

# Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

## 7. előadás

# Valószínűségi vektorváltozók (kétdimenziós eset)

# 1. Valószínűségi vektorváltozók

# Valószínűségi vektorváltozók kétféle értelmezése

Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

1. Ha  $\xi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változók, akkor a  $(\xi_1, \xi_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük.
2. A  $(\xi_1, \xi_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük, ha minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén

$$(\xi_1 < x, \xi_2 < y) := \{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) < x \text{ és } \xi_2(\omega) < y\} \in \mathcal{F}.$$

## A kétféle értelmezés egyenértékű

1.  $\implies$  2.: Legyenek  $x, y \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós számok. Ekkor mivel  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók, így  $(\xi_1 < x) \in \mathcal{F}$  és  $(\xi_2 < y) \in \mathcal{F}$ . Ekkor azonban

$$(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = (\xi_1 < x) \cap (\xi_2 < y) \in \mathcal{F}.$$

2.  $\implies$  1. Tegyük fel, hogy a  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó. Megmutatjuk, hogy ekkor a  $\xi_1$  (első komponens) egy valószínűségi változó. Mivel minden  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén  $(\xi_1 < x, \xi_2 < n) \in \mathcal{F}$ , így  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_1 < x, \xi_2 < n) \in \mathcal{F}$ . Azonban

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_1 < x, \xi_2 < n) &= (\xi_1 < x) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_2 < n) = \\ &= (\xi_1 < x) \cap \Omega = (\xi_1 < x). \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy  $(\xi_1 < x) \in \mathcal{F}$  tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  estén. Hasonló módon látható, hogy a  $\xi_2$  (tehát a második komponens) szintén valószínűségi változó.

# Együttes eloszlás egy fontos tulajdonsága

## Tétel

Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , akkor a

$$(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = \{\omega \in \Omega \mid \xi_1(\omega) = x \text{ és } \xi_2(\omega) = y\} \in \mathcal{F}.$$

## 2. Az együttes eloszlásfüggvény és tulajdonságai

# Együttes eloszlásfüggvény

## Definíció

Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó, akkor az  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) := \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

módon definiált függvényt a  $(\xi_1, \xi_2)$  valószínűségi vektorváltozó **együttes eloszlásfüggvényének** nevezzük.

# Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó  $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  együttes eloszlásfüggvénnyel. Ekkor  $\mathbb{F}$  rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. Mindkét változójában növekvő és balról folytonos.
2. (a monoton növekvés helyett): Ha  $a_1 < b_1$  és  $a_2 < b_2$ , akkor

$$\mathbb{F}(b_1, b_2) - \mathbb{F}(a_1, b_2) - \mathbb{F}(b_1, a_2) + \mathbb{F}(a_1, a_2) \geq 0;$$

3. Határértékek:

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 0, \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2) = 1.$$

1. Először megmutatjuk, hogy az együttes eloszlásfüggvény mindkét változójában **monoton növekvő**. Ez könnyen kijön például a valószínűség monotonitása alapján. Ehhez legyenek  $x_1 < x_2$  és  $y \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Ekkor  $(\xi_1 < x_1, \xi_2 < y) \subseteq (\xi_1 < x_2, \xi_2 < y)$ , amiből kapjuk, hogy

$$\mathbb{F}(x_1, y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < y) \leq \mathbb{P}(\xi_1 < x_2, \xi_2 < y) = \mathbb{F}(x_2, y).$$

Most megmutatjuk, hogy az együttes eloszlásfüggvény az első változójában **balról folytonos**, azaz  $\mathbb{F}(x_0 - 0, y_0) = \mathbb{F}(x_0, y_0)$  minden  $x_0, y_0$  valós szám esetén.

Mivel az együttes eloszlásfüggvény az első változójában monoton növekvő, ezért az első változójában léteznek mindkét oldali határértékei. A valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

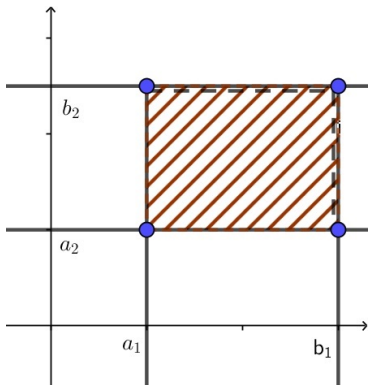
$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x_0 - 0, y_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F}\left(x_0 - \frac{1}{n}, y_0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left(\xi_1 < x_0 - \frac{1}{n}\right) \cap (\xi_2 < y_0)\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\xi_1 < x_0 - \frac{1}{n}\right) \cap (\xi_2 < y_0)\right) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_0, \xi_2 < y_0) = \\ &= \mathbb{F}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

