Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

4. gyakorlat

Várható érték és szórásnégyzet,

1. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

1. Feladat

Egy lezser hallgató maximum 4-szer vizsgázhat és minden vizsgán 0.25 valószínűséggel sikeres. Átlagosan hányszor vizsgázik egy lezser hallgató?

1. Feladat megoldása

Jelölje ξ a szükséges vizsgák számát. Ekkor a ξ valószínűségi változó az $1, 2, 3, 4$ értékeket veheti fel az alábbi valószínűséggel

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \qquad & p_1 &= 0.25; \\ x_2 &= 2 \qquad & p_2 &= 0.75 \cdot 0.25; \\ x_3 &= 3 \qquad & p_3 &= 0.75^2 \cdot 0.25; \\ x_4 &= 4 \qquad & p_4 &= 0.75^3; \end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum x_i p_i = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.75^2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75^3 = \\ = \frac{175}{64} = 2.7344.$$

2. Feladat

Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor. Mennyi a dobott számok összegének várható értéke és szórásnégyzete?

2. Feladat megoldása

Egy kockával 1-szer dobunk. Jelölje ξ a dobott számot.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5,$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) =$$
$$= \frac{91}{6} = 15.1666,$$

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.9126.$$

Jelölje $\xi_i$az i-edik dobás során dobott számot ($i = 1, 2, \ldots, 100$). Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{100}) = \mathbb{E}(\xi_1)+\mathbb{E}(\xi_2)+\cdots+\mathbb{E}(\xi_{100}) = 100\mathbb{E}(\xi) = 100\cdot\frac{21}{6} = 350.$$

Mivel a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{100}$ valószínűségi változók páronként függetlenek, így

$$\mathbb{D}^2(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{100}) = \mathbb{D}^2(\xi_1)+\mathbb{D}^2(\xi_2)+\cdots+\mathbb{D}^2(\xi_{100}) = 100\mathbb{D}^2(\xi) =$$
$$= 100\cdot\frac{35}{12} = \frac{875}{30} = 291.6667,$$

$$\mathbb{D}(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{100}) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)} = \sqrt{291.6667} = 17.0783.$$

3. Feladat

Egy játékos és a bank megpörgeti a szabályos pörgettyűt, amelyen az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számokat lehet kipörgetni. A játékos akkor nyer, ha nagyobb számot pörget ki, mint a bank. Minden más esetben a bank nyer. Ha a játékos nyer, 2000 Ft-ot kap. Hány forintot kell a játék előtt a játékosnak befizetnie, hogy a bank játékonkénti átlagos nyeresége 200 Ft legyen?

3. Feladat megoldása

Jelölje ξ a bank pörgetésenkénti nyereségét. A ξ valószínűségi változó az x, $x - 2000$ értékeket veheti fel, ahol a játékosnak a pörgetés előtt x forintot kell befizetnie a banknak.
A bank nyerési esélye:

J/B	1	2	3	4	5	6	7
1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
2		$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
3			$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
4				$*$	$*$	$*$	$*$
5					$*$	$*$	$*$
6						$*$	$*$
7							$*$

Folytatás

$$\mathbb{P}(\text{a bank nyer}) = \frac{\frac{7^2-7}{2}+7}{49} = \frac{4}{7}$$

$$\mathbb{P}(\text{a bank veszít}) = \frac{3}{7}$$

Így a ξ eloszlása:

x_i	x	x-2000
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

A ξ várható értéke:

$$200 = \mathbb{E}(\xi) = x \cdot \frac{4}{7} + (x-2000) \cdot \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{7400}{7} = 1057.1 \quad (\text{Ft})$$

Tehát a játékosnak a 2000 Ft nyeremény reményében minden pörgetés előtt 1057.1 Ft-ot kell befizetnie a banknak ahhoz, hogy a banknak átlagosan 200 forint nyereménye legyen pörgetésenként.

2. Abszolút folytonos valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

4. Feladat

Legyen egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} C(-x^2+1), \text{ ha } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Határozza meg a C paraméter értékét, a ξ várható értékét, a mediánját és szórásnégyzetét, valamint a $\mathbb{P}(\xi < \mathbb{E}(\xi))$ valószínűséget.

