

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolc, 2025.

Dr. Glavosits Tamás

5. előadás

Nevezetes diszkrét valószínűségi változók

1. Matematikai eszközök

A valószínűségi változó generátorfüggvénye

Definíció

Legyen ξ egy olyan diszkrét valószínűségi amely csak nemnegatív egész értékeket vesz fel. Definiáljuk a $G_\xi : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt

$$G_\xi(z) \doteq \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} p_k z^k = \sum_{k \in \mathcal{R}_\xi} \mathbb{P}(\xi = k) z^k \quad (z \in D)$$

módon.

A generátorfüggvény tulajdonságai

Tétel

A generátorfüggvény legfontosabb tulajdonságai:

- $p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén.
- Amennyiben a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke, az a generátorfüggvény segítségével

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1)$$

módon számolható.

- Amennyiben a ξ valószínűségi változó olyan, hogy létezik a ξ -nek szórásnégyzete, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi) = G'_\xi(1) + G''_\xi(1) - [G'_\xi(1)]^2.$$

- Ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, akkor

$$G_{\xi_1 + \xi_2}(z) = G_{\xi_1}(z)G_{\xi_2}(z)$$

Eloszlások konvolúciója

Definíció

Legyenek ξ_1 és ξ_2 olyan független valószínűségi változók, amelyek csak pozitív egész értékeket vesznek fel. Legyenek

$$p_i := \mathbb{P}(\xi_1 = x_i), \quad q_j := \mathbb{P}(\xi_2 = y_j) \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

amit a (p_i) és (q_j) eloszlások konvolúciójának nevezünk.

A geometriai sor összegképlete

Ha $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, akkor az

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots$$

numerikus sort **geometriai sornak** nevezzük. A **geometriai sor összegképlete** könnyen megkapható

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

2. Nevezetes diszkrét eloszlások

Bernoulli eloszlás

Definíció

A **Bernoulli eloszlás** p paraméterrel pénzfeldobás egy olyan érmével, ahol a fejdobás valószínűsége $p \in]0, 1[$. Az érmét egyszer dobjuk fel és a ξ valószínűségi változó 1 értéket vesz fel, ha a fejet dobunk, és 0-t, ha írást dobunk. Jele: $\xi \sim \mathcal{B}(p)$.

Bernoulli eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

- A ξ eloszlása:

x_i	0	1
p_i	$1 - p$	p

Tétel

Ha ξ egy p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó, akkor a ξ

- *várható értéke és szórásnégyzete:*

$$\mathbb{E}(\xi) = p, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = p(1 - p).$$

A geometriai eloszlás

Definíció

A geometriai eloszlásnak két változata van. Mindkét esetben független kísérletek sorozatát végezzük és egy p valószínűségű A esemény bekövetkezését figyeljük. A ξ valószínűségi változót p **paraméterű geometriai eloszlásnak** nevezzük, ha

A. változat: ξ_A jelöli az első sikeres bekövetkezéshez szükséges kísérletek számát.

B. változat: ξ_B jelöli az első sikeres bekövetkezés előtti kísérletek számát.

A geometriai eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Megőrizve a fenti jelöléseket a ξ_A geometriai eloszlású valószínűségi változó tekintettel az A változatra.

- A ξ_A **eloszlása**:

$$\mathbb{P}(\xi_A = k) := p_k = p(1 - p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

- A ξ_A **várható értéke és szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

A geometriai eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Megőrizve a fenti jelöléseket a ξ_B geometriai eloszlású valószínűségi változó tekintettel a B változatra.

- A ξ_B **eloszlása**:

$$\mathbb{P}(\xi_B = k) := p_k = p(1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

- A ξ_B **várható értéke és szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi_B) = \frac{1}{p} - 1; \quad \mathbb{D}^2(\xi_B) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Negatív binomiális eloszlás

Definíció

Független kísérletek sorozatát végezzük, melyben egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát figyeljük. Jelölje ξ azoknak a kísérleteknek a számát, amely ahhoz szükséges, hogy a megfigyelt A esemény r -edszer bekövetkezzen (ahol $r \in \mathbb{Z}_+$ rögzített szám). Ekkor azt mondjuk, hogy ξ egy **negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó** r és p **paraméterekkel**. Másik neve a negatív binomiális eloszlásnak: Pascal eloszlás.

