Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

8. előadás

Valószínűségi változók II.
Nevezetes valószínűségi vektorváltozók

1. Matematikai alapok

Vektorok transzponáltja

Definíció

Ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ahol az $x_1, x_2, \dots, x_n$ -et az $\mathbf{x}$ vektor komponenseinek nevezzük.
A felírásból látható, hogy egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor mindig **oszlopvektor**.
Ha **sorvektor**ra van szükségünk, akkor a vektor transzponálnunk kell.

$$\mathbf{x}^T := [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Mátrixok

Definíció

Azt mondjuk, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Az a_{ij} elemeket az A mátrix **komponensei**nek nevezzük. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ n sora és m oszlopa van. Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, akkor azt mondjuk, hogy az A mátrix egy $n \times m$ típusú mátrix.

Definíció

Az $n \times n$ típusú mátrixot **négyzetes**, vagy **kvadratikus** mátrixnak nevezzük.

Mátrix transzponáltja

Definíció

Hasonlóképpen a vektorok transzponáltjához, mátrixok körében is értelmezhetjük a transzponálást. Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, akkor $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A transzponálás a sor és oszlopindexeket megcseréli.

Példa

$$A := \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 3}} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 2}}$$

Mátrixok szorzata

Definíció

Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, akkor az A és B mátrixok összeszorozhatóak és $C := AB \in \mathrm{R}^{m \times l}$.
A C mátrix c_{ij} komponense

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Példa

Megjegyzés

Érdemes észrevenni, hogyha $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor mást jelent az $x^T y$ és mást az xy^T. Legyenek mondjuk

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés

- Az $x^T y$, ha $x, y \in \mathbb{R}^3$, akkor $x^T \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, így $x^T y \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$.

$$x^T y = [1\ 3\ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot(-3) = -4.$$

- Az xy^T, ha $x, y \in \mathbb{R}^3$, akkor $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $y^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, így $xy^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$xy^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [2\ 0\ \ -3] = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -9 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Négyzetes mátrix determinánsa

Definíció

- **Az** i**-edik sor szerinti kifejtés** Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij},$$

  ahol A_{ij} az A mátrix (ij)-edik aldeterminánsát jelöli, amit úgy kapunk az A mátrixból, hogy elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát.
  A fenti képletben szereplő D_{ij} számot az A mátrix (i, j)-edik **adjungált aldetermináns**ának nevezzük.
- j**-edik oszlop szerinti kifejtés**ről.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Példa mátrix determinánsának kiszámítására

Számoljuk ki a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát az első, illetve a második sor szerinti kifejtéssel, illetve a máasodik oszlopa szerinti kifejtéssel. (A rövidség kedvéért a $\det(A)$ helyett $|A|$-t írunk.)

- **első sor szerinti kifejtés**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{-3} - 0 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{0} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{4} = 5;$$

Példa mátrix determinánsának kiszámítására

- második sor szerinti kifejtés

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -2\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{-6} +2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-2} -1\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{3} = 5;$$

- második oszlop szerinti kifejtés

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -0\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{0} +2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-2} -3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{-3} = 5;$$

A determináns tulajdonsága, Egységmátrix

Tétel

Szorzástétel

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *valamilyen* $n \geqslant 1$ *esetén.*

Definíció

Egységmátrix egy $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot ($n \times n$ típusú) egységmátrixnak nevezzük, ha

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Invertálható mátrix

Tétel

Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* I *az* $n \times n$ *típusú egységmátrix, akkor*

$$A \cdot I = I \cdot A = A,$$

azaz I *az* $n \times n$ *típusú mátrixok (multiplikatív) félcsoportjának egységeleme. (A félcsoportban az egységelem egyértelműen létezik.)*

Definíció

Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor ha létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, amelyre $A \cdot B = I$, akkor az A mátrix **invertálható** vagy **nemszinguláris mátrix**nak nevezzük. A B mátrixot (létezése esetén) az A mátrix inverzének nevezzük és A^{-1} módon jelöljük.

Tétel

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha* $\det(A) \neq 0$.

2. Valószínűségi vektorváltozók és együttes eloszlásfüggvényük

Valószínűségi vektorváltozók (n-dimenziós eset)

Definíció

A **valószínűségi vektorváltozó** fogalmát kétféle módon tudjuk értelmezni:

- Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, ekkor a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ véletlen vektort valószínűségi vektorváltozónak nevezzük.
- Ha $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, úgy hogy

$$(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) :=$$
$$= \{\omega \in \Omega \mid \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F},$$

  minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén, akkor a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ függvényt **valószínűségi vektorváltozó**nak nevezzük.