4. Feladat megoldása

- **Az integráló tényező értékének a meghatározása:**

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = C\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{x=-1}^{x=1} =$$
$$= C\left(\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right) = \frac{4}{3}C \quad \Longrightarrow$$
$$C = \frac{3}{4}.$$

- **A várható érték és a medián meghatározása:**
Mivel az f sűrűségfüggvény az $y=0$ tengelyre nézve szimmetrikus, továbbá létezik a várható érték, ezért a várható érték és a medián egyaránt 0. $(\mathbb{E}(\xi)=0,\ \nu=0.)$

Folytatás

- **A szórásnégyzet meghatározása:**
  Először meghatározzuk a második momentumot, ami a $(\xi) = 0$ miatt egyúttal a szórásnégyzet is lesz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - [\mathbb{E}(\xi)]^2 = \mathbb{E}(\xi^2) = \\
&= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2(-x^2+1)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(-x^4+x^2)dx \\
&= \frac{3}{4}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} = 0.2.
\end{aligned}$$

5. Feladat

Legyen egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ C(x^2 + 2x), \text{ ha } 0 \leqslant x < 2, \\ 1 \text{ ha } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Határozza meg a C paraméter értékét, a ξ valószínűségi változó várható értéket és az $\mathbb{E}(29\xi - 680)$ értéket.

5. Feladat megoldása

- **A C konstans értékének a meghatározása:** kihasználjuk, hogy abszolút folytonos függvény eloszlásfüggvénye abszolút folytonos (így folytonos), így a C konstans meghatározásához elegendő elérni, hogy az eloszlásfüggvény a töréspontjaiban folytonosan csatlakozzon, így

$$1 = \mathbb{F}(2) = C(x^2 + 2x)|_{x=2} = 8C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{8}.$$

- **A sűrűségfüggvény meghatározása:** Az f sűrűségfüggvény az $\mathbb{F}$ eloszlásfüggvényből $f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{F}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$ módon határozható meg, így

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2x+2) = \frac{1}{4}(x+1), & \text{ha } 0 \leqslant x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Folytatás

- **A várható érték meghatározása:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(x+1)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x^2+x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right) =$$
$$= \frac{7}{6} = 1.6667.$$

- **Az** $\mathbb{E}(29\xi - 680)$ **értékének a meghatározásá**ra felhasználjuk a várható érték linearitását, így kapjuk, hogy

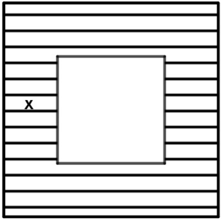
$$\mathbb{E}(29\xi-680) = 29\mathbb{E}(\xi)-680 = 29\cdot\frac{7}{6}-680 = -\frac{3877}{6} = -646.1667.$$

6. Feladat

Ledobunk egy pontot véletlenszerűen az egység oldalhosszú négyzetre. Jelölje ξ a ledobott pontnak az egységnégyzet határától vett távolságát. Határozza meg a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

6. Feladat megoldása

Jelölje ξ a ledobott pontnak az egységnégyzet határától vett távolságát.



Folytatás

1. Eloszlásfüggvény meghatározása.
   A ξ valószínűségi változó értékkészlete a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallum.
   Ebből máris adódik, hogy
   Ha $x > \frac{1}{2}$, akkor $\mathbb{F}(x) = 1$.
   Ha $x \in [\frac{1}{2}, 0]$, akkor

   $$\mathbb{F} = \mathbb{P}(\xi < x) = 1 - (1 - 2x)^2 = 4(-x^2 + x) = -4x^2 + 4x$$

   Ha $x < 0$, akkor nyilván $\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = 0$.
   Így kapjuk, hogy

   $$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0, \\ -4x^2 + 4x, \text{ ha } x \in [0, \dfrac{1}{2}], \\ 1 \text{ ha } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Folytatás

2. **A sűrűségfüggvény meghatározása:**
   A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvényből deriválással határozható meg. Így kapjuk, hogy

$$f(x) = \begin{cases} -8x + 4, \text{ ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Folytatás

3. A várható érték és a második momentum meghatározása.

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x(-8x+4)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-8x^2+4x)dx =$$

$$= \left[-\frac{8x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6},$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(-8x+4)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-8x^3+4x^2)dx =$$

$$= \left[-\frac{8x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

1. A szórásnégyzet meghatározása:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \frac{1}{72} = 0.0139.$$

Vége az 4. gyakorlatnak