

# Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

## 11. gyakorlat

# Statisztika II., Intervallumbecslések

# 1. $1 - \alpha$ konfidencia intervallum

# $1 - \alpha$ megbízhatósági konfidencia intervallum

## Definition

Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  egy független minta  $\vartheta$  ismeretlen paraméterrel. Keressük azokat a  $\underline{g}$ ,  $\bar{g}$  statisztikákat, amelyre

$$\mathbb{P}(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \vartheta \leq \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \geq 1 - \alpha.$$

Ekkor a  $(\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$  intervallumot a  $\vartheta$  ismeretlen paraméter  $1 - \alpha$  **konfidencia szintű intervallumbecslésének** nevezzük.

## Fontosabb intervallumbecslések

A továbbiakban a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  minden esetben  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  eloszlású független minta lesz. Az alábbi esetekkel fogunk foglalkozni:

- $\mu$ -t becsüljük

1.  $\sigma^2$  ismeretlen: az alkalmazott statisztika:  $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ;

2.  $\sigma^2$  ismeretlen: az alkalmazott statisztika:  $\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$ .

- $\sigma^2$ -et becsüljük

3. az alkalmazott statisztika:  $\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

## A konfidencia szerkesztésének a menete

1. A mintából kiszámoljuk a  $\bar{\xi}$  értékét,  $n$  és  $\sigma^2$  adott.
2. Kiszámoljuk az  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  értéket. Mivel  $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , így

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P} \left( -u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - \left( 1 - \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) \right) = 2\Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - 1. \end{aligned}$$

3. Mivel az  $\alpha$  értéke is adott, így könnyen visszakereshető a táblázat alapján az  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  értéke.
4. A 2. pont alapján kapjuk, hogy a konfidencia intervallum

$$\underline{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{g}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}},$$

# 1. Feladat

Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  független minta, amelyre:

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$\sigma_0^2 = 0.3162.$$

Adjuk meg a 95%-os konfidencia intervallumot  $\mu$  számára.

# 1. Feladat megoldása

$1 - \alpha = 0,95$ , akkor  $\alpha = 0,05$ .

Tudjuk, hogy  $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( -u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \right) &= \\ &= \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - \left( 1 - \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) \right) = 2\Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - 1 = 1 - \alpha \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975.$$

# 1. Feladat megoldásának folytatása

$u_{\frac{\alpha}{2}}$  visszakereshető a táblázatból:  $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1,960$ .

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}$$

ekkor

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

így

$$\bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

azaz

$$1.12 - \frac{0.3162 \cdot 1.960}{\sqrt{10}} < \mu < 1.12 + \frac{0.3162 \cdot 1.960}{\sqrt{10}}$$

így

$$0,92 < \mu < 1.32.$$

## 2. Feladat

Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  független minta, amelyre:

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$\sigma_0 = 0.3162.$$

Adjuk meg a 99%-os konfidencia intervallumot  $\mu$  számára.

## 2. Feladat megoldása

$1 - \alpha = 0,99$ , akkor  $\alpha = 0,01$ .

Tudjuk, hogy  $\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( -u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \right) &= \\ &= \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - \left( 1 - \Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) \right) = 2\Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) - 1 = 1 - \alpha \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Phi \left( u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995.$$

## 2. Feladat megoldásának folytatása

$u_{\frac{\alpha}{2}}$  visszakereshető a táblázatból:  $u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$ .

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}$$

ekkor

$$|\bar{\xi} - \mu| < \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

így

$$\bar{\xi} - \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{\sigma u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

azaz

$$1.12 - \frac{0.3162 \cdot 2.576}{\sqrt{10}} < \mu < 1.12 + \frac{0.3162 \cdot 2.576}{\sqrt{10}}$$

így

$$0,8624 < \mu < 1.3776.$$

# Intervallumbecslés lépései, ismeretlen $\mu$ és $\sigma^2$ szintén ismeretlen

1. A  $t_{\frac{\alpha}{2}}$  meghatározása

$$\mathbb{P} \left( -t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} < t_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 2\mathbb{F} \left( t_{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right) - 1 = 1 - \alpha.$$

A megfelelő táblázatból a  $t_{\frac{\alpha}{2}}$  visszakereshető az

$$\mathbb{F} \left( t_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

összefüggés alapján.

2. Így kapjuk, hogy

$$\bar{\xi} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} s_n^*}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} s_n^*}{\sqrt{n}}.$$

### 3. Feladat

Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$  független minta.

Most  $\mu$ -t és  $\sigma_0$ -t sem ismerjük.

