Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

6. előadás

Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

1. Matematikai eszközök

Valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

Definíció

Egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

módon definiált függvényt nevezzük.

A karakterisztikus függvények tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $\mathbb{E}(|\xi|) < +\infty$, *akkor*
$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{\varphi'(0)}{i};$$
2. *Ha* $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$, *akkor* $\mathbb{E}(\xi^2) = -\varphi''(0)$, *így*
$$\mathbb{D}^2(\xi) = -\varphi''(0) + \varphi'(0)^2.$$
3. *Ha* ξ_1 *és* ξ_2 *független valószínűségi változók, akkor*
$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t),$$
azaz a karakterisztikus függvény független összeget szorzatba visz.

Egyértelműségi tétel

Tétel

- *Egyértelműségi tétel:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

azaz a karakterisztikus függvény visszaadja az abszolút folytonos eloszlást, amelyből származik.

Momentumok módszere

Gyakran előfordul, hogy a minta ismert eloszlásból származik, de az eloszlás paraméterei ismeretlenek. Az ismeretlen paraméterek kifejezhetőek a momentumokból (illetve a tapasztalati momentumokból), bár sokszor nemlineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ezt a módszert is szokás a **momentumok módszeré**nek nevezni.

Sűrűségfüggvények konvolúciója

Definíció

Ha $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ két integrálható függvény, akkor ezek $f_1 * f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ módon jelölt **konvolúció**ját

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - t) f_2(t) dt \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

módon definiáljuk.

Sűrűségfüggvények konvolúciójára vonatkozó tétel

Tétel

Legyenek ξ_1 és ξ_2 független abszolút folytonos valószínűségi változók f_1 és f_2 sűrűségfüggvényekkel.
Ekkor a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = (f_1 * f_2)(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

tehát független abszolút folytonos valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvénye egyenlő a valószínűségi változók sűrűségfüggvényeinek a konvolúciójával.

2. Nevezetes abszolút folytonos valószínűségi változók

Az egyenletes eloszlás

Definíció

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon**, ha a részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával. Jele: $\xi \sim U(a, b)$.
A ξ valószínűségi változó **eloszlás függvénye**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\xi \sim U(a,b)$ akkor a ξ valószínűségi változó ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Az exponenciális eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$ egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó λ **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó, ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

$$\mathbb{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0; \end{cases} \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim Exp(\lambda)$.

Az exponenciális eloszlás várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\xi \sim$ Exp(λ), akkor a ξ valószínűségi változó ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Az exponenciális eloszlás tulajdonságai:

Tétel

1. ***Örökifjú tulajdonság:*** *Ha* $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, *akkor*

$$\mathbb{P}(\xi < s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi < t) \qquad (s, t > 0).$$

2. ***Poisson folyamat:*** *Ha időegység alatt bekövetkező események száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor két egymást követő bekövetkezés között eltelt idő exponenciális eloszlású ugyanazzal a* λ *paraméterrel.*

A normális eloszlás

Definíció

Azt mondjuk, hogy az η valószínűségi változó **standard normális** (jele:$\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$), ha **eloszlás**, illetve **sűrűségfüggvénye**:

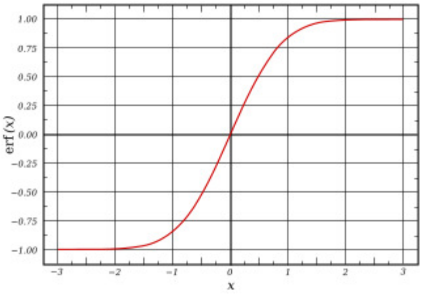
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

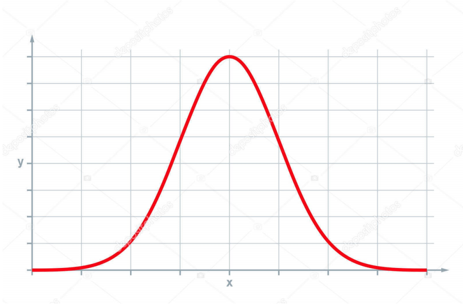
tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzés

A Φ függvény Gauss-féle haranggörbének nevezzük.

A standard normális eloszlás eloszlás és sűrűségfüggvénye





A normális eloszlás várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor az η ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\eta) = 0, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = 1.$$

ξ valószínűségi változó normális eloszlású m és σ^2 paraméterekkel

Definíció

Azt mondjuk, hogy a ξ **valószínűségi változó normális eloszlású m és σ^2 paraméterekkel** (jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), ha létezik $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ és $\eta = \sigma\xi + m$, ahol $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$.

$\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *akkor a* ξ

- ***eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye*** *tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ *esetén:*

$$\mathbb{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

- ***várható értéke és szórásnégyzete:***

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \sigma^2;$$

Tulajdonságok:

Tétel

1. ***Standardizálás:*** *Ha* $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *akkor* $\eta \doteq \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén.*
3. *Ha* $\xi_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ *független valószínűségi változók, akkor* $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

3. Standard normális eloszlásból származó további eloszlások

Az n szabadságfokú χ^2 eloszlás

Definíció

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az

$$\eta_n := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

valószínűségi változót ***n*-szabadságfokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változó**nak nevezzük. Jele: $\eta_n \sim \chi_n^2$.

Az n szabadságfokú t eloszlás

Definíció

Legyenek $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\eta_n \sim \chi_n^2$ eloszlású független valószínűségi változók. Ekkor

$$\zeta_n := \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\eta_n}{n}}}$$

valószínűségi változót n **szabadságfokú** t **(vagy student) eloszlás**nak nevezzük. Jele: $\zeta_n \sim t_n$.

Az F eloszlás

Definíció

Legyenek $\xi_n \sim \chi_n$ és $\eta_m \sim \chi^2_m$ független eloszlások. Ekkor a

$$\zeta_{n,m} = \frac{\frac{\xi_n}{n}}{\frac{\eta_m}{m}}$$

eloszlást F **eloszlásnak (vagy Fisher-Snedecor eloszlás**nak) nevezzük n és m szabadságfokokkal. Jele: $\zeta_{n,m} \sim F(d_1, d_2)$ ($d_1 = n$, $d_2 = m$ jelöli a szabadságfokokat.)

Vége az 6. előadásnak