Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

7. gyakorlat

Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

1. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

1. Feladat

Két dobókockával dobunk egy pirossal és egy kékkel. Jelölje ξ_1, ξ_2 a két dobott számot. Határozza meg

a. A $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét;

b. Az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ eloszlását, várható értékét és szórásnégyzetét;

c. A (ξ, η) együttes eloszlását, a $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ és az $\mathrm{r}(\xi, \eta)$ értékeket.

1.a Feladat megoldása

a. A $\min(\xi_1, \xi_2)$ **eloszlása:**

$$\mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2)=1)=\mathbb{P}\left((1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(3,1),\dots,(6,1)\right)=$$
$$=\frac{2\cdot 6-1}{36}=\frac{11}{36},$$
$$\mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2)=2)=\mathbb{P}\left((2,2),(2,3),\dots,(2,6),(3,2),(4,2),\dots,(6,2)\right)=$$
$$=\frac{2\cdot 5-1}{36}=\frac{9}{36},$$
$$(\dots)$$

ugyanígy kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2)=k)=\frac{2(6-k+1)-1}{36}\qquad (k=1,2,\dots,6).$$

A $\min(\xi_1, \xi_2)$ várható értéke és szórásnégyzete:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

1. a Feladat megoldásának folytatása

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \sum_i x_i p_i = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \\
&= \frac{91}{36} = 2.5278, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{11}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} + 3^2 \cdot \frac{7}{36} + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = \\
&= \frac{301}{36} = 8.3611, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = 1.9715.
\end{aligned}$$

1. b Feladat megoldása

b. A $\max(\xi_1, \xi_2)$ **eloszlása:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(\xi_1,\xi_2)=1) &= \mathbb{P}\left((6,1),(6,2),\ldots,(6,6),(1,6),(2,6),\ldots,(5,6)\right) = \\ &= \frac{2\cdot 6-1}{36} = \frac{11}{36}, \\ \mathbb{P}(\max(\xi_1,\xi_2)=2) &= \mathbb{P}\left((5,1),(5,2),\ldots,(5,5),(1,5),(2,5),\ldots,(4,5)\right) = \\ &= \frac{2\cdot 5-1}{36} = \frac{9}{36}, \\ &(\ldots)\end{aligned}$$

ugyanígy kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\min(\xi_1,\xi_2)=k) == \frac{2k-1)-1}{36} \qquad (k=1,2,\ldots,6).$$

A $\min(\xi_1, \xi_2)$ várható értéke és szórásnégyzete:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

1. b Feladat megoldásának folytatása

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} =$$

$$= \frac{161}{36} = 4.4722,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} =$$

$$= \frac{791}{36} = 21.9722,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1.9715.$$

1. c Feladat megoldása

c. **A (ξ, η) együttes eloszlása, ahol** $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$**,** $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.
Érdemes észrevenni, hogy

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = \frac{2}{36}$,
- ha $i = j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{36}$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = 0$.

Így könnyű kitölteni az együttes eloszlás táblázatot.

(ξ, η)	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

1. c Feladat megoldásának folytatása

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{36} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant j} \frac{2}{36} ij = \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^{6} i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant j} ij \right) =$$

$$= \frac{1}{36} \left(\sum_{i=1}^{6} i \right)^2 = \frac{21^2}{36} = 12.25,$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{49}{4} - \frac{91}{36} \cdot \frac{161}{36} = 0.9452.$$

2. Feladat

Két pörgettyűvel pörgetünk: egy pirossal és egy kékkel. Mindkét pörgettyűvel az 1, 2, 3, számokat lehet kipörgetni. Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék pörgettyűvel kipörgetett számot. Határozza meg a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlását, valamint a $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ és az $\mathrm{r}(\xi, \eta)$ értékét, ha

a. • $\xi := \xi_1$, $\eta :=$ min(ξ_1, ξ_2);

b. • $\xi := \xi_1$, $\eta :=$ max(ξ_1, ξ_2);

c. $\xi :=$ min(ξ_1, ξ_2), $\eta :=$ max(ξ_1, ξ_2).

