

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

5. gyakorlat

Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

1. Hipergeometrikus és binomiális eloszlások

1. Feladat

Egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31 . Mennyi a valószínűsége, hogy 8 kísérletből

- a. legfeljebb 2 -szer következik be,
- b. legfeljebb 6 -szor következik be.
- c. legalább 6 -szor következik be az A esemény.

1.a,b Feladat megoldása

Egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Jelölje ξ az A esemény bekövetkezéseinek a számát.

a.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 2) &= \mathbb{P}((\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2)) = p_0 + p_1 + p_2 = \\ &= \binom{8}{0} 0.31^0 0.69^8 + \binom{8}{1} 0.31^1 0.69^7 + \binom{8}{2} 0.31^2 0.69^6 = \\ &= 0.5264,\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \leq 6) &= 1 - \mathbb{P}(\xi > 6) = \\ &= 1 - \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8)) = 1 - (p_7 + p_8) = \\ &= 1 - \left(\binom{8}{7} 0.31^7 0.69^1 + \binom{8}{8} 0.31^8 0.69^0 \right) = \\ &= 0.9984\end{aligned}$$

1.c Feladat megoldása

Egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0.31. Jelölje ξ az A esemény bekövetkezéseinek a számát.

c.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi \geq 6) &= \mathbb{P}((\xi = 6) \cup (\xi = 7) \cup (\xi = 8)) = p_6 + p_7 + p_8 = \\ &= \binom{8}{6} 0.31^6 0.69^2 + \binom{8}{7} 0.31^7 0.69^1 + \binom{8}{8} 0.31^8 0.69^0 = \\ &= 0.0134.\end{aligned}$$

A továbbiakban az olyan részeket, mint például, $\mathbb{P}((\xi = 6) \cup (\xi = 7) \cup (\xi = 8))$ nem kell kiírni.

2. Feladat

Egy külföldi ösztöndíjra kiírt pályázat elbírálásának utolsó fordulójára 8 egyenlő képességű jelölt maradt, 5 fiú és 3 lány. A bírálóbizottság ezután sorsolással választott ki közülük 4 főt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között lesz lány?

2. Feladat megoldása

Jelölje ξ a kiválasztott lányok számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 8$, $s = 3$, $N - s = 5$, $n = 4$ paraméterekkel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{there is a woman}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{no woman}) = 1 - p_0 = \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{13}{14} = 0.9286.\end{aligned}$$

3. Feladat

Egy rejtvénypályázaton 4 díjat sorsolnak ki a helyes megfejtők között. (Egy megfejtő legfeljebb egy díjat kaphat.) 50 jó megfejtés érkezett be összesen, ezek közül 20 Miskolcra. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz miskolci nyertes?

Feladat megoldása

Jelölje ξ a kisorsolt miskolci megfejtők számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N = 50$, $s = 20$, $N - s = 30$, $n = 4$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(\text{lesz miskolci nyertes}) = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{20}{0} \binom{30}{4}}{\binom{50}{4}} = 0.8810.$$

2. Geometriai és negatív binomiális eloszlások

4. Feladat

Szabályos érmével dobások sorozatát végezzük. A szabályos érme azt jelenti, hogy $\text{fej} = \frac{1}{2}$ és $\text{írás} = \frac{1}{2}$.

- a. átlagosan hány dobás kell ahhoz, hogy először fej dobást dobjunk?
- b. átlagosan hány dobás kell ahhoz, hogy harmadszor is fejet dobjunk?

4. Feladat megoldása

- a. $\xi \sim \text{Geom} \left(p = \frac{1}{2} \right)$, így $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;
- b. $\xi \sim \mathcal{NB} \left(r = 3, p = \frac{1}{2} \right)$, így $\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p} = 6$.

3. Poisson eloszlás

5. Feladat

Egy szervízbe műszakonként átlagban 5 gépkocsi jelentkezik javításra és számuk Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mi a valószínűsége, hogy egy nap legalább 4, de legfeljebb 7 gépkocsit javítanak?

5. Feladat megoldása

Jelölje ξ a szervizbe naponta érkező gépkocsik számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 5)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(4 \leq \xi \leq 7) &= \mathbb{P}((\xi = 4) \cup (\xi = 5) \cup (\xi = 6) \cup (\xi = 7)) = \\ &= p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \left(\frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} \right) e^{-5} = \\ &= 0.6016.\end{aligned}$$

6. Feladat

Egy szelet kalácsban a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, és egy szeletben átlag 9 szem mazsola van. Mi a valószínűsége, hogy egy szeletben legalább 7, de legfeljebb 10 szem mazsola van?

6. Feladat megoldása

Jelölje ξ az egy szelet kalácsban lévő mazsolák számát.

Ekkor $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 9)$. Mivel az unió diszjunkt, így alkalmazható a véges additivitás.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(7 \leq \xi \leq 10) &= \mathbb{P}((\xi = 7) \cup (\xi = 8) \cup (\xi = 9) \cup (\xi = 10)) = \\ &= p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = \left(\frac{9^7}{7!} + \frac{9^8}{8!} + \frac{9^9}{9!} + \frac{9^{10}}{10!} \right) e^{-9} = \\ &= 0.4992.\end{aligned}$$

7. Feladat

Egy kilogramm kalácsban átlag 52 szem mazsola van. Az 5 dekás szeletekben a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ. Legalább hány szeletet kell vennünk, hogy már legalább 0.92 legyen annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük mazsola nélküli szelet?

7. Feladat megoldása

Jelölje ξ az 5 dekás szeletben lévő mazsolák számát. Mivel 100 dkg kalácsban 52 szem mazsola van, így 5 dkg kalácsban $\frac{50 \cdot 52}{1000} = 2.6$ szem mazsola van. Így $\xi \sim \text{Poiss}(\lambda = 2.6)$.

Jelölje A_n azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve van közöttük mazsola nélküli szelet. Keressük azt az n -et amelyre $\mathbb{P}(A_n \geq 0.92)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \leq 1 - 0.92 = 0.08,$$

Az $\overline{A_n}$ jelenti azt az eseményt, hogy n szeletet kivéve nincs közöttük mazsola nélküli szelet, azaz mindegyikben van mazsola. Ezeknek az eseményeknek a függetlenségét felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = (1 - p_0)^n = \left(1 - \frac{2.6^0}{0!} e^{-2.6}\right)^n = (1 - e^{-2.6})^n \leq 0.08.$$

Folytatás

A kapott exponenciális egyenlőtlenség logaritmus-vonás segítségével megoldható.

$$n \geq \frac{\ln(0.08)}{\ln(1 - e^{-2.6})} = 32.7266,$$

tehát legalább 33 db süteményt kell kivenni.

Vége az 5. gyakorlatnak