

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

8. gyakorlat

Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók, Többdimenziós valószínűségi vektorváltozók

1. Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

Függetlenség és korrelálatlanság

1. Feladat

A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + x^3 y - xy^3), & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg a marginálisok eloszlását függetlenség és korrelálatlanság szempontjából.

1. Feladat megoldása

- Marginális eloszlások:

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 + x^3 y - xy^3) dy = \\ &= \frac{1}{4} \left[y + x^3 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ha $x \in [-1, 1]$, így kapjuk, hogy

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in]-1, 1[; \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így kapjuk, hogy $\xi \sim U[-1, 1]$, $\eta \sim U[-1, 1]$

1. Feladat megoldása, folytatás

- **A kovariancia meghatározása**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dydx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} xy(1+x^3y-xy^3)dydx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (xy+x^4y^2-x^2y^4)dydx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left[x\frac{y^2}{2} + x^4\frac{y^3}{3} - x^2\frac{y^5}{5} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3}\frac{x^5}{5} - \frac{2}{5}\frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.\end{aligned}$$

Így

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

- **Korrelátlanság és függetlenség** Látható, hogy ξ és η korrelátlatlanok, de nem függetlenek.

2. Feladat

Határozza meg a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó esetén az integráló tényezőt (azaz a C paraméter értékét), a marginálisok eloszlásfüggvényeit és várható értékét, továbbá a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét, ha a (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

b. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C(xy + 1), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

c. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C(xy + x), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. b Feladat megoldása

Legyen $T = [0, 1] \times [0, 2]$. ($f(x, y) = C(xy + 1)$, $(x, y \in T)$).

- A C konstans értéke:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + 1) dy \right) dx = \\ &= C \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= C \int_0^1 (2x + 2) dx = C [x^2 + 2x]_{x=0}^{x=1} = 3C \quad \implies \quad C = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- A marginálisok eloszlásfüggvényei:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 (xy + 1) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} = \\ &= \frac{2}{3}(x + 1) \quad (x \in [0, 1]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (xy + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2 y}{2} + x \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}y + 1 \right) = \frac{1}{6}(y + 2) \quad (y \in [0, 2]). \end{aligned}$$

- A marginálisok várható értékei:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(x+1) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{9};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 y(y+2) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{13}{18}.\end{aligned}$$

- A kovariancia értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 xy(xy+1) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 y^2 + xy) dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^3}{3} + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{8}{3} x^2 + 2x \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{8}{3} \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{9} + 1 \right) = \frac{17}{27};\end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{17}{27} - \frac{5}{9} \cdot \frac{13}{18} = \frac{37}{162} = 0.2284.$$

2. c Feladat megoldása

$(f(x, y) = xy + x, (x, y) \in T)$.

Mivel az $f(x, y) = (C_1x)(C_2(y + 1))$ és az együttes eloszlásfüggvény tartója (halmaz, ahol nem tűnnek el) egy téglá, így a ξ és η függetlenek.

- A marginálisok eloszlásfüggvényei:

$$f_1(x) = \begin{cases} C_1x, & \text{ha } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} C_2(y + 1), & \text{ha } y \in [0, 2]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = C_1 \int_0^1 x dx = C_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} C_1,$$

Így $C_1 = 2$.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) dy = C_2 \int_0^2 (y + 1) dy = C_2 \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} = 6C_2,$$

így $C_2 = \frac{1}{6}$.

2. c Feladat megoldása, folytatás

- **A marginálisok várható értékei:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = 2 \int_0^1 x \cdot x dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3};$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 y(y+1) dy = \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + y) dy = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

- **A kovariancia:** $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, mivel ξ és η függetlenek, tehát korrelálatlanok.

3. Feladat

Határozza meg a k konstans értékét és a marginálisok eloszlását, ha az együttes sűrűségfüggvény

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxye^{-k(x^2+y^2)}, & \text{ha } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3. Feladat megoldása

A ξ és η marginális eloszlások azonos eloszlásúak és függetlenek, mivel

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \left(xe^{-kx^2}\right) \left(ye^{-ky^2}\right) \quad (x > 0, y > 0),$$

és az együttes eloszlásfüggvény tartója téglá.

- a k konstans meghatározása:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2k} \int_0^{+\infty} (-2kx)e^{-kx^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2k} \left[e^{-kx^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{2k} \cdot (-1) = \frac{1}{2k} \quad \iff \quad k = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- a marginális eloszlások:

$$f_1(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{ha } y > 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. Feladat

Határozza meg a C paraméter értékét a $\mathbb{P}(\xi < 1, \eta > 1)$ valószínűséget és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét, ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

a. •

$$f(x, y) = \begin{cases} C \left(x + \frac{y}{2} \right), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. Feladat megoldása

Az a. feladat együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_B(x, y) = \begin{cases} C_B \left(x + \frac{y}{B} \right), & \text{ha } x \in [0, 1], y \in [0, B]; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A C_B konstans értékének a meghatározása

