Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

2. gyakorlat

Golyóhúzás urnából, Geometriai valószínűség, Műveletek eseményekkel.

1. Golyóhúzás urnából visszatevés nélkül és visszatevéssel

1. Feladat

Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 10 piros és 20 fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzunk 10 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül legalább 3 piros?

1. Feladat megoldása

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) &= \\
= 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{20}{10} + \binom{10}{1}\binom{20}{9} + \binom{10}{2}\binom{20}{8}}{\binom{30}{10}} &= \\
= 0.7493.
\end{aligned}
$$

2. Feladat

Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 1 piros és 2 fehér golyó. Visszatevéssel kihúzunk 4 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott piros golyók száma legfeljebb 2?

2. Feladat megoldása

Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{3}, n = 4)$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \leqslant 2) = p_0 + p_1 + p_2 =$$

$$= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{56}{81} = 0.6914.$$

3. Feladat

Egy urnában csak piros és fehér golyók vannak, 10 piros és 20 fehér golyó. Visszatevéssel kihúzunk 10 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül legalább 3 piros?

3. Feladat megoldása

Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor $\xi \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{3}, n = 10)$. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(\xi < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) =$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8\right) =$$

$$= 0.7009.$$

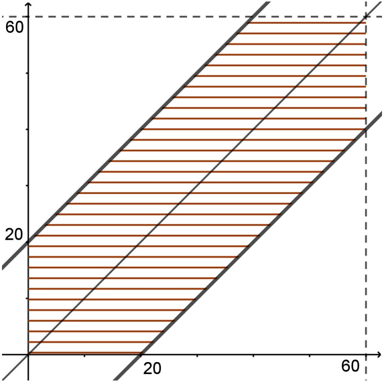
3. Geometriai valószínűség

4. Feladat

Két ember véletlenszerűen megjelenik egy kávéházban dél és délután 1 óra között, ahol 20 percet töltenek el. Mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

4. Feladat megoldása

$\Omega := [0,60] \times [0,60]$; $A := \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \leqslant 20\}$.



$$|x-y| \leqslant 20$$
$$\Updownarrow$$
$$-20 \leqslant x-y \leqslant 20$$
$$\Updownarrow$$
$$y \leqslant x+20 \text{ és } y \geqslant x-20$$

$T(\Omega) = 60^2$ és $T(A) = 60^2 - 2 \cdot \frac{40^2}{2} = 60^2 - 40^2$ Így kapjuk, hogy

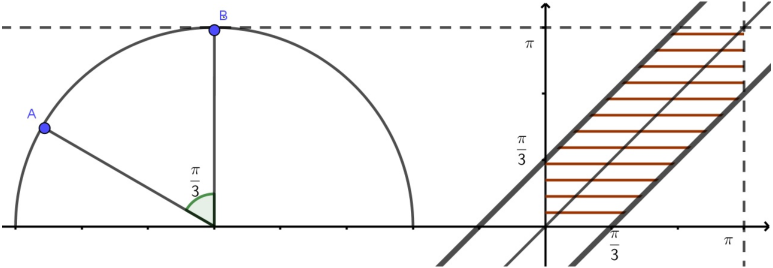
$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} = 0.4444.$$

5. Feladat

Egy félkörre ledobunk két pontot: A-t és B-t véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pontot összekötő szakasz hossza egyenlő a félkör sugarával?

5. Feladat megoldása

$\Omega := [0, \pi] \times [0, \pi]$; $A := \{(x, y) \in \Omega | \, |x - y| \leqslant \frac{\pi}{3}\}$.



Így az előző feladat alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{5}{9} = 0.4444.$$

6. Feladat

Két pontot: x-et és y-t ledobunk véletlenszerűen a $[0, 1]$ intervallumra. A két pont a $[0, 1]$ intervallumot 3 szakaszra bontja. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szakaszokból háromszög szerkeszthető?

6. Feladat megoldása

Bevezetjük a szokásos jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\Omega &\doteq [0,1]\times[0,1],\\
A &\doteq \{(x,y)\in\Omega|\text{ a 3 szakaszból háromszög szerkeszthető}\},\\
A_1 &\doteq \{(x,y)\in A|x\leqslant y\},\\
A_2 &\doteq \{(x,y)\in A|y< x\}.
\end{aligned}$$

Ekkor

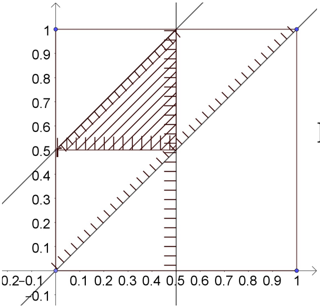
$$A=A_1\cup A_2,\quad A_1\cap A_2=\emptyset,\quad \mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2),\quad \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)=2\mathbb{P}(A_1),$$

így elegendő $\mathbb{P}(A_1)$-et kiszámolni. Ehhez tegyük fel, hogy $x\leqslant y$.
Az x és y pontok 3 részre bontják a $(0,1)$ intervallumot.

A kapott 3 szakasz hossza: x, $y-x$, $1-y$. Ezekre a szakaszhosszokra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x+(y-x) \geqslant 1-y \quad &\Leftrightarrow \quad y \geqslant 1-y \quad \Leftrightarrow \quad 2y \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geqslant \frac{1}{2}, \\
x+1-y \geqslant y-x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+1 \geqslant 2y \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{2} \geqslant y, \\
y-x+1-y \geqslant x \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

A kapott lineáris egyenlőtlenségek félsíkokat határoznak meg a síkban, ezeket a félsíkokat kell összemetszenünk. A féksíkok határegyenesét úgy kapjuk, hogy a kisebb, vagy nagyobb egyenlő relációjeleket egyenlőségjelre cseréljük. A kapott egyenes két félsíkra bontja a síkot. Úgy győződünk meg arról, hogy melyik félsík pontjai elégítik ki a lineáris egyenlőtlenséget, hogy egy tetszőlegesen megválasztott pont, mondjuk az origót a lineáris egyenlőtlenségbe helyettesítjük.



$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{t(A_1)}{t(\Omega)} = \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}}{1} = \frac{1}{8},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

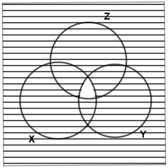
7. Feladat

Legyenek X, Y, Z események, és definiáljuk az D, E, F eseményeket az alábbi módon:

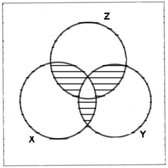
b. • D bekövetkezik $\Longleftrightarrow$ az X, Y, Z események közül legfeljebb 2 következik be;
E bekövetkezik $\Longleftrightarrow$ az X, Y, Z események közül pontosan 2 következik be;
F bekövetkezik $\Longleftrightarrow$ az X, Y, Z események közül legalább 2 következik be;

7. Feladat megoldása

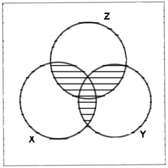
b. •



$$D = \overline{X \cap Y \cap Z}$$



$$E = (X \cap Y \cap \overline{Z}) \cup (X \cap \overline{Y} \cap Z) \cup (\overline{X} \cap Y \cap Z)$$



$$F = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

Vége az 2. gyakorlatnak