2.a Feladat megoldása

Jelölje ξ_1 a piros, ξ_2 a kék pörgettyűvel kipörgetett számot.

a. • $\xi := \xi_1$, $\eta := \min(\xi_1, \xi_2)$;
Mivel $\xi := \xi_1$, $\eta := \min(\xi_1, \xi_2)$, így

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = 0$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{9}$.

Így már csak az $i = j$ eseteket kell kiszámolni.

$$(\xi_1 = 1, \min(\xi_1, \xi_2) = 1) = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}\,,\ \text{így } p_{11} = \frac{3}{9},$$

$$(\xi_1 = 2, \min(\xi_1, \xi_2) = 2) = \{(2,2), (2,3)\}\,,\ \text{így } p_{22} = \frac{2}{9},$$

$$(\xi_1 = 3, \min(\xi_1, \xi_2) = 3) = \{(3,3)\}\,,\ \text{így } p_{33} = \frac{1}{9}.$$

2. a Feladat megoldása, együttes, marginális eloszlások

Ezek alapján könnyen fel tudjuk írni a (ξ, η) együttes eloszlását, illetve a marginális eloszlásokat.

(ξ, η)	1	2	3	
1	$\frac{3}{9}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2. a Feladat megoldása, ξ eloszlása

- A ξ eloszlása

x_i	1	2	3
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_i x_i p_{i\cdot} = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 p_{i\cdot} = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{3},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}.$$

2. a Feladat megoldása, η eloszlása

- A η eloszlása

y_j	1	2	3
$p_{j\cdot}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_j x_i p_{\cdot j} = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5+6+3) =$$

$$= \frac{14}{9} = 1.5556,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} = 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5+12+9) =$$

$$= \frac{26}{9} = 2.8889,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = 0.4691.$$

2. a Feladat megoldása, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ és $\mathrm{r}(\xi,\eta)$ meghatározása

- **Az $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ meghatározása**

$$\mathbb{E}(\xi\cdot\eta)=\sum_{i,j}x_iy_jp_{ij}=$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{3}{9}+2\cdot1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot1\cdot\frac{1}{9}+3\cdot2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot3\cdot\frac{3}{9}=$$
$$=\frac{1}{9}(3+2+8+3+6+27)=\frac{49}{9}=5.4444.$$
$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}(\xi\cdot\eta)-\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)=\frac{49}{9}-2\cdot\frac{14}{9}=\frac{7}{3}=2.3333.$$

- **Az $\mathrm{r}(\xi,\eta)$ meghatározása**

$$\mathrm{r}(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)}=\frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{38}{81}}}=\frac{21\sqrt{57}}{38}=4.1722.$$

2. b Feladat megoldása

b. • $\xi := \xi_1$, $\eta := \max(\xi_1, \xi_2)$;
Mivel $\xi_1 \leqslant \max(\xi_1, \xi_2)$, így

- ha $i < j$, akkor $p_{ij} = \frac{1}{9}$,
- ha $i > j$, akkor $p_{ij} = 0$.

Így már csak az $i = j$ eseteket kell kiszámolni.

$$(\xi_1 = 1, \max(\xi_1, \xi_2) = 1) = \{(1,1)\}, \text{ így } p_{11} = \frac{1}{9},$$

$$(\xi_1 = 2, \max(\xi_1, \xi_2) = 2) = \{(2,1), (2,2)\}, \text{ így } p_{22} = \frac{2}{9},$$

$$(\xi_1 = 3, \max(\xi_1, \xi_2) = 3) = \{(3,1), (3,2), (3,3)\}, \text{ így } p_{33} = \frac{3}{9}.$$

2. b Feladat megoldása, együttes és marginális eloszlások

Ezek alapján könnyen fel tudjuk írni a (ξ, η) együttes eloszlását, illetve a marginális eloszlásokat.

(ξ, η)	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

- $\xi = \xi_1$ **eloszlását** a feladat a. részében már kiszámoltuk. Így $\mathbb{E}(\xi) = 2$ és $\mathbb{D}^2(\xi) = \dfrac{2}{3}$.