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = C_B \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\ &= C_B \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = C_B \int_0^1 \left(Bx + \frac{B}{2} \right) dx = \\ &= C_B \left[\frac{Bx^2}{2} + \frac{Bx}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = BC_B \quad \implies \quad C_B = \frac{1}{B}. \end{aligned}$$

4. Feladat megoldása, folytatás

- A marginálisok várható értékeinek meghatározása:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_B(x, y) dy dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B x \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x^2 + \frac{xy}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(Bx^2 + \frac{B}{2}x \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_B(x, y) dy dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B y \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(xy + \frac{y^2}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3B} \right]_{y=0}^{y=B} dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\frac{B^2x}{2} + \frac{B^2}{3}x \right) dx = B \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &= B \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{12}B.\end{aligned}$$

4. Feladat megoldása, folytatás

- A kovariancia értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_B \cdot \eta_B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dy dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B xy \left(x + \frac{y}{B} \right) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\int_0^B \left(x^2 y + \frac{xy^2}{B} \right) dy \right) dx = \frac{1}{B} \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3B} \right]_{x=0}^{x=B} dx = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^1 \left(\frac{B^2 x^2}{2} + \frac{B^2}{3} \right) dx = B \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &= B \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = B \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} B;\end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi_B, \eta_B) = \mathbb{E}(\xi_B \cdot \eta_B) - \mathbb{E}(\xi_B)\mathbb{E}(\eta_B) = \frac{1}{2}B - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{12}B = -\frac{5}{18}B.$$

2. Többdimenziós egyenletes eloszlás

5. Feladat

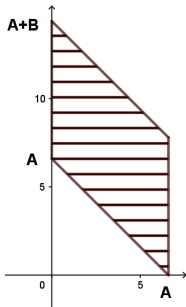
A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{ha } 0 < x < 6.6, 6.6 - x < y < 14.4 - x; \\ 0, & \text{egyébként .} \end{cases}$$

Határozza meg a C konstans értékét, a marginálisok eloszlásait és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ értéket.

5. Feladat megoldása

Oldjuk meg a feladatot paraméteresen. Az A és B paraméterek értékei: $A = 6.6$, $B = 7.8$.



- **A C konstans értéke:** $C = \frac{1}{T}$, ahol T a paralelogramma területe. Így kapjuk, hogy

$$C = \frac{1}{AB} = \frac{1}{6.6 \cdot 7.8} = \frac{1}{51.48} = 0.0194.$$

5. Feladat megoldása, folytatás

- **A marginálisok várható értékei:** az $(\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\eta))$ koordinátájú pont a paralelogramma súlypontja, így kapjuk, hogy a $(0, A + B)$ és $(A, 0)$ végpontú szakasz felezőpontjának első koordinátája $\frac{A}{2}$, a második koordinátája $\frac{A+B}{2}$, így

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{0 + A}{2} = \frac{A}{2} = 3.3, \quad \mathbb{E}(\eta) = \frac{A + B + 0}{2} = \frac{A + B}{2} = 7.2.$$

- **A $\text{cov}(\xi, \eta)$ értéke:**

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \frac{1}{AB} \int_0^A \left(\int_{-x+A}^{-x+A+B} xy dy \right) dx = \frac{1}{2AB} \int_0^A [xy^2]_{y=-x+A}^{y=-x+A+B} dx.$$

$$\begin{aligned} [xy^2]_{y=-x+A}^{y=-x+A+B} &= x(-x + A + B)^2 - (-x + A)^2 = \\ &= x(-x + A + B - x + A)(-x + A + B + x - A) = \\ &= x(-2x + 2A + B)B. \end{aligned}$$

5. Feladat megoldása, folytatás

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{1}{2AB} \cdot B \int_0^A (-2x^2 + (2A + B)x) dx = \\ &= \frac{1}{2A} \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{(2A + B)x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=A} = \frac{-A^2}{3} + \frac{(2A + B)A}{4} = \\ &= \frac{1}{12}(-4A^2 + 6A^2 + 3AB) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) = \\ &= 20.13,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB) - \frac{1}{4}(A^2 + AB) = \\ &= \frac{1}{12}(2A^2 + 3AB - 3A^2 - 3AB) = -\frac{1}{12}A^2 = -3.63.\end{aligned}$$

3. Többdimenziós normális eloszlás

6. Feladat

Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény.

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

6. Feladat megoldása

Ebben a feladatban kihasználjuk, hogy a ξ és η valószínűségi változók függetlenek. ($m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r$).

Mivel

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} = \left(C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \left(C_2 e^{-\frac{(y-1)^2}{8}} \right),$$

így $\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = 1)$, $\eta \sim \mathcal{N}(m_2 = 1, \sigma_2^2 = 4)$ független valószínűségi változók.

A konstans ellenőrzése

$$C_1 C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} = \frac{1}{4\pi},$$

és $r = 0$.

7. Feladat

Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}} .$$

7. Feladat megoldása

Ebben a feladatban olyan (ξ, η) kétdimenziós, normális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek, amelyeknek 0 a várható értékük. A marginális eloszlások meghatározásához az együttes eloszlásban szereplő kitevőt teljes négyzet alakra kell hozni.