## 2. Bizonyítása

2. Legyenek  $a_1 < b_1$  és  $a_2 < b_2$ . Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\xi_1, \xi_2) \in [a_1, b_1[ \times [a_2, b_2[) &= \\ &= \mathbb{F}(b_1, b_2) - \mathbb{F}(a_1, b_2) - \mathbb{F}(b_1, a_2) + \mathbb{F}(a_1, a_2)\end{aligned}$$

amiből a valószínűség nemnegativitása alapján kapjuk az állítást.



### 3. Bizonyítása

3. A 2. pontbeli gondolatmenettel analóg módon kapjuk, hogy

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(\emptyset \cap (\xi_2 < x_2)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}((\xi_2 < x_2) \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} \mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}((\xi_1 \in \mathbb{R}) \cap (\xi_2 \in \mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

### 3. Diszkrét és abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

# Diszkrét valószínűségi vektorváltozók

## Definíció

Egy  $(\xi_1, \xi_2)$  **valószínűségi vektorváltozót diszkrétnek** nevezünk, ha létezik  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ ) megszámlálhatóan sok elem úgy, hogy

$$\mathbb{P}((\xi_1, \xi_2) \in \{(x_i, y_i) | i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}) = 1,$$

(azaz a  $(\xi_1, \xi_2)$  értékészlete megszámlálható).

- Az  $((x_i, y_j))$  halmazz a  $(\xi_1, \xi_2)$  **diszkrét valószínűségi vektorváltozó értékészletének**,
- a  $(p_{ij})$   $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$  sorozatot  $(\xi_1, \xi_2)$  **diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlásának** nevezünk.

# Diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlásának tulajdonságai

## Tétel

*Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó, akkor*

- $p_{ij} \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ );
- $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ .

# Bizonyítás

## Bizonyítás.

- A valószínűség nemnegativitása alapján nyilvánvaló.
- A valószínűség  $\sigma$ -additivitása (vagy véges additivitása) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j p_{ij} &= \sum_i \sum_j \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_i \bigcup_j (\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.\end{aligned}$$



# Abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozók

## Definíció

Egy  $(\xi_1, \xi_2)$  valószínűségi vektorváltozót **abszolút folytonosnak** nevezünk, ha létezik  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény úgy, hogy

$$\mathbb{F}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Az  $f$  függvényt a  $(\xi_1, \xi_2)$  valószínűségi vektorváltozó **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

# Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényének tulajdonságai

## Tétel

*Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó  $f$  sűrűségfüggvényével, akkor*

- $f(x, y) \geq 0$  minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  esetén  
( $f$  negatív értéket az  $\mathbb{R}^2$  legfeljebb Lebesgue 0-mértékű halmazán vehet fel.);*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) = 1$ .*

## 4. Valószínűségi vektorváltozó marginális eloszlásai

# Marginális eloszlások

## Definíció

Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó, akkor a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változókat a  $(\xi_1, \xi_2)$  vektorváltozók **marginális eloszlásainak** nevezzük.

# Marginálisok eloszlásfüggvényei

## Tétel

Legyen  $(\xi_1, \xi_2)$  egy valószínűségi vektorváltozó.

1. Jelölje  $\mathbb{F}$  a  $(\xi_1, \xi_2)$  véletlen vektor együttes eloszlásfüggvényét,  $\mathbb{F}_1$  a  $\xi_1$  és  $\mathbb{F}_2$  a  $\xi_2$  marginális eloszlások eloszlásfüggvényeit.  
Ekkor

$$\mathbb{F}_1(x) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x, x_2) \quad \mathbb{F}_2(y) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x_1, y)$$

## Bizonyítás.

1. Mivel  $\mathbb{F}(\cdot, \cdot)$  mindkét változójában monoton növekvő, így a

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x_1, y), \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x, x_2)$$

határértékek léteznek, és könnyen meghatározhatók. Ekkor a valószínűség folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x, x_2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{F}(x, n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < n) = \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\xi_1 < x\right) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_2 < n)\right) = \\ &= \mathbb{P}((\xi_1 < x) \cap \Omega) = \mathbb{P}(\xi_1 < x) = \mathbb{F}_1(x). \end{aligned}$$

A  $\xi_2$ -re vonatkozó összefüggés hasonló módon látható be.