2. b Feladat megoldása, $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ eloszlása

- **Az** $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ **eloszlása**

x_i	1	2	3
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$\mathbb{E}(\eta) = \sum_j y_j p_{\cdot j} = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}(1 + 6 + 15) =$$

$$= \frac{22}{9} = 2.444,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + 3^2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}(1 + 12 + 45) =$$

$$= \frac{58}{9} = 6.4444,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \frac{58}{9} - \left(\frac{22}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = 0.4691.$$

2. b Feladat megoldása, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, $\operatorname{r}(\xi,\eta)$

- **Az $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ meghatározása**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \\
&= 1\cdot 1\cdot \frac{1}{9} + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{9} + 1\cdot 3\cdot \frac{1}{9} + 2\cdot 2\cdot \frac{2}{9} + 2\cdot 3\cdot \frac{1}{9} + 3\cdot 3\cdot \frac{3}{9} = \\
&= \frac{1}{9}(1+2+3+8+6+27) = \\
&= \frac{47}{9} = 5.2222. \\
\operatorname{cov}(\xi,\eta) &= \mathbb{E}(\xi\cdot\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = \frac{47}{9} - 2\cdot\frac{22}{9} = \\
&= \frac{1}{3} = 0.3333.
\end{aligned}
$$

- **Az $\operatorname{r}(\xi,\eta)$ meghatározása**

$$
\operatorname{r}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{3\cdot\sqrt{57}}{38} = 0.5960.
$$

3. Feladat

Definiáljuk a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót az alábbi táblázat segítségével:

(ξ, η)	1	3	5
2	0.1	0.2	0.1
3	0.1	0.4	0.1

a. • Mutassuk meg, hogy a ξ, η valószínűségi változók nem függetlenek, de korrelálatlanok;

b. • Határozzuk meg a $\mathbb{D}^2(\xi)$, $\mathbb{D}^2(\eta)$, és $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ értékét;

c. • Határozzuk meg az $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ értékét;

3. Feladat megoldása

Először meghatározzuk a marginális eloszlásokat.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$	
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.1	0.4
$x_2 = 3$	0.1	0.4	0.1	0.6
	0.2	0.6	0.2	1

A ξ eloszlása:

x_i	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$p_{i\cdot}$	0.4	0.6

η eloszlása:

y_i	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
$p_{\cdot j}$	0.2	0.6	0.2

a.• A ξ és η nem függetlenek, hiszen a marginális eloszlások szorzata nem egyenlő az együttes eloszlással. Ez könnyen ellenőrizhető, ha például az első sort és az első oszlopot nézzük: $0.2 \cdot 0.4 \neq 0.1$.
b.• A marginális eloszlások táblázatai könnyen megkaphatók az együttes eloszlás táblázatából. Így kapjuk, hogy
A ξ várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.6 = 2.6, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.6 = 7, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 7 - 2.6^2 = 0.24.
\end{aligned}$$

Az η várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\eta) &= 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.2 = 3, \\
\mathbb{E}(\eta^2) &= 1^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.6 + 5^2 \cdot 0.2 = 10.6, \\
\mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 10.6 - 3^2 = 1.6.
\end{aligned}$$

3. b Feladat megoldása

$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ **meghatározásá**hoz szükségünk van az $\mathbb{E}(\xi\eta)$ értékére, ami az együttes eloszlástáblázatból számolható az a transzformációs formula felhasználásával.

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 3 \cdot 0.2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.1 + 3 \cdot 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 3 \cdot 0.4 + 3 \cdot 5 \cdot 0.1 = \\ = 7.8.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 7.8 - 2.6 \cdot 3 = 0.$$

Mivel $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$, így ξ és η korrelálatlanok, azonban - mint ahogyan azt láttuk - nem függetlenek.
A $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ **érték**é**t** a kapott értékekből a legkönnyebb meghatározni, így nincs szükség a $\xi + \eta$ eloszlásának a meghatározására.