- A ξ eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az y változó szerint.

$$\begin{aligned} -\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4} &= -\frac{3}{4} \left(y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{3}x^2 \right) = \\ &= -\frac{3}{4} \left(\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x^2 \right) = \\ &= -\frac{3}{4} \left(y - \frac{1}{3}x \right)^2 - \frac{1}{6}x^2 = -\frac{\left(y - \frac{1}{3}x \right)^2}{2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2} - \frac{1}{6}x^2, \end{aligned}$$

7. Feladat megoldása, folytatás

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\frac{1}{3}x)^2}{2(\frac{\sqrt{2}}{3})^2}} e^{-\frac{1}{6}x^2} dy = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{1}{6}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\frac{1}{3}x)^2}{2(\frac{\sqrt{2}}{3})^2}} dx}_{I_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{6}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}x^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ugyanis $I_1 = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}}$, mivel az integrandus konstansszorososa egy

$\mathcal{N}\left(m = \frac{1}{3}x, \sigma^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right)$ eloszlású valószínűségi változó

sűrűségfüggvényének, amiből kapjuk, hogy

$\xi \sim \mathcal{N}(m_1 = 0, \sigma_1^2 = (\sqrt{3})^2)$.

7. Feladat megoldása, folytatás

- A η eloszlása: A kitevő teljes négyzetté alakítása az x változó szerint.

$$\begin{aligned} -\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4} &= -\frac{1}{4} ((x - y)^2 - y^2 + 3y^2) = -\frac{1}{4}(x - y)^2 - \frac{1}{2}y^2 = \\ &= -\frac{(x - y)^2}{2(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{\eta}(y) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} dx}_{I_2 = \sqrt{2\pi} \sqrt{2} = 2\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ugyanis $I_2 = 2\sqrt{\pi}$ azért teljesül, mert az integrandus konstansszorosra egy $\mathcal{N}(m = y, \sigma^2 = (\sqrt{2})^2)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Így kapjuk, hogy $\eta \sim \mathcal{N}(m_2 = 0, \sigma_2^2 = 1)$, (azaz standard normális) eloszlású valószínűségi változó.

7. Feladat megoldása, folytatás

- A $\text{cov}(\xi, \eta)$ kiszámítása: Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$, így $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta)$.

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{2})^2}} dx \right)}_{I_3 = \sqrt{2\pi}\sqrt{2}y = 2\sqrt{\pi}y} dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi} 2\sqrt{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}}_{I_4 = \sqrt{2\pi}} dy = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} 2\sqrt{\pi}\sqrt{2\pi} = 1.\end{aligned}$$

Az $I_3 = 2\sqrt{\pi}y$ értéket onnan kapjuk, hogy az integrandus (megfelelő konstansszorosra) egy $\mathcal{N}(m = 0, \sigma^2 = (\sqrt{2})^2)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét adja, míg az $I_4 = \sqrt{2\pi}$ onnan adódik, hogy az integrandus (megfelelő konstansszorosra) egy standard normális eloszlású valószínűségi változó második momentuma.

7. Feladat megoldása, folytatás

- Az $r(\xi, \eta)$ értéke:

$$r = r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)\mathbb{D}^2(\eta)} = \frac{1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- A konstans ellenőrzése:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}.$$

- A kitevő ellenőrzése:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2r \frac{(x - m_1)(x - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \\ & = -\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{3}\right)} \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{xy}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{1} \right] = -\frac{1}{4} (x^2 - 2xy + 3y^2). \end{aligned}$$

8. Feladat

Határozza meg a (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó ismeretlen paramétereit $(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, ha az együttes sűrűségfüggvény.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{1}{4}(x^2+3y^2-2xy+8x-16y+24)} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

8. Feladat megoldása

Ebben a feladatban olyan (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek, amelyek marginális eloszlásaiban a várható értékek nem nullák.

- **A marginális eloszlások várható értékeinek a meghatározása:** A parciális deriváltat egyenlővé tesszük 0-val, majd az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f(x, y) \left(-\frac{1}{4} \right) (2x + 2y + 8) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f(x, y) \left(-\frac{1}{4} \right) (6y - 2x - 16) = 0 \end{aligned} \right\},$$

így kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} x - y &= -4 \\ x - 3y &= -8 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 2 \end{aligned} \right\} \implies m_1 = -2, m_2 = 2.$$

8. Feladat megoldása, folytatás

- **Visszahúzás az origóba:** Mivel az eltolás a szórásnégyzetet és a korrelációs együtthatót fixen hagyja, ezért alkalmazhatunk olyan eltolást, amelynek hatására a marginálisok 0 várható értékűekké válnak.

Az együttes sűrűségfüggvényben a kitevő az alábbi módon változik:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 3(y+2)^2 - 2(x-2)(y+2) + 8(x-2) - 16(y+2) + 24 = \\ & = -\frac{1}{4}(x^2 - 2xy + 3y^2). \end{aligned}$$

Azaz a kapott együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x-2, y+2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{4}}, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

így a 7. pontja alapján kapjuk, hogy

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = 1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vége az I. gyakorlatnak