## Marginálisok eloszlásai diszkrét esetben

### Tétel

2. Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó, akkor  $(x_i, y_j)$  értékekkel és  $p_{ij} := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$  együttes eloszlással, akkor a  $\xi_1$  diszkrét valószínűségi változó  $x_1, x_2, \dots$  értékekkel és  $\xi_2$  diszkrét valószínűségi változó  $y_1, y_2, \dots$  értékekkel. A  $\xi_1$  és  $\xi_2$  eloszlása

$$p_{i\cdot} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_2 = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

minden  $(i = 1, 2, \dots)$   $(j = 1, 2, \dots)$  esetén;

# Bizonyítás

## Bizonyítás.

2. A valószínűség  $\sigma$ -additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_i. &= \mathbb{P}(\xi_1 = x_i) = \mathbb{P}((\xi_1 = x_i) \cap \Omega) = \\ &= \mathbb{P}\left((\xi_1 = x_i) \cap \bigcup_j (\xi_2 = y_j)\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_j ((\xi_1 = x_i) \cap (\xi_2 = y_j))\right) = \\ &= \sum_j \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \sum_j p_{ij}. \end{aligned}$$

A  $\xi_2$ -re vonatkozó állítás analóg módon igazolható.



# Marginálisok sűrűségfüggvényei

## Tétel

3. Ha  $(\xi_1, \xi_2)$  egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor  $\xi_1$  és  $\xi_2$  abszolút folytonos valószínűségi változók  $f_1, f_2$  sűrűségfüggvényekkel és

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx,$$

minden  $x \in \mathbb{R}$  és  $y \in \mathbb{R}$  esetén.

# Bizonyítás

## Bizonyítás.

3. Könnyen kijön abból a korábbi tételünkből, amikor a marginális együttesfüggvényt határoztuk meg az együttes eloszlásfüggvényből határátmenet segítségével.

$$\int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \right) du = \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbb{F}(x, y) = \mathbb{F}_1(x),$$

amiből kapjuk, hogy

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv.$$

Az  $f_2$ -re vonatkozó állítás hasonlóan látható.



## 5. A kovariancia fogalma és tulajdonságai

# Kovariancia

Már találkoztunk a  $\xi_1$  és a  $\xi_2$  valószínűségi változók kovarianciájának a fogalmával, amit

- $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) := \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)))$  módon definiáltunk, és
- $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)$  módon számolunk.

## Az $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$ várható értékének a kiszámítása

A fenti összefüggésben szereplő  $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$  várható érték könnyen kiszámolható a valószínűségi vektorváltozókra vonatkozó transzformációs szabály alapján.

- **diszkrét esetben**

$$\mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij},$$

- **abszolút folytonos esetben**

$$\mathbb{E}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dy dx.$$

## Kovariancia kiszámolása

A kovariancia kiszámolására adott összefüggés kijön a várható érték additivitása és homogenitása (tehát linearitása) alapján:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1\xi_2 - \xi_1\mathbb{E}(\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\xi_2 + \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2)) = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - 2\mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) + \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) \\ &= \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2).\end{aligned}$$

# A kovariancia tulajdonságai

## Tétel

*A kovariancia egy szimmetrikus bilineáris forma, amelyből származó kvadratikus forma pozitív szemidefinit. Egy kicsit jobban részletezve ez azt jelenti, hogy a kovariancia*

- 1. Szimmetrikus,**
- 2. Bilineáris,**
  - **Homogenitás az első változóban:**
  - **Additivitás az első változóban:**
- 3. Pozitív szemidefinit,**
- 4. Eltolásinvariáns,**
- 5. Cauchy-Bunyakovszkij-Shwarz egyenlőtlenség** ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  olyan valószínűségi változók, amelyek létezik szórásnégyzetük, akkor

$$|\text{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leq \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2).$$

# A kovariancia szimmetrikus

## Tétel

1. **Szimmetrikus**, azaz  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \text{cov}(\xi_2, \xi_1)$ .

## Bizonyítás.

1. A  $\text{cov}$  szimmetrikus volta definíció alapján nyilvánvaló, ugyanis

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi_1, \xi_2) &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \\ &= \mathbb{E}((\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))) = \text{cov}(\xi_2, \xi_1).\end{aligned}$$



# A kovariancia bilineáris

## Tétel

2. **Bilineáris**, azaz mindkét változójában homogén és additív, amihez a szimmetria miatt elegendő az első változóbeli homogenitást és additivitást igazolni.

