

# Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

## 9. előadás

**Egyenlőtlenségek, nagy számok törvényei,  
Központi határeloszlás tétel, további  
mérőszámok**

# 1. Konvergencia fajták

# Konvergencia fajták

Legyen  $(\xi_n)$  valószínűségi változók egy sorozata,  $\xi$  egy valószínűségi változó

## Definíció

Azt mondjuk, hogy  $\xi_n$  tart a  $\xi$ -hez 1 valószínűséggel, ha

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1$$

és  $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$  módon jelöljük.

## Definíció

Azt mondjuk, hogy  $\xi_n$  tart a  $\xi$ -hez sztochasztikusan, ha minden  $\varepsilon > 0$  esetén

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi| > 0 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

és  $\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$  módon jelöljük.

# Gyenge konvergencia

## Definíció

Jelölje  $F_n$  a  $\xi_n$  eloszlásfüggvényét minden  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén, és  $F$  a  $\xi$  eloszlásfüggvényét.

Azt mondjuk, hogy  $\xi_n$  tart a  $\xi$ -hez gyengén, ha  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  minden olyan pontban, amelyben  $F$  folytonos.  $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$  módon jelöljük.

# Kapcsolat a konvergenciafajták között

## Megjegyzés

Az 1 valószínűséggel való konvergencia maga után vonja a sztochasztikus konvergenciát.

## 2. Egyenlőtlenségek

# Markov egyenlőtlenség

## Tétel

Legyen  $\eta$  egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke és  $c > 0$ . Ekkor

$$\mathbb{P}(\eta < c) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\eta)}{c}.$$

# Markov egyenlőtlenség bizonyítása

## Bizonyítás.

Mivel  $\mathbb{P}(\eta < c) = 1 - \mathbb{P}(\xi \geq c)$ , így elegendő bebizonyítani, hogy  $\mathbb{P}(\eta \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(\eta)}{c}$ .

a. Diszkrét esetben:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= \sum_i x_i \mathbb{P}(\xi = x_i) \geq \sum_{x_i \geq c} x_i \mathbb{P}(\eta = x_i) \geq \sum_{x_i \geq c} c \mathbb{P}(\eta = x_i) = \\ &= c \sum_{x_i \geq c} \mathbb{P}(\eta = x_i) = c \mathbb{P}(\eta \geq c).\end{aligned}$$

b. Abszolút folytonos esetben:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= \int_0^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx \geq \int_c^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx \geq \int_c^{+\infty} c f_{\xi}(x) dx = \\ &= c \int_c^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = c \mathbb{P}(\eta \geq c).\end{aligned}$$

# Csebisev egyenlőtlenség

## Tétel

*Legyen  $\xi$  egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik szórásnégyzete és  $\varepsilon > 0$ . Ekkor*

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

# Csebisev egyenlőtlenség

## Bizonyítás.

A Markov egyenlőtlenség következménye. Legyen  $\eta = (\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$ ,  $c = \varepsilon^2$ . Ekkor  $\eta$  egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke. Mivel

$$(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 < c = \varepsilon^2 \iff |\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon,$$

így a Markov egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$



## Következmény

Legyen  $\xi$  egy olyan valószínűségi változó, amelynek létezik szórásnégyzete, akkor annak a valószínűsége, hogy belesik a saját várható értékének  $k\mathbb{D}(\xi)$  sugarú környezetébe legalább  $1 - \frac{1}{k^2}$ , azaz

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < k\mathbb{D}(\xi)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

## Bizonyítás.

A Csebisev egyenlőtlenségből jön ki  $\varepsilon = k\mathbb{D}(\xi)$  választással.  
Például:  $3\sigma$  szabály. ( $\sigma = \mathbb{D}(\xi)$ ):

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$



### 3. Nagy számok törvényei

# A nagy számok gyenge törvényei

A nagy számok gyenge törvényei sztochasztikus konvergenciát mondanak ki.

