Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

1. gyakorlat

Halmazok, Kombinatorika, Klasszikus valószínűségi mező

1. Kombinatorika

1. Feladat

Hányféle sorrendje van az A, A, B, B, B, C, C betűknek?

1. Feladat megoldása

$$P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

2. Feladat

7 vendég érkezik egy kempingbe. A vendégeket 3 faházban tudják elhelyezni, melyek közül az első 2 ágyas, a második 3 ágyas, a harmadik 2 ágyas. Hányféleképpen lehet elhelyezni a vendégeket a faházban, ha az elhelyezésnél csak az számít, hogy melyik vendég melyik faházba kerül?

2. Feladat megoldása

Jelöljék a vendégeket az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számok, a faházakat az A, A, B, B, B, C, C betűk (az ágyszámoknak megfelelően).
Az alábbi táblázat egy példát mutat a vendégek faházbakba történő elhelyezésére

1	2	3	4	5	6	7
B	A	B	C	A	C	C

Így a táblázat alapján kapjuk, hogy a vendégeket a faházbakba 210-féleképpen lehet elszállásolni.

$$P_7^{2,3,2(i)} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

3. Feladat

Hányféleképpen lehet 4 egyforma levelet 5 beszámozott rekeszbe rakni, ha minden rekeszbe

a. legfeljebb egy levél kerülhet;

b. több levél is kerülhet.

3. Feladat megoldása

4 egyforma levél 5 beszámozott rekeszbe:

a. $n = 5,\ k = 4,$
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \binom{5}{4} = 5.$$

b. $n = 5,\ k = 4,$
$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{8}{4} = 70.$$

4. Feladat

Hányféleképpen lehet 4 db beszámozott levelet 5 beszámozott rekeszbe elhelyezni, ha minden rekeszbe

a. legfeljebb egy levél kerülhet;
b. több levél is kerülhet.

4. Feladat megoldása

4 beszámozott levél 5 beszámozott rekeszbe:

a. $n = 5,\ k = 4,$
$V_n^k = (n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$

b. $n = 5,\ k = 4,$
$V_n^{k(i)} = 5^4 = 625.$

5. Feladat

Egy cukorkacsomagoló üzemben egy gép 5-féle cukorkát tölt zsákocskákba. Minden zsákocskába 4 db-ot tölt véletlenszerűen. Hányféle zsákocska keletkezhet a töltés során?

5. Feladat megoldása

$n = 5,\ k = 4,$

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{8}{4} = 70.$$

2. Klasszikus valószínűségi mező

6. Feladat

Egy urnában van 6 golyó beszámozva 0-tól 5-ig. Visszatevés nélkül kihúzunk 3-mat. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok a húzás sorrendjében a számjegyek

a. egy 3-jegyű szám számjegyei; (A esemény)

b. egy 3-jegyű páros szám számjegyei (B esemény)

c. egy 3-jegyű páratlan szám számjegyei (C esemény).

6. Feladat megoldása

Számjegyek: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Visszatevés nélkül kihúzunk 3-mat. $|\Omega| = V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. $|A| := 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$; a B halmaz számosságának a megállapításához érdemes észrevenni, hogy $B = B_1 \cup B_2$ diszjunkt unió, ahol
$B_1 :=$ {a kapott 3-jegyű páros szám első számjegye páros},
$B_2 :=$ {a kapott 3-jegyű páros szám első számjegye páratlan},
$|B_1| = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$, ugyanis az első helyre kerülhet a 2 és a 4 jegyek valamelyike, a harmadik helyre a megmaradt 2 páros szám valamelyike, végül a második helyre a megmaradt 4 számjegy bármelyike. $|B_2| = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$, ami hasonló gondolatmenettel látható, mint amit a $|B_1|$ esetén alkalmaztunk, így kapjuk, hogy $|B| = |B_1| + |B_2| = 16 + 36 = 52$. Mivel $|C| = |A| \setminus |B|$, így $|C| = 100 - 52 = 48$.

6. Feladat megoldásának folytatása

A keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} = 0.8333;$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{52}{120} = \frac{13}{30} = 0.4333;$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0.4;$$

7. Feladat

Egy urnában van 6 golyó beszámozva 0-tól 5-ig. Visszatevéssel kihúzunk 3-mat. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok a húzás sorrendjében a számjegyek

a. egy 3-jegyű szám számjegyei; (A esemény)

b. egy 3-jegyű páros szám számjegyei (B esemény)

c. egy 3-jegyű páratlan szám számjegyei (C esemény).

7. Feladat megoldása

Számjegyek: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ezúttal visszatevéssel kihúzunk 3-mat. $|\Omega| = V_6^{3(i)} = 6^3 = 120$. $|A| = 5 \cdot 6^2$; $|B| = |C| = 5 \cdot 6 \cdot 3$. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 6^2}{6^3} = \frac{5}{6} = 0.8333.$$

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(C) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{12} = 0.4167.$$

Vége az 1. gyakorlatnak