- **Homogenitás az első változóban:**

$$\text{cov}(\lambda\xi_1, \xi_2) = \lambda\text{cov}(\xi_1, \xi_2).$$

- **Additivitás az első változóban:**

$$\text{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \text{cov}(\xi_1, \eta) + \text{cov}(\xi_2, \eta);$$

# A kovariancia bilinearitásának bizonyítása

## Bizonyítás.

2. Megmutatjuk, hogy mindkét változójában additív és homogén.

- Additív az első változójában, ugyanis a várható érték additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) &= \mathbb{E}((\xi_1 + \xi_2 - \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2))(\eta - \mathbb{E}(\eta))) = \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\eta - \mathbb{E}(\eta)) + (\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))(\eta - \mathbb{E}(\eta))) = \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\eta - \mathbb{E}(\eta))) + \mathbb{E}((\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))(\eta - \mathbb{E}(\eta))) = \\ &= \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta).\end{aligned}$$

- homogén az első változójában, ugyanis a várható érték homogenitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\lambda\xi_1, \xi_2) &= \mathbb{E}(\lambda\xi_1 - \mathbb{E}(\lambda\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)) = \\ &= \mathbb{E}(\lambda(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1)))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2)) = \\ &= \lambda\mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \lambda\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2).\end{aligned}$$



# A kovariancia pozitív szemidefinit

## Tétel

3. *Pozitív szemidefinit*: a belőle származó úgynevezett kvadratikus forma pozitív szemidefinit, azaz  $\text{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}^2(\xi) \geq 0$ .

## Bizonyítás.

3. (Pozitív szemidefinit) Mivel a kovarianciából származó kvadratikus forma éppen a szórásnégyzet, ami pozitív szemidefinit, így ez az állítás nyilvánvaló.



# A kovariancia eltolásinvariáns

## Tétel

4. **Eltolásinvariáns**, azaz ha  $\xi_1, \xi_2$  valószínűségi változók  $c_1, c_2$  valós számok, akkor  $\text{cov}(\xi_1 + c_1, \xi_2 + c_2) = \text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ .

## Bizonyítás.

4. A bizonyítás könnyen megkapható a várható érték eltolással kapcsolatos tulajdonságából:

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi_1 + c_1, \xi_2 + c_2) &= \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 + c_1) - \mathbb{E}(\xi_1 + c_1))((\xi_2 + c_2) - \mathbb{E}(\xi_2 + c_2)) = \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) = \text{cov}(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$



# Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

## Tétel

5. Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  olyan valószínűségi változók, amelynek létezik szórásnégyzetük, akkor

$$|\text{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leq \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2);$$

## Bizonyítás.

5. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség. Ha  $\mathbb{D}^2(\xi_1) = 0$  és  $\xi_2$  tetszőleges, akkor létezik  $c \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\mathbb{P}(\xi_1 = c) = 1$ . Így a kovariancia eltolásinvarianciája és első változóbeli additivitása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi_1, \xi_2) &= \text{cov}(c, \xi_2) = \text{cov}(0, \xi_2) = 0, \\ \mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2) &= 0\mathbb{D}(\xi_2) = 0;\end{aligned}$$

így a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség mindkét oldala 0, azaz egyenlőséggel teljesül.

Ha  $\xi_1$  tetszőleges,  $\mathbb{D}^2(\xi_2) = 0$ , akkor az előző lépéssel analóg módon kapjuk, hogy  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ ,  $\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2) = 0$ , tehát a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség megint csak egyenlőséggel teljesül.

Most tegyük fel, hogy  $\mathbb{D}^2(\xi_1) \neq 0$  és  $\mathbb{D}^2(\xi_2) \neq 0$ . Definiáljuk a  $g(\lambda)$  valós együtthatós másodfokú polinomot  $g(\lambda) := \mathbb{D}^2(\lambda\xi_1 + \xi_2)$  módon. Ekkor a szórásnégyzet megfelelő tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$0 \leq g(\lambda) = \underbrace{\mathbb{D}^2(\xi_1)}_a \lambda^2 + \underbrace{2\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}_b \lambda + \underbrace{\mathbb{D}^2(\xi_2)}_c,$$

ami mutatja, hogy a  $g(\lambda)$  polinomnak egy darab kétszeres valós gyöke van, vagy nincs valós gyöke. Így a  $g(\lambda)$  polinom  $D$  diszkriminánsa kisebb vagy egyenlő nullánál, azaz

$$D = b^2 - 4ac = (2\text{cov}(\xi_1, \xi_2))^2 - 4\mathbb{D}^2(\xi_1)\mathbb{D}^2(\xi_2) \leq 0,$$

amiből rendezéssel kapjuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget.

