Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

6. gyakorlat

Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

1. Egyenletes eloszlás

1. Feladat

Számítsa ki az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét, ha

a. $\xi \sim \mathcal{U}(0,1)$;

b. $\xi \sim \mathcal{U}(-1,1)$.

1. Feladat megoldása

Legyen $\eta = \xi^2$. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor

a. $\xi \sim \mathcal{U}(0,1)$. Legyen $x \in [0,1]$. Ekkor

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(\xi < \sqrt{x}) = \mathbb{F}_\xi(\sqrt{x})$$

- Az eloszlás és sűrűségfüggvény

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}-0}{1-0} = \sqrt{x}, \text{ ha } x \in [0,1], \\ 1 \text{ ha } x > 1. \end{cases}$$

Így

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ ha } x \in [0,1], \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

1.a Feladat, folytatás

- A várható érték

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} = 0.3333,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

- A szórásnégyzet meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45} = 0.0889.$$

1.b Feladat megoldása

b. $\xi \sim \mathcal{U}(-1,1)$.
Legyen $x \in]-\infty, 0[$. Ekkor

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = 0.$$

Legyen $x \in [0,1]$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_\eta(x) &= \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\xi^2 < x) = \mathbb{P}(|\xi| < \sqrt{x}) = \\
&= \mathbb{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \mathbb{F}_\xi(\sqrt{x}) - \mathbb{F}_\xi(-\sqrt{x}) = \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{2} - \frac{-\sqrt{x}+1}{2} = \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

1.b Feladat megoldása, folytatás

- Az eloszlás és sűrűségfüggvény

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ ha } x \in [0,1], \\ 1 \text{ ha } x > 1. \end{cases}$$

  Így

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ ha } x \in [0,1], \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

- A várható érték és a szórásnégyzet meghatározása az előző feladat alapján kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(\eta) = \frac{1}{5}$.

2. Feladat

Legyen $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$; $\alpha > 0$; $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Határozza meg az $\eta := \alpha\xi + \beta$ valószínűségi változó eloszlását;

b. Hogyan kell megválasztani az α és β értékét úgy, hogy $\eta = \mathcal{U}(0, 1)$ legyen.

2.a Feladat megoldása

Legyen $\eta := \alpha\xi + \beta$, ahol $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$; $\alpha > 0$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a. Az η valószínűségi változó eloszlása:

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\alpha\xi + \beta < x) = \mathbb{P}\left(\xi < \frac{x-\beta}{\alpha}\right) = \mathbb{F}_\eta\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) \ (x \in \mathbb{R}).$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ \text{ha } x < \alpha a + \beta, \\ \dfrac{\frac{x-\beta}{\alpha} - a}{b - a} = \dfrac{x - (\alpha a + \beta)}{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}, \ \text{ha } x \in [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta], \\ 1 \ \text{ha } x > \alpha b + \beta. \end{cases}$$

Így kapjuk, hogy $\eta \sim \mathcal{U}(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$.

2.b Feladat megoldása

b. A megoldáshoz

$$\left.\begin{aligned} \alpha a + \beta &= 0 \\ \alpha b + \beta &= 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani.
A második egyenletből kivonva az első kapjuk, hogy $\alpha(b-a) = 1$, azaz $\alpha = \frac{1}{b-a}$.
Az α-ra kapott értéket visszahelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy

$$\frac{1}{b-a}a + \beta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{-a}{b-a}.$$

2. Exponenciális eloszlás

3. Feladat

Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 5 percnél többet kell várakozni a tapasztalatok szerint 0.22. A várakozási időt exponenciálisnak feltételezve mi a valószínűsége, hogy 6 percnél kevesebbet kell várakozni?