## Tétel (Csebisev-féle nagy számok törvénye)

*Ha  $\xi_1, \xi_2 \dots$  teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórásnégyzete,  $m$  a közös várható érték,  $\varepsilon > 0$  akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

*(azaz a várható érték közelíthető az átlaggal).*

# Bizonyítása a nagy számok gyenge törvényeinek

## Bizonyítás.

$$\mathbb{E} \left( \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \right) = m,$$
$$\mathbb{D}^2 \left( \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} n \mathbb{D}^2(\xi_1) = \frac{\mathbb{D}^2(\xi_1)}{n}.$$

Így a Csebisev egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - m \right| < \varepsilon \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\mathbb{D}^2(\xi_1)}{\varepsilon^2} \right) = 1.$$



# Bernoulli-féle nagy számok törvényei

## Tétel

*Független kísérletek sorozatát vizsgáljuk és egy  $p$  valószínűséggel következő eseményeinek a számát figyeljük.*

*Jelölje  $\frac{k_n}{n}$  az esemény relatív gyakoriságát, azaz  $n$  kísérletből az  $A$  esemény  $k_n$ -szer következik be. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

*Így nyilván  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\frac{k_n}{n} - p| \leq \varepsilon) = 1$ . (Tehát az esemény relatív gyakorisága visszaadja határértékben az elméleti valószínűséget.) A relatív gyakoriságok sztochasztikusan konvergálnak a valószínűséghez.*

# A Bernoulli-féle nagy számok törvényeinek bizonyítása

## Bizonyítás.

$k_n \sim B(n, p)$ . Így

$$\mathbb{E}\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(k_n) = \frac{1}{n}np = p,$$

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2(k_n) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n},$$

Így a Csebisev egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{k_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$



# A Bernoulli-féle nagy számok törvényeinek bizonyítása, folytatás

## Bizonyítás.

Ha a  $p$  valószínűség nem ismert, akkor a

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{k_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

ugyanis teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy

$$-p(1-p) = p^2 - p = \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$



# Pontosság, megbízhatóság

## Definíció

Az  $\varepsilon$  számot **pontosságnak**, a jobb oldalt **megbízhatóságnak** nevezzük.

Jacob Bernoulli (1654-1705) svájci matematikus.

# A nagy számok erős törvényei

A nagy számok erős törvényei **1-valószínűségben** vagy **majdnem biztos konvergenciát** mondanak ki:

A tétel Nasrollah Etemadi ma is élő, a Chicagói Egyetem professor emeritusától származik.

## Tétel

*Ha  $\xi_1, \xi_2, \dots$  azonos eloszlású, páronként független valószínűségi változók, úgy  $m = \mathbb{E}(\xi_i) < +\infty$ , akkor a  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$  1-valószínűséggel tart  $m$ -hez, azaz*

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m \right) = \mathbb{P} \left( \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)}{n} = m \right) = 1$$

## 4. A centrális határeloszlás tétel

# A centrális határeloszlás tétel

A centrális határeloszlás tétel **gyenge konvergenciát** fogalmaz meg. Központi szerepe van a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában.

## Tétel

*Ha  $\xi_1, \xi_2, \dots$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik véges szórásnégyzetük ( $m = \mathbb{E}(\xi_i)$ ,  $\sigma = \mathbb{D}(\xi_i)$ ), ekkor  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  jelöléssel.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt (= \varphi(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

# A tétel története

A tétel története:

- Az első verzió Abraham de Moivre francia matematikus nevéhez fűződik (1733)
- Pierre-Simon Laplace (1812) újra felfedezi az elméletet
- Alekszandr Mihajlovics Ljapunov (1901) elsőként igazolja a tételt.

Érdekesség, hogy a tétel bizonyítása Alan Turing doktori disszertációjában is szerepel már. Az elnevezés (centrális határeloszlás tétel) Pólya György egy 1920 dolgozatából származik.

## 5. Moivre-Laplace tétel

# Moivre-Laplace tétel

Mivel a binomiális eloszlás független Bernoulli-eloszlások összege, így alkalmazható a centrális határeloszlás tétel.

## Tétel (Moivre-Laplace tétel)

Ha  $\xi \sim B(n, p)$ ,  $0 \leq a < b \leq n$ , akkor

$$\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) \sim \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Vége az 9. előadásnak