Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

10. gyakorlat

Statisztika I., Pontbecslések

1. Alapstatisztikák

1. Feladat

10 elemű minta:

$$3.6,\ 1.3,\ 0.5,\ 6.2,\ 1.0,\ 9.8,\ 3.0,\ 3.1,\ 6.5,\ 7.6.$$

Határozza meg az

a. átlagot,
b. tapasztalati második momentumot,
c. tapasztalati szórásnégyzetet,
d. korrigált tapasztalati szórásnégyzetet,
e. tapasztalati mediánt,
f. medián abszolút eltérést.

1. Feladat megoldása

10 elemű minta:

$$3.6,\ 1.3,\ 0.5,\ 6.2,\ 1.0,\ 9.8,\ 3.0,\ 3.1,\ 6.5,\ 7.6.$$

a. átlag: $\overline{\xi} = 4.26$,
b. tapasztalati második momentum: $m_2 = 26.9$,
c. tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^2 = 8.7524$,
d. korrigált tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^{*2} = 9.7249$,
e. tapasztalati medián: $\mathrm{med} = 3.35$,
f. medián abszolút eltérés: $\mathrm{MAD} = 2.6$.

2. Maximum likelihood módszer

2. Feladat

A momentumok módszerével, illetve a maximum likelihood módszerrel határozza meg

a. a Bernoulli eloszlásból származó minta ismeretlen p paraméterét,

b. a Poisson eloszlás ismeretlen λ paraméterét,

c. az exponenciális eloszlás ismeretlen λ paraméterét,

d. a normális eloszlás m és σ^2 paraméterét.

2. a. Feladat megoldása

a. **Bernoulli eloszlás.**

A momentumok módszerével könnyű számolni, ugyanis ha ξ Bernoulli eloszlású p paraméterrel, akkor $\mathbb{E}(\xi) = p$, azonban $\mathbb{E}(\xi) \sim \overline{\xi}$, így $\widehat{p} = \overline{\xi}$.

A maximum likelihood módszer már több számolást igényel.

- **Eloszlás:** $\mathbb{P}(\xi = k) = p^k(1-p)^{1-k}$ $(k \in \{0,1\})$;
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n p^{\xi_i}(1-p)^{1-\xi_i}$;
- $\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{p} - \frac{1-\xi_i}{1-p}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)\xi_i - p(1-\xi_i)}{p(1-p)} = 0$
  Szorozzuk meg $/ \cdot p(1-p)$-val:
  $0 = \sum_{i=1}^n ((1-p)\xi_i - p(1-\xi_i)) =$
  $\sum_{i=1}^n(\xi_i - p\xi_i - p + p\xi_i) = \sum_{i=1}^n(\xi_i - p) = \sum_{i=1}^n \xi_i - np = 0,$
  amiből kapjuk, hogy

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i = \overline{\xi},$$

tehát ugyanazt kaptuk, mint a momentumok módszerével.

2. b. Feladat megoldása

b. **Poisson eloszlás.**
A momentumok módszerével könnyű számolni, ugyanis ha $\xi \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \lambda$, de $\mathbb{E}(\xi) \sim \overline{\xi}$, amiből kapjuk, hogy $\widehat{\lambda} = \overline{\xi}$.
A likelihood módszer ugyanerre a megoldásra vezet.

- $p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k \in 0, 1, 2, \dots)$;
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i!} e^{-\lambda}$;
- $l(\lambda) = \log(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \ln(\lambda) - \ln(\xi_i!) - \lambda)$;
- $0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i}{\lambda} - 1 \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{\lambda} - n = 0$;
  amiből kapjuk, hogy

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \overline{\xi}.$$

2. c. Feladat megoldása

c. **Exponenciális eloszlás.**

A momentumok módszerével könnyű számolni, mivel ha $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, azonban $\mathbb{E}(\xi) \sim \overline{\xi}$, amiből kapjuk, hogy

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{\xi}}.$$

A likelihood módszer ugyanehhez a megoldáshoz vezet.

- $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$;
- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda \xi_i}$;
- $l(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} (\ln(\lambda) - \lambda \xi_i)$;
- $0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \xi_i\right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, amiből kapjuk, hogy

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i} = \frac{1}{\overline{\xi}}.$$

2. d. Feladat megoldása

d. **Normális eloszlás.**

A momentumok módszerével ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = m$, $\mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2$. Mivel $\mathbb{E}(\xi) \sim \overline{\xi}$, így $\widehat{m} = \widehat{\xi}$, mivel $\mathbb{D}^2 \sim s_n^2$, így $\sigma^2 \sim s_n^2 = m_2 - \overline{\xi}^2$.