3. Feladat megoldása

Jelölje η a várakozási időt percben mérve. Mivel $\eta \sim Exp(\lambda)$, így $\mathbb{F}_\eta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$.
A λ paraméter meghatározása:

$0.22 = \mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(\eta < 5) = 1 - \mathbb{F}_\eta(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-5\lambda}$,

amiből kapjuk, hogy $-5\lambda = \ln(0.22)$, azaz $\lambda = \frac{\ln(0.22)}{-5}$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\eta < 6) = \mathbb{F}_\eta(6) = 1 - e^{-\lambda \cdot 6} = 1 - e^{\frac{6 \cdot \ln(0.22)}{5}} = 0.8375.$$

4. Feladat

Egy gép n olyan alkatrészt tartalmaz, melyek meghibásodása esetén a gép leáll. Az egyes alkatrészek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterekkel. Jelölje η azt az időtartamot, amely a gép beindításától az első leállításáig eltelik. Számítsa ki az η sűrűségfüggvényét és várható értékét.

4. Feladat megoldása

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók. $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots \mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényekkel. Ha $\xi := \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, akkor a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi < x) &= \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \ldots, \xi_n > x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 > x)\mathbb{P}(\xi_2 > x) \ldots \mathbb{P}(\xi_n > x) \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(\xi_1 < x))(1 - \mathbb{P}(\xi_2 < x)) \ldots (1 - \mathbb{P}(\xi_n < x)).
\end{aligned}$$

Ekvivalens módon kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x) = 1 - (1 - \mathbb{F}_1(x))(1 - \mathbb{F}_2(x)) \ldots (1 - \mathbb{F}_n(x)).$$

4. Feladat megoldása, folytatás

Az általunk vizsgált esetben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x) &= 1-(1-\mathbb{F}_1(x))(1-\mathbb{F}_2(x))\dots(1-\mathbb{F}_n(x)) = \\ &= 1-e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}\dots e^{-\lambda_n x} = \\ &= 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}\end{aligned}$$

Tehát független exponenciális eloszlású valószínűségi változók minimuma szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n$ paraméterrel. Így a gép élettartamának a várható értéke

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

5. Feladat

Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású 0.30 szórással. Határozza meg az $\mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7)$ értékét.

5. Feladat megoldása

$\xi \sim Exp(\lambda)$. Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{D}(\xi) = 0.3 = \frac{1}{\lambda}$. Így

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \frac{1}{\lambda^2},$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. A várható érték linearitása alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(8\xi^2 - 19\xi + 7) &= 8\mathbb{E}(\xi^2) - 19\mathbb{E}(\xi) + 7 = \\ &= 8\frac{2}{\lambda^2} - 19\frac{1}{\lambda} + 7 = 16 \cdot 0.3^2 - 19 \cdot 0.3 + 7 = \\ &= 2,74.\end{aligned}$$

6. Feladat

A gépjárművezetői vizsgán a vizsga időtartama (percben mérve) egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ 0.02 \cdot e^{-0.02x}, \text{ ha } x > 0. \end{cases}$$

Az előttünk lévő már 13 perce vezet. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 percen belül nem fejezi be a vizsgát?

6. Feladat megoldása

Jelölje ξ a vizsga időtartamát percben mérve, ekkor $\xi \sim Exp(\lambda = 0.02)$. A számolás során felhasználjuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát, mely szerint:

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \qquad (s, t > 0).$$

A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > 6 + 13 |\ \xi > 13) &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6 + 13 |\ \xi > 13) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi < 6) = \\ &= 1 - \mathbb{F}_{\xi}(6) = 1 - (1 - e^{-0.02 \cdot 6}) = \\ &= e^{-0.02 \cdot 6} = 0.8869. \end{aligned}$$

7. Feladat

Egy üzletbe átlag 29 vevő érkezik és számuk Poisson eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy két egymás után érkező vevő érkezése között eltelik legalább 4.5 perc?

7. Feladat megoldása

Az időegység 1 óra. Jelölje ξ az üzletbe óránként érkező vevők számát. Mivel $\mathbb{E}(\xi) = \lambda = 29$, így $\xi \sim \mathrm{Poiss}(\lambda = 29)$. Jelölje η a két vevő között eltelt időt órában mérve. Ekkor a Poisson folyamat alapján kapjuk, hogy $\eta \sim Exp(\lambda = 29)$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}\left(\eta > \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\eta < \frac{4.5}{60}\right) = 1 - \mathbb{F}_\eta\left(\frac{4.5}{60}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{4.5\cdot 29}{60}}\right) = e^{-\frac{4.5\cdot 29}{60}} = 0.1136.$$

3. Normális eloszlás

8. Feladat

Egy munkadarab hossza közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 50 mm. Határozza meg a munkadarab hosszának a szórását, ha 0.85 annak a valószínűsége, hogy a munkadarab hossza kisebb, mint 50.05 mm.