## 6. A korrelálatlanság és a függetlenség kapcsolata

# Független valószínűségi változók

## Definíció

A  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változókat **függetleneknek** nevezzük, ha minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y).$$

# Valószínűségi változók függetlenségének karakterizációja

## Tétel

A  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

1. **Eloszlásfüggvény segítségével**  $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$  minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén, azaz az együttes eloszlásfüggvényük egyenlő a marginális eloszlásfüggvények szorzatával,
2. **Diszkrét esetben**  $p_{ij} = p_i \cdot p_j$  minden  $i = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$  esetén, azaz az együttes eloszlásuk egyenlő a marginálisok szorzatával,
3. **Abszolút folytonos esetben**  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén, azaz az együttes eloszlásfüggvény egyenlő a marginális eloszlásfüggvények szorzatával.

# Bizonyítás

1. Legyenek  $x, y \in \mathbb{R}$  tetszőlegesek. Ekkor

$$\mathbb{F}(x, y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(y).$$

2. Megmutatjuk, hogyha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  független diszkrét valószínűségi változók, akkor  $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ .

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 \in \left]x_i - \frac{1}{n}, x_i\right], \xi_2 \in \left]y_j - \frac{1}{m}, y_j\right]\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 \in \left]x_i - \frac{1}{n}, x_i\right]\right) \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\xi_2 \in \left]y_j - \frac{1}{m}, y_j\right]\right) = \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = x_i) \mathbb{P}(\xi_2 = y_j) = p_i \cdot p_j \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogyha  $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ , akkor  $\xi_1$  és  $\xi_2$  függetlenek.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x, y) &= \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = \sum_{x_i < x, y_j < y} p_{ij} = \sum_{x_i < x} p_i \cdot \sum_{y_j < y} p_j = \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 < x)\mathbb{P}(\xi_2 < y) = \mathbb{F}_1(x)\mathbb{F}_2(y). \end{aligned}$$

3. Megmutatjuk, hogyha  $\xi_1, \xi_2$  független abszolút folytonos valószínűségi változók, akkor  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ .  
Legyenek  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x_0, y_0) &= \mathbb{F}_1(x_0)\mathbb{F}_2(y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y_0} f_2(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f_1(x)f_2(y)dydx, \end{aligned}$$

másrészt

$$\mathbb{F}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y)dxdy,$$

ami (mértékelméleti megfontolások alapján) csak úgy lehet, ha  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ .

Megmutatjuk, hogyha  $\xi_1, \xi_2$  olyan abszolút folytonos valószínűségi változók, hogy  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , akkor  $\xi_1$  és  $\xi_2$  függetlenek.  
Legyenek  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x_0, y_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f_1(x)f_2(y)dydx = \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y_0} f_2(y)dy = \mathbb{F}_1(x_0)\mathbb{F}_2(y_0). \end{aligned}$$

## Tétel

*Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  olyan független valószínűségi változók, hogy léteznek az  $\mathbb{E}(\xi_1)$ ,  $\mathbb{E}(\xi_2)$  és az  $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$  várható értékek, akkor*

$$\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2).$$

*A megfordítás sajnos nem igaz.*

## Bizonyítás

A bizonyítás a valószínűségi változókra vonatkozó transzformációs szabályán alapul. Az  $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)$  kiszámításához a  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) := xy$  függvényt használjuk.

- Diszkrét esetben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) &= \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} = \sum_{ij} x_i y_j p_{i \cdot} p_{\cdot j} = \sum_i x_i p_{i \cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} = \\ &= \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2).\end{aligned}$$

- Abszolút folytonos esetben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_1(x)f_2(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y) dy = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2).\end{aligned}$$

# A függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata

A fentiek alapján a függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata nyilvánvaló. Valószínűségi változók függetlensége maga után vonja a korrelálatlanságukat. Ez könnyen kijön a kovariancia kiszámítási szabályából és abból, hogy független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával, azaz ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  függetlenek, akkor

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = 0.$$

A megfordítás azonban nem igaz, két valószínűségi változó tud úgy korrelálatlan lenni, hogy nem függetlenek, mint ahogy ezt a következő példa is mutatja.

## Korrelálatlan, de nem független

### Példa

Megadunk két valószínűségi változót, amelyek korrelálatlanok, de nem függetlenek.

