

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

3. gyakorlat

Bayes formula, teljes valószínűség tétele,
Bayes tétel,
Események páronkénti és teljes
függetlensége

1. Bayes formula, teljes eseményrendszer, Bayes tétel

1. Feladat

Egy terméket 3 gépsoron gyártanak. Véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket. Tekintsük a következő eseményeket:

B_i := a termék az i -edik gépen készül ($i = 1, 2, 3$);

A := egy termék selejtes.

Továbbá ismert, hogy $\mathbb{P}(B_1) = 0.1$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.2$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.7$; illetve a selejtarányok az egyes gépeken 0.02, 0.01, 0.005.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék selejtes;
- Kiválasztunk egy terméket, ami selejtesnek bizonyul. Mennyi a valószínűsége, hogy a termék az első, a második, illetve a harmadik gépsoron készült?

1. Feladat megoldása

A teljes valószínűség tétele és a Bayes tétel alapján kapjuk, hogy

a.
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = 0.1 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.01 + 0.7 \cdot 0.005 = 0.0095.$$

b.

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.04}{0.0095} = \frac{8}{19} = 0.4211$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.01}{0.0095} = \frac{4}{19} = 0.2105$$

$$\mathbb{P}(B_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.005}{0.0095} = \frac{7}{19} = 0.3684.$$

2. Feladat

Van 3 doboz, mindegyikben 4 golyó.

- Az első dobozban van 1 piros és 3 fehér golyó,
- a második dobozban van 2 piros és 2 fehér golyó,
- a harmadik dobozban van 3 piros és 1 fehér golyó.

Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, majd húzunk belőle egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk?

2. Feladat megoldása

Vezessük be a következő eseményeket:

B_i := az i -edik dobozt választottuk ($i = 1, 2, 3$).

A := piros golyót húzunk.

Mivel a B_1, B_2, B_3 események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Feladat

A betegek 70%-át olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 80%-os gyógyulási arányt 85%-ra javítja. Kiválasztva egy gyógyult beteget, mennyi a valószínűsége, hogy az új kezelésben részesült?

3. Feladat megoldása

Vezessük be az alábbi eseményeket:

A = egy beteg meggyógyult;

B = egy beteg az új kezelésben részesült.

Az alábbi adatokat ismerjük:

$$\mathbb{P}(B) = 0.7, \quad \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.3, \quad \mathbb{P}(A|B) = 0.85, \quad \mathbb{P}(A|\bar{B}) = 0.80.$$

A feladat a $\mathbb{P}(B|A)$ feltételes valószínűség meghatározása.

A Bayes tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{0.85 \cdot 0.7}{0.85 \cdot 0.7 + 0.80 \cdot 0.3} = \\ &= \frac{119}{167} = 0.7126. \end{aligned}$$

4. Feladat

Egy egér 3 folyosón keresztül tud eljutni egy sajthoz. Mindhárom folyosón 3 ajtó található, amelyek egymástól teljesen függetlenül 60% valószínűséggel vannak nyitva. Az ajtók beállnak egy csukott vagy nyitott állapotba, és úgy maradnak. Ha az egérke lát olyan folyosót, amelyen minden ajtó nyitva van, átszalad a sajthoz. Mennyi a valószínűsége, hogy az egérke el tud jutni a sajthoz?

4. Feladat megoldása

Jelölje az egyes folyosókon való átjutást A , B , C .

Ekkor a $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ valószínűséget kell kiszámolni.

A szita-formula alkalmazásával a szimmetria és a függetlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\ &= 3 \cdot 0.6^3 - 3 \cdot 0.6^6 + \cdot 0.6^9 = 0.5181.\end{aligned}$$

5. Feladat

Az X, Y, Z események teljesen függetlenek,
 $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 0.6$. és definiáljuk az D, E, F eseményeket az alábbi módon:

- a. A bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 1 következik be;
- d. D bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legfeljebb 2 következik be;
- e. E bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül pontosan 2 következik be;
- f. F bekövetkezik \iff az X, Y, Z események közül legalább 2 következik be;

5. Feladat megoldása

Az X, Y, Z események teljesen függetlenek,

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 0.6.$$

Egy korábbi feladat eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\text{legfeljebb 1}) = 1 - \mathbb{P}((X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)) = \\ &= 1 - [3\mathbb{P}(X \cap Y) - 3\mathbb{P}(X \cap Y \cap Z) + (x \cap Y \cap Z)] = 1 - [3 \cdot 0.6^2 - 20 \\ &= \frac{44}{125} = 0.352.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(\text{lefeljebb 2}) = \mathbb{P}(\overline{X \cap Y \cap Z}) = 1 - \mathbb{P}(X)^3 = \\ &= 1 - 0.6^3 = \frac{98}{125} = 0.784.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\text{pontosan 2}) = 3\mathbb{P}(X \cap Y \cap \bar{Z}) = 3\mathbb{P}(X)^2(1 - \mathbb{P}(X)) = \\ &= 3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = \frac{54}{125} = 0.432.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{44}{125} = \frac{81}{125} = 0.648.$$

6. Feladat

Ketten dobnak kosárra. Az A játékos 0.6 , a B játékos 0.8 valószínűséggel talál bele a kosárba.

A játék addig tart, amíg valamelyik nem talál bele a kosárba.
Mennyi a valószínűsége, hogy

- a. \bullet A kezd és A nyer;
- b. A kezd és B nyer;
- c. B kezd és A nyer.
- d. B kezd és B nyer;

6. Feladat megoldása

(Feltételezzük a dobások eredményeinek a függetlenségét.)

- a. • Oldjuk meg a feladatot paraméteresen. Vezessük be az alábbi paramétereket.

$$\mathbb{P}(A \text{ talált}) = p, \quad \mathbb{P}(B \text{ talál}) = q.$$

Tegyük fel, hogy A kezd és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a valószínűsége, hogy A nyer. Nyilvánvaló, hogy az A játékos az 1., 3., 5., ... dobások során tud nyerni.

1. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = p;$

3. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = (1 - p)(1 - q)p;$

5. dobás $\mathbb{P}(A \text{ talál}) = [(1 - p)(1 - q)]^2 p;$

(...)

6. a) folytatása

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) &= \\ &= p + (1-p)(1-q)p + [(1-p)(1-q)]^2 p + \dots = \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^k = \frac{p}{1 - (1-p)(1-q)}.\end{aligned}$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = \frac{0.6}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{15}{23} = 0.6522.$$

6. b) Feladat megoldása

b. A kezd és B nyer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \text{ kezd és } B \text{ nyer}) &= 1 - \mathbb{P}(A \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = \\ &= 1 - \frac{p}{1 - (1 - p)(1 - q)}.\end{aligned}$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = 1 - \frac{15}{23} = \frac{8}{23} = 0.3478.$$

6. c) Feladat megoldása

c. B kezd és A nyer. A fentiek alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = 1 - \frac{q}{1 - (1 - p)(1 - q)}.$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } A \text{ nyer}) = 1 - \frac{0.8}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{3}{23} = 0.1304.$$

6. d) Feladat megoldása

d. B kezd és B nyer. A fentiek alapján könnyű látni, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = \frac{q}{1 - (1 - p)(1 - q)}.$$

Így a $p = 0.6$, $q = 0.8$ speciális esetben kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(B \text{ kezd és } B \text{ nyer}) = \frac{0.8}{1 - 0.4 \cdot 0.2} = \frac{20}{23} = 0.8696.$$

Vége az 3. gyakorlatnak