A maximum likelihood módszer alkalmazása sem nehéz, ugyanis

- $f(x, m, \sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ itt most $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, a σ^2-et tekintjük paraméternek.
- $L(m) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\xi_i-m)^2}{2\sigma^2}}$;
- $l(m) = \ln(L(m)) = \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right) - \frac{(\xi_i-m)^2}{2\sigma^2} \right)$;
- $\frac{\partial}{\partial m} l(m) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2(\xi_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i - nm \right) = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$\widehat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \overline{\xi}.$$

2. d. Feladat megoldása, folytatás

A σ^2 ismeretlen paraméter becslése maximum likelihood módszerrel:

- $l(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}} e^{-\frac{(\xi_i - \overline{\xi})^2}{2\sigma^2}}$
- $l(\sigma^2 = \ln(L(\sigma^2)) = \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{(\xi_i - \overline{\xi})^2}{2\sigma^2} \right);$
- $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} l(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(\xi_i - \overline{\xi})^2}{2} \frac{1}{(\sigma^2)^2} \right) = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{2\sigma^2}$
  így kapjuk, hogy $-\sum_{i=1}^n 1 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \overline{\xi})^2 = 0$, amiből kapjuk, hogy
  $$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \overline{\xi})^2 = s_n^2.$$

3. Feladat

$U(0, \vartheta)$ eloszlásból származó minta ismeretlen ϑ paraméterének becslése.

3. Feladat megoldása

Legyen a független minta $U(0, \vartheta)$ eloszlásból $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. **1. Becslés:** $2\overline{\xi}$
ugyanis $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, akkor

$$\mathbb{E}(\overline{\xi}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n} n \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2},$$

így a $2\overline{\xi}$ valóban torzítatlan becslés.

$$\mathbb{D}^2(2\overline{\xi}) = 4\frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{4}{n^2} n \frac{\vartheta^2}{12} = \frac{1}{3n}\vartheta^2$$

3. Feladat megoldása, folytatás

2. Becslés: $\frac{n+1}{n}\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$
Az $\mathbb{F}_{\max}$ és $\mathbb{F}_{\min}$-re vonatkozó egy tétel.
1. lépés: Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_n$ eloszlásfüggvényekkel $\eta := \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, akkor az η eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(x)\dots\mathbb{F}_n(x).$$

ugyanis

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x) = \\
&= \mathbb{P}((\xi_1 < x) \cap (\xi_2 < x) \cap \dots \cap (\xi_n < x)) = \\
&= \mathbb{P}((\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < x)\dots\mathbb{P}(\xi_n < x)) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(x)\dots\mathbb{F}_n(x).
\end{aligned}$$

3. Feladat megoldása, folytatás

2. lépés: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független minta $U(0, \vartheta)$ eloszlásból, ekkor az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eloszlás és sűrűségfüggvénye:

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x < 0; \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n, \text{ ha } 0 \leqslant x < \vartheta; \\ 1, \text{ ha } x \geqslant \vartheta. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\vartheta}\left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1}, \text{ ha } x \in (0\vartheta); \\ 0, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

3. Feladat megoldása, folytatás

várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}(\eta) = \int_0^{\vartheta} x \frac{x}{\vartheta}\left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\vartheta^2}\int_0^{\vartheta} x^n dx =$$

$$= \frac{n}{\vartheta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=\vartheta} = \frac{n}{\vartheta^n}\frac{\vartheta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\vartheta,$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \int_0^{\vartheta} x^2 \frac{n}{\vartheta}\left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^{\vartheta} x^{n+1} dx =$$

$$= \frac{n}{\vartheta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_{x=0}^{x=\vartheta} = \frac{n}{n+2}\frac{\vartheta^{n+2}}{\vartheta^n} = \frac{n}{n+2}\vartheta^2,$$

$$\mathbb{D}^2(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = \frac{n}{n+2}\vartheta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\vartheta\right)^2 =$$

$$= \frac{2n^2 - n}{(n+2)(n+1)^2}\vartheta^2$$

3. Feladat megoldása, folytatás

3. lépés: a ξ_n^* nem jó becslésnek, mivel nem torzítatlan. A torzítatlan becslés $\frac{n+1}{n}\xi_n^*$. $\left(\frac{n+1}{n}\eta\right)$.
A becslés szórása

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{n+1}{n}\eta\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n(2n-1)}{(n+2)(n+1)^2}\vartheta^2 = \frac{2n-1}{n(n+2)}\vartheta^2.$$

Tehát a $2\overline{\xi}$ a hatásosabb becslés.

$$\frac{1}{3n} < \frac{2n-1}{n(n+2)} \iff \frac{1}{3} < \frac{2n-1}{n+2} \iff n+2 < 6n-3$$
$$\iff 5 < 6n \iff \frac{5}{6} < n.$$

Vége az I. gyakorlatnak