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(\xi) + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2(\eta) = 0.24 + 2 \cdot 0 + 1.6 = 1.84.$$

3. c Feladat megoldása

c.• A $\mathbb{E}(|\xi - \eta|)$ (A ξ és η abszolút átlagos eltérésének) a meghatározása könnyű a együttes eloszlástáblázat és a transzformációs formula alapján:

$$\mathbb{E}(|\xi - \eta|) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |x_i - yj| pij =$$

$$= |1-2| \cdot 0.4 + |3-2| \cdot 0.2 + |5-2| \cdot 0.1 + |1-3| \cdot 0.1 + |3-3| \cdot 0.4 + |5-3| \cdot 0.1$$

$$= 1.3$$

4. Feladat

Legyenek $\xi \in \{U, V\}$ $(U \neq V)$ és $\eta \in \{W, Z\}$ $(W \neq Z)$ valószínűségi változók. Igazolja, hogyha ξ és η korrelálatlanok, akkor függetlenek.

5. Feladat

A (ξ, η) együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

	0	1	2
0	0.08	0.12	0.2
1	12	0.18	3

Határozza meg az $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{D}^2(\xi)$, $\mathbb{E}(\eta)$, $\mathbb{D}^2(\eta)$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ értékét.

5. Feladat megoldása

A (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	2	
0	0.08	0.12	0.2	0.4
1	12	0.18	3	0.6
	0.2	0.3	0.5	1

$$\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.6 = 0.6,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = 0.6 - 0.6^2 = 0.24.$$

$$\mathbb{E}(\eta) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 = 1.3,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 = 2.3,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = 2.3 - 1.3^2 = 0.61,$$

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = 1 \cdot 1 \cdot 0.18 + 1 \cdot 2 \cdot 0.3 = 0.78,$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0.78 - 0.6 \cdot 1.3 = 0$$

Így korrelálatlanok, de nem függetlenek.

6. Feladat

Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó az alábbi táblázattal definiálva:

(ξ, η)	0	1
0	α	0
1	0	$1-\alpha$

ahol $\alpha \in]0, 1[$. Határozza meg az $\mathrm{r}(\xi, \eta)$ értékét.

6. Feladat megoldása

Legyen a (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	
0	α	0	α
1	0	$1-\alpha$	$1-\alpha$
	α	$1-\alpha$	1

Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}(\eta) = 1-\alpha, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= \mathbb{E}(\eta^2) = 1-\alpha, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{D}^2(\eta) = (1-\alpha) - (1-\alpha)^2 = \alpha(1-\alpha), \\
\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) &= 1-\alpha, \\
\operatorname{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = (1-\alpha) - (1-\alpha)^2 = \alpha(1-\alpha), \\
\mathrm{r}(\xi, \eta) &= \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} = 1.
\end{aligned}$$

Ez a példa azért tanulságos, mert $-1 \leqslant \mathrm{r}(\xi, \eta) \leqslant 1$, így láttunk példát arra az esetre, amikor $\mathrm{r}(\xi, \eta) = 1$.

7. Feladat

Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó az alábbi táblázattal definiálva:

(ξ, η)	0	1
0	0	α
1	$1-\alpha$	0

Határozza meg az $\mathrm{r}(\xi, \eta)$ értékét.

7. Feladat megoldása

Legyen a (ξ, η) együttes eloszlása és a marginális eloszlások az alábbi táblázatban láthatóak:

(ξ, η)	0	1	
0	0	α	α
1	$1-\alpha$	0	$1-\alpha$
	$1-\alpha$	α	1

7. Feladat megoldásának folytatása

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= 1-\alpha, \\
\mathbb{E}(\xi^2) &= 1-\alpha, \\
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = (1-\alpha) - (1-\alpha)^2 = \alpha(1-\alpha), \\
\mathbb{E}(\eta) &= \alpha, \\
\mathbb{E}(\eta^2) &= \alpha, \\
\mathbb{D}^2(\eta) &= \mathbb{E}(\eta^2) - [\mathbb{E}(\eta)]^2 = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha), \\
\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) &= 0, \\
\mathrm{cov}(\xi,\eta) &= \mathbb{E}(\xi\cdot\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = -\alpha(1-\alpha), \\
\mathrm{r}(\xi,\eta) &= \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)} = \frac{-\alpha(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} = -1.
\end{aligned}
$$

Ez a példa azért tanulságos, mert $-1 \leqslant \mathrm{r}(\xi,\eta) \leqslant 1$, így konkrét példát látunk arra, amikor $\mathrm{r}(\xi,\eta) = -1$.

Vége az 7. gyakorlatnak