8. Feladat megoldása

Jelölje ξ a munkadarab hosszát. Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 50, \sigma^2)$. A feladat az ismeretlen szórás meghatározása. Ekkor

$$0.85 = \mathbb{P}(\xi < 50.05) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{50.05 - 50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right),$$

amiből az ismeretlen σ paramétert már könnyű kifejezni.
$1.04 = \frac{0.05}{\sigma}$, $\sigma = \frac{0.05}{1.04} = 0.0481$.

9. Feladat

Legyen ξ egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, amely 0.42 valószínűséggel vesz fel értéket a $]-5.8, 5.8[$ intervallumon. Számítsa ki a $\mathbb{P}(0.5 \leqslant 1.7\xi < 1.7)$ valószínűséget.

9. Feladat megoldása

Tudjuk, hogy $\xi \sim \mathcal{N}(m = 0, \sigma^2)$, ahol a σ^2 paraméter ismeretlen; továbbá $\mathbb{P}(-5.8 \leqslant \xi \leqslant 5.8) = 0.42$. Először a σ értékét határozzuk meg. Standardizálással kapjuk, hogy $\eta \doteq \frac{\xi - 0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-5.8 \leqslant \xi \leqslant 5.8) &= \mathbb{P}\left(\frac{-5.8}{\sigma} \leqslant \eta \leqslant \frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5.8}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) - 1 = 0.42,\end{aligned}$$

azaz

$$\Phi\left(\frac{5.8}{\sigma}\right) = \frac{0.42 + 1}{2} = 0.71$$

9. Feladat megoldása, folytatás

A kapott egyenlőségből az ismeretlen szórás már visszakereséssel meghatározható: $\frac{5.8}{\sigma} = 0.55$, $\sigma = \frac{5.8}{0.55} = 10.5455$. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0.5 \leqslant 1.7\xi + 1 < 1.7) &= \mathbb{P}\left(\frac{0.5-1}{1.7} \leqslant \xi < \frac{1.7-1}{1.7}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{0.5-1}{1.7 \cdot 10.5455} \leqslant \eta < \frac{1.7-1}{1.7 \cdot 10.5455}\right) = \\
&= \Phi(0.04) - \Phi(-0.03) = \\
&= \Phi(0.04) + \Phi(0.03) - 1 = \\
&= 0.5160 + 0.5160 - 1 = 0.028.
\end{aligned}$$

10. Feladat

Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó és $\alpha \in (0, 1)$ egy tetszőlegesen rögzített valós szám. Határozzuk meg azt a K_α számot, amelyre $\mathbb{P}(\xi > K_\alpha) = \alpha$. Legyenek speciálisan $m = 20$, $\sigma^2 = 4$. Határozzuk meg a K_α értékét $\alpha = 0.90$, 0.95, 0.99 esetén.

10. Feladat megoldása

$$\mathbb{P}(\xi > K_\alpha) = 1 - \mathbb{P}(\xi < K_\alpha) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\xi - m}{\sigma} < \frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{K_\alpha - m}{\sigma}\right) = \alpha$$

qquad

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{K_\alpha - m}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$\Longrightarrow \qquad K_\alpha = -\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + m.$$

Az alábbi táblázat az α, $\Phi^{-1}(\alpha)$ értékpárokat tartalmazza:

α	0.90	0.95	0.99
$\Phi^{-1}(\alpha)$	1.282	0.645	2.326

10. Feladat megoldása, folytatás

Tudjuk, hogy $m = 20$, $\sigma = 2$.

- Ha $\alpha = 0.90$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 1.282 + 20 = 17.436$,
- Ha $\alpha = 0.95$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 1.645 + 20 = 16.71$,
- Ha $\alpha = 0.99$, akkor $K_\alpha = -2 \cdot 2.326 + 20 = 8.37$.

Vége az 6. gyakorlatnak