Jele: $\xi \sim \mathcal{NB}(r, p)$.

Megjegyzés a negatív binomiális eloszláshoz

Megjegyzés

1. Amikor egy p valószínűséggel bekövetkező A eseményről beszélünk, mindig gondoljunk arra, hogy feldobunk egy érmét, amelyre

$$\mathbb{P}(\text{fej}) = p, \quad \mathbb{P}(\text{írás}) = 1 - p.$$

Tehát az általunk vizsgált diszkrét valószínűségi változók nagy része Bernoulli eloszlásra vezethető vissza.

2. Egy $\xi \sim \mathcal{NB}(r, p)$ valószínűségi változó r db független p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó független összege, azaz, ha $\xi \sim \mathcal{NB}(r, p)$, akkor léteznek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r \sim \text{Geom}(p)$ (A változat) geometriai eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r.$$

A negatív binomiális eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Legyen $\xi \sim \mathcal{NB}(r, p)$, ekkor

- **a ξ eloszlása:**

$$\mathbb{P}(\xi = r + k) = \binom{r + k - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(amiből látszik, hogy $\mathcal{R}_\xi = \{r, r + 1, r + 2, \dots\}$).

- **A ξ várható értéke és szórásnégyzete:**

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{r}{p}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

A binomiális eloszlás

Definíció

Jelölje ξ egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát n független kísérlet esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ **binomiális eloszlású** n és p paraméterekkel, amit $\xi \sim \mathcal{B}(n, p)$ módon jelölünk.

Megjegyzés a binomiális eloszláshoz

Megjegyzés

Egy $\xi \sim \mathcal{B}(n, p)$ valószínűségi változó n db független p paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó összege, azaz, léteznek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ p paraméterű Bernoulli eloszlású független valószínűségi változók úgy, hogy

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

A binomiális eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\xi \sim \mathcal{B}(n, p)$, akkor ξ valószínűségi változó

- **eloszlása:**

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

- **várható értéke és szórásnégyzete:**

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = np(1-p).$$

A hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Golyót húzunk urnából visszatevés nélkül. Alkalmazzuk a szokásos jelöléseinket, azaz

- N jelöli a golyók számát,
- s a piros golyók számát,
- $N - s$ a fehér golyók számát,
- n golyót húzunk, amelyek között k piros.
- Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát.

Ekkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**.

A hipergeometrikus eloszlás eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Megőrizve a fenti jelöléseket a ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó

- **eloszlása:**

$$p_k = \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad (\max\{0, n-(N-s)\} \leq k \leq \min\{s, n\});$$

- **várható értéke és szórásnégyzete:**

$$\mathbb{E}(\xi) = n \frac{s}{N}, \quad \mathbb{D}^2(\xi) = n \frac{N-s}{N-1} \frac{s}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right).$$

A Poisson eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$ egy rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó **Poisson eloszlású** λ **paraméterrel**, ha eloszlása:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Jele $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$.

A Poisson eloszlás várható értéke és szórásnégyzete

Tétel

Ha $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$, akkor a ξ valószínűségi változó **várható értéke** és **szórásnégyzete**:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda \qquad \mathbb{D}^2(\xi) = \lambda$$

Határérték tételek

1. Hipergeometrikus eloszlás nagy N esetén binomiálissal közelíthető, azaz ha ξ_k hipergeometrikus eloszlású N_k és s_k paraméterekkel úgy, hogy $N_k \rightarrow \infty$ és $\frac{s_k}{N_k} \rightarrow p \in]0, 1[$, továbbá $n_k = n$ egy rögzített szám, akkor $\xi_k \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. A Poisson eloszlás nagy n esetén Binomiális eloszlással közelíthető, azaz ha $\xi_k \sim \mathcal{B}(n_k, p_k)$ úgy, hogy $n_k \rightarrow \infty$ és $n_k p_k \rightarrow \lambda > 0$, akkor $\xi_k \sim \text{Poiss}(\lambda)$.

Vége az 5. előadásnak