Laplace tételt alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(478 \leqslant \xi \leqslant 526) \approx \Phi\left(\frac{526 - 600 \cdot \frac{103}{123} + \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) - \Phi\left(\frac{478 - 600 \cdot \frac{103}{123} - \frac{1}{2}}{\sqrt{600 \cdot \frac{103}{123} \cdot \frac{20}{123}}}\right) =$$

$$= \Phi(2.6620) + \Phi(2.7592) - 1 = 0.996 + 0.9971 - 1 = 0.9932.$$

5. Feladat

Egy célpontra 200 lövést adnak le. Minden lövés 0.4 valószínűséggel talál. Milyen határok közé fog esni 90%-os valószínűséggel a találatok száma. Oldja meg a feladatot a nagy számok törvénye és a Moivre Laplace tétel segítéségével egyaránt.

5. Feladat megoldása

A feladatot kétféle módon oldjuk meg.

- **A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján** kapjuk, hogy
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}.$$
Mivel $p = 0.4$, $n = 200$, így az
$$1 - \frac{0.4 \cdot 0.6}{\varepsilon^2 200} = 0.09$$
egyenlőtlenségből kapjuk, hogy
$$\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{(1-0.9) \cdot 200}} = 0.0363.$$
Így k_n a találatok száma $-\varepsilon \leqslant \frac{k_n}{n} - p \leqslant \varepsilon$, amiből kapjuk hogy a találatok száma
$$\underbrace{(-\varepsilon + p) \cdot n}_{72} \leqslant k_n \leqslant \underbrace{(\varepsilon + p) \cdot n}_{88} \quad \text{intervallumba fog esni.}$$

5. Feladat megoldása, folytatás

- A feladat a **A Moivre-Laplace tétel** segítségével: Tudjuk, hogy a k_n relatív gyakoriság $k_{200} \sim \mathcal{B}(n = 200, p = 0.4)$ eloszlású valószínűségi változó, így $\mathbb{E}(k_{200}) = np = 200 \cdot 0.4 = 80$, $\mathbb{D}(k_n) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{48}$. Szimmetrikus intervallumot nézünk. Legyen $a = 80 - r$, $b = 80 + r$.
Ekkor a Moivre-Laplace tétel alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(a \leqslant k_{200} \leqslant b) \sim \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-r}{\sqrt{48}}\right) = 2\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{48}}\right) - 1 > 0.9.$$

Így kapjuk, hogy $\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{6.9}}\right) > 0.9$, visszakeresve $\frac{r}{\sqrt{48}} \geqslant 1.28$, így $r \geqslant 12$. Tehát $a = 80 - r = 71$, $b = 80 + r = 89$, azaz $71 < k_n < 89$.

4. Központi határeloszlás tétel

6. Feladat

Bizonyos üzletekben a 11 és 12 óra között megjelenő vevők száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 30$ várható értékkel. 100 ilyen üzletet figyelembe véve mekkora annak a valószínűsége, hogy a 11 és 12 óra közötti időben az összes megjelent vevők száma 3000 és 3100 közé esik.

6. Feladat megoldása

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{100}$ független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\lambda = 30$ várható értékkel. Legyen
$S_{100} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}$. Ekkor a közös várható érték $m = 30$, a közös szórásnégyzet $\sigma^2 = 30$.
A közös határeloszlás tétel alapján kapjuk, hogy
$\eta := \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(3000 \leqslant \sum_{k=1}^{100} \xi_k \leqslant 3100\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{3000 \cdot -100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{30}} \leqslant \eta \leqslant \frac{3100 \cdot -100 \cdot 30}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{30}}\right) = \\
&= \Phi(1.83) - \Phi(0) = 0.964 - 0.5 = 0.464.
\end{aligned}$$

Vége a 9. gyakorlatnak