- Diszkrét eset: Legyen  $(\xi_1, \xi_2)$  egy diszkrét valószínűségi vektorváltozó melyek együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 5$
$x_1 = 4$	0.1	0.2	0.1
$x_2 = 6$	0.1	0.4	0.1

Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) = 0$ , amiből kapjuk, hogy  $\xi_1$  és  $\xi_2$  korrelálatlanok, azonban nem függetlenek, mivel a marginális eloszlások szorzata nem adja vissza az együttes eloszlást.

# Korrelálatlan, de nem független

## Példa

- Abszolút folytonos eset: Legyen  $(\xi_1, \xi_2)$  valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + x^3y - xy^3), & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor megint csak egyszerű számolás mutatja, hogy  $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = 0$ , amiből egyből kapjuk,  $\xi_1$  és  $\xi_2$  korrelálatlanok. Azonban  $\xi_1 \sim U(-1, 1)$ ,  $\xi_2 \sim U(-1, 1)$ , tehát nem függetlenek, ugyanis a marginális sűrűségfüggvények szorzata nem adja vissza az együttes eloszlásfüggvényt. Ez a példa Denkinger Géza példatárában található.

## 2. Példa

### Példa

Két pörgettyűvel pörgetünk, egy pirossal és egy kékkel. Mindkét pörgettyűn az 1, 2, 3 számokat lehet kipörgetni azonos valószínűséggel. Jelölje  $\xi$  a kipörgetett két szám összegét,  $\eta$  a kék pörgettyűvel kipörgetett számot. Határozzuk meg a  $\text{cov}(\xi, \eta)$  érték.

**Megoldás:** Felhasználjuk a kovariancia első változóbeli additivitását, valamint azt a tényt, hogy a  $\xi_1$  és a  $\xi_2$  függetlenek, így korrelálatlanok.

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi, \eta) &= \text{cov}(\xi_1 + \xi_2, \xi_2) = \text{cov}(\xi_1, \xi_2) + \text{cov}(\xi_2, \xi_2) = \\ &= 0 + \text{cov}(\xi_2, \xi_2) = \mathbb{D}^2(\xi_2).\end{aligned}$$

## Megoldás

Így elegendő kiszámolnunk a  $\xi_2$  valószínűségi változó szórásnégyzetét, ami egyszerű feladat:

A  $\xi_2$  valószínűségi változó eloszlása:

$x_i$	1	2	3
$p_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Amból kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2,$$

$$\mathbb{E}(\xi_2^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 + 4 + 9}{3} = \frac{14}{3},$$

$$\mathbb{D}^2(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_2^2) - (\mathbb{E}(\xi_2))^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3},$$

$$\text{Így } \text{cov}(\xi, \eta) = \frac{2}{3}.$$

## 7. A korrelációs együttható

# Korrelációs együttható

## Definíció

Ha  $\xi_1, \xi_2$  olyan valószínűségi változók, amelyeknek pozitív a szórásuk, akkor az

$$r(\xi_1, \xi_2) := \frac{\text{COV}(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}(\xi_1)\mathbb{D}(\xi_2)}$$

valós számot a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változók **korrelációs együtthatójának** nevezzük.

# A korrelációs együttható tulajdonsága

## Tétel

1.  $|r(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$ ,
2. Ha  $\lambda_1, \lambda_2$  zérustól különböző valós számok,  $c_1, c_2$  tetszőleges valós számok, akkor

$$r(\lambda_1 \xi_1 + c_1, \lambda_2 \xi_2 + c_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_1 \lambda_2) r(\xi_1, \xi_2),$$

ahol  $\operatorname{sgn}$  a szignumfüggvény, amit

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

módon definiálunk tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

# Bizonyítás

1. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schvarcz egyenlőtlenség közvetlen következménye.
2. Könnyen kijön a kovariancia és a szórás megfelelő tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned} r(\lambda_1 \xi_1 + c_1, \lambda_2 \xi_2 + c_2) &= \frac{\text{cov}(\lambda_1 \xi_1 + c_1, \lambda_2 \xi_2 + c_2)}{\mathbb{D}(\lambda_1 \xi_1 + c_1) \mathbb{D}(\lambda_2 \xi_2 + c_2)} = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{|\lambda_1 \lambda_2| \mathbb{D}(\xi_1) \mathbb{D}(\xi_2)} = \text{sgn}(\lambda_1 \lambda_2) r(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Vége az 7. előadásnak