Könnyű látni, hogy a kétféle értelmezése egyenértékű.

Valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlásfüggvénye

Definíció

Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ egy valószínűségi vektorváltozó, akkor az $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \mathbb{P}\left(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\right)$$

$((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$ módon definiált függvényt a ξ **valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvényé**nek nevezzük.

Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel

Ha $\mathbb{F}$ *a* $(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ *véletlen vektor eloszlásfüggvénye, akkor*

1. $\mathbb{F}$ *minden változójában balról folytonos;*
2. *Ha* $a_1 < b_1$, $\ldots$, $a_n < b_n$, *akkor*

$$\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}\mathbb{F}\left(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \ldots, \varepsilon_n a_n + (1-\varepsilon_n)b_n\right) \geqslant 0;$$

3. *Határértékek:*
   - $\lim_{x_i \to -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$, *azaz valamelyik változóval tartunk a 0-hoz, akkor az* $\mathbb{F}$ *függvény határértéke 0.*
   - $\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \\ \cdots \\ x_n \to +\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 1$, *azaz ha mindegyik változóval tartunk a* $+\infty$*-hez, akkor az* $\mathbb{F}$ *függvény határértéke 1.*

3. Valószínűségi vektorváltozók fajtái

Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ **valószínűségi vektorváltozót** **diszkrét**nek nevezünk, ha értékkészlete megszámlálható. Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó

- **értékkészletét**

  $$\{(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_n}) | i_1 = 1, 2, \ldots, i_2 = 1, 2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots\}$$

  úgy, hogy

  $$\mathbb{P}\left((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})\}\right) = 1.$$

- **eloszlása**

  $$p_{i_1, i_2, \ldots, i_n} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2} \ldots, \xi_n = x_{i_n})$$

  minden $i_1 = 1, 2, \ldots, i_2 = 1, 2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots$ esetén.

Diszkrét véletlen vektorváltozók együttes eloszlásának tulajdonságai

Tétel

Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *diszkrét véletlen vektorváltozók*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} | i_1 = 1, 2, \ldots; i_2 = 1, 2, \ldots; \ldots; i_n = 1, 2, \ldots, \},$$

értékekkel, és

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}).$$

együttes eloszlással, akkor

1. $p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \geqslant 0,$
2. $\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1.$

Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ **valószínűségi vektorváltozót abszolút folytonos**nak nevezünk, ha létezik egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy

$$\mathbb{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n$$

minden $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén.
Az f függvényt az abszolút folytonos **valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényé**nek nevezzük.

Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai

Tétel

Ha $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, akkor az* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *együttes sűrűségfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ *minden* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *esetén, (ami inkább megállapodás, mint tulajdonság);*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n = 1.$

4. Valószínűségi vektorváltozó várható érték vektora és variancia mátrixa

A várható érték vektor

Definíció

A $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ **valószínűségi vektorváltozó várható érték vektora** az

$$\mathbb{E}(\xi) := [\mathbb{E}(\xi_1), \mathbb{E}(\xi_2), \ldots, \mathbb{E}(\xi_n)]^T$$

vektor.

A várható érték vektor tulajdonságai

Tétel

Legyenek $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ *valószínűségi vektorváltozók,* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. *A várható érték*

1. ***additív**, azaz* $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$,
2. ***homogén**, azaz* $\mathbb{E}(A\xi) = A\mathbb{E}(\xi)$,
3. ***eltolással kapcsolatos tulajdonság**, ami azt jelenti, hogy* $\mathbb{E}(\xi + \boldsymbol{b}) = \mathbb{E}(\xi) + \boldsymbol{b}$

A variancia mátrix

Definíció

A $\xi := [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ **valószínűségi változó variancia mátrixá**nak a

$$\mathrm{var}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(\xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}^2(\xi_2) & \ldots & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_n, \xi_2) & \ldots & \mathbb{D}^2(\xi_2) \end{bmatrix}$$

mátrixot nevezzük.
Tehát $\mathrm{var}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, amelynek (ij)-edik komponense a $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$.

A varianciamátrix tulajdonságai

Tétel

Legyen $\xi := [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ *egy valószínűségi vektorváltozó. Ekkor a* $\mathrm{var}(\xi) \in \mathrm{R}^{n \times n}$ *mátrix*

1. ***Pozitív szemidefinit mátrix****, azaz minden* $x \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $x^T \mathrm{var}(\xi) x \geqslant 0$.
2. ***Négyzetesen homogén****, azaz minden* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *esetén* $\mathrm{var}(A\xi) = A\mathrm{var}(\xi)A^T$.
3. ***Transzláció invariáns****, azaz minden* $B \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $\mathrm{var}(\xi + B) = \mathrm{var}(\xi)$.

5. Nevezetes diszkrét valószínűségi vektorváltozók

A polinomiális eloszlás

Definíció

Legyen $r \geqslant 2$, B_1, B_2, ..., B_r egy teljes eseményrendszer p_1, p_2, ..., p_r valószínűségekkel. n független kísérletet végzünk és azt számoljuk, hogy a B_1, B_2, ..., B_r események közül melyik hányszor következik be.
Jele: $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r]^T \sim \text{Polinom}(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$.
Eloszlása:

$$p_{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

ahol $0 \leqslant k_i \leqslant n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.
A várható érték vektora és variancia-mátrixa:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = np_i, \qquad \mathbb{D}^2(\xi_i) = np_i(1 - p_i), \qquad \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = -np_i p_j \qquad (i \neq j).$$

Polihipergeometrikus eloszlás

Definíció

Visszatevés nélküli golyóhúzás urnából több mint két szín esetén. Használjuk a következő jelöléseket

N: golyók száma,

r: a színek száma,

$s_1, s_2, \ldots, s_r$: a különböző színű golyók száma ($s_1 + s_2 + \cdots + s_r = N$),

n: ennyi golyót húzunk.

Az együttes eloszlás:

$$p_{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \mathbb{P}(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r) = \frac{\binom{s_1}{k_1}\binom{s_2}{k_2}\ldots\binom{s_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}$$

ahol $0 \leqslant k_i \leqslant s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ és $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

A várható érték vektora és variancia-mátrixa:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = n\frac{s_i}{N}, \quad \mathbb{D}^2(\xi_i) = n\frac{N-n}{N-1}\frac{s_i}{N}\left(1 - \frac{s_i}{N}\right) \quad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = -\frac{N-n}{N-1}\frac{s_i}{N}\frac{s_j}{N}$$

$(i \neq j)$.

6. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

Többdimenziós egyenletes eloszlás

Most csak a kétdimenziós esetet tárgyaljuk, a többdimenziós egyenletes eloszlás analóg módon tárgyalható.

Definíció

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy összefüggő korlátos nyílt (vagy zárt) halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ vektorváltozó egyenletes eloszlású a D halmazon, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} C, & \text{ha } (x,y) \in D \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $C = \frac{1}{m(D)} =$, ahol $m(D)$ a D halmaz területét jelöli.

n-dimenziós standard normális eloszlás

Definíció

Legyenek $\eta_1, \ldots, \eta_n$ standard normális eloszlású teljesen független valószínűségi változók. Ekkor az $\eta = [\eta_1, \ldots, \eta_n]^T$ valószínűségi változót **n-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó**nak nevezzük. Jele: $\eta \sim \mathcal{N}(0, I)$.

Együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A várható érték vektora és variancia-mátrixa

$$\mathbb{E}(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{var}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

n-dimenziós nem elfajuló normális eloszlás

Definíció

Legyen η egy n-dimenziós standard normális valószínűségi vektorváltozó, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ úgy, hogy $\det(A) \neq 0$, és $m \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a $\xi \sim \eta + m$ valószínűségi változót n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. Jele $\xi \sim \mathcal{N}(m, D)$, ahol $D = AA^T$.

Együttes eloszlásfüggvénye:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det(D))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T D^{-1}(x-m)\right)$$

$(x \in \mathbb{R}^n)$.

A várható érték vektora és variancia-mátrixa

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \qquad \mathrm{var}(\xi) = AA^T.$$

2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók

Tétel

Legyen (ξ_1, ξ_2) *olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek paraméterei:* $m_1 = \mathbb{E}(\xi_1)$, $\sigma_1^2 = \mathbb{D}^2(\xi_1)$, $m_2 = \mathbb{E}(\xi_2)$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}^2(\xi_2)$, $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\xi_1, \xi_2)$. *Ekkor az együttes sűrűségfüggvény:*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\mathrm{r}^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + 2\mathrm{r}\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma 2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Vége a 8. előadásnak