Legyen

$$n = 10;$$

$$\bar{\xi} = 1.12;$$

$$s_n^* = 0.3162.$$

Adjunk meg  $\xi$  számára egy konfidencia intervallumot 95%-os megbízhatósági szinttel.

### 3. Feladat megoldása

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$\mathbb{P} \left( -x \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \leq x \right) = \mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(-x) = 1 - \alpha$$

így

$$\mathbb{F}(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel  $\mathbb{F}(x) + G(x) = 1$ , így  $G(x) = 1 - \mathbb{F}(x) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$ , tehát azt az  $x$  helyet kell keresni, amelyre  $G(x) = 0.25$ .

$n = 10$ , így  $n - 1 = 9$ , azaz a 9. sort és a 0.25. oszlopot kell nézni.  
 $x = 2.262$ , így

$$-2.262 \leq \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_n^*} \sqrt{n} \leq 2.262$$

### 3. Feladat megoldásának folytatása

Tehát

$$|\bar{\xi} - \mu| \leq \frac{2.262 \cdot s_n^*}{\sqrt{n}}$$

így

$$1.12 - \frac{2.262 \cdot 0.3162}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 1.12 + \frac{2.262 \cdot 0.3162}{\sqrt{10}}$$

azaz

$$0.8938 \leq \mu \leq 1.3462$$

## A konfidencia intervallum szerkesztésének a lépései

1. Mivel a  $\chi_{n-1}^2$  eloszlás sűrűségfüggvénye nem szimmetrikus az  $y$  tengelyre, így nem tudunk olyan konfidencia intervallumot szerkeszteni, amely az origóra szimmetrikus, (és így) a legrövidebb konfidencia intervallumot sem tudjuk előállítani.
2. Tudjuk, hogy  $\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ , így az

$$\mathbb{P}\left(x_a \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq x_f\right) = 1 - \alpha$$

összefüggés alapján vissza kell keresnünk a megfelelő táblázatból egy megfelelő  $x_a$  és  $x_f$  értékpár.

# A konfidencia intervallum szerkesztésének a lépései, folytatás

## 3. Mivel

$$\mathbb{P} \left( x_a \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq x_f \right) = \mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

így elegendő azt az  $x_a$ ,  $x_f$  párt megtalálni, amelyre

$$\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}.$$

Ezekkel az  $x_a$  és  $x_f$  számokkal a konfidencia intervallum:

$$\frac{ns_n^2}{x_f} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns_n^2}{x_a}.$$

## 4. Feladat

Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$  egy független minta.

$n = 10$ ;

$s_n^2 = 0.099$ ;

Szerkesszünk konfidencia-intervallumot  $\sigma_0$  számára 0.95 megbízhatósági szinttel.

## 4. Feladat megoldása

Tudjuk, hogy

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}.$$

Keresünk olyan  $x_a$  és  $x_f$  számot amelyekre

$$\mathbb{P}\left(x_a \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq x_f\right) = 1 - \alpha,$$

azonban a  $\chi_{n-1}$  eloszlás sűrűségfüggvénye (jelölje  $f$ )  $\mathbb{R}_+$ -on van értelmezve és így nem szimmetrikus az  $y$  tengelyre, ezért az  $f(-x) = f(x)$  összefüggést nem tudjuk alkalmazni.

Az eloszlásfüggvény legyen  $\mathbb{F}$ , és annak kell teljesülnie, hogy

$$\mathbb{F}(x_f) - \mathbb{F}(x_a) = 1 - \alpha,$$

de elég ha teljesül az  $\mathbb{F}(x_f) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ,  $\mathbb{F}(x_a) = \frac{\alpha}{2}$ .

## 4. Feladat megoldása, folytatás

Azonban nem az eloszlásfüggvény van a táblázatban, hanem

$$G(x) + \mathbb{F}(x) = 1, \quad \text{akkor} \quad G(x) = 1 - \mathbb{F}(x)$$

azaz

$$G(x_f) = \frac{\alpha}{2}, \quad G(x_a) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

Mivel  $n = 10$ , így a táblázat 9. sorát és 0.25, illetve 0.75 oszlopát kell nézni.

$$G(x_f) = 0.025, \quad G(x_a) = 0.975,$$

azaz

$$x_f = 19.023, \quad x_a = 2.7004.$$

## 4. Feladat megoldásának folytatása

Így kapjuk, hogy

$$2.7004 \leq \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \leq 19.023,$$

$$\frac{ns_n^2}{19.023} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns_n^2}{2.7004}.$$

azaz

$$0.228 \leq \sigma \leq 0.7023.$$

Vége az 